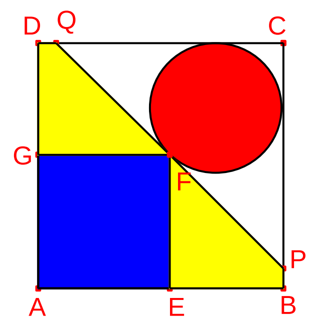
Problemes de Geometria per a l'ESO 164



1631.- En la figura ABCD i AEFG són quadrats.
La circumferència és tangent als costats $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ i passa pel punt F.
$\angle QPC = 45^{\circ}$, i la recta PQ és tangent a la circumferència.
Si el costat del quadrat AEFG és igual al diàmetre 2r de la circumferència, determineu la mesura del costat ABCD.

Solució:

$\overline{AE} = \overline{EF} = 2r$

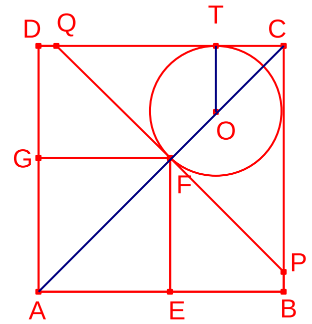
Siga O el centre de la circumferència.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{CD}$.

$\overline{OF} = \overline{OT} = \overline{CT} = r$.

F és el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

Aleshores, el centre O pertany a la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat ABCD.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$\overline{AF} = 2\sqrt{2}\,r$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTO}$:

$\overline{OC} = \sqrt{2}\,r$.

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{2}\,c$

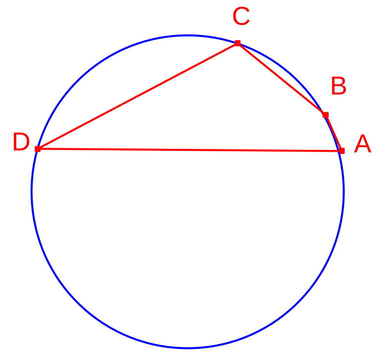
$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{OF} + \overline{OC}$.

$\sqrt{2}\,c = 2\sqrt{2}\,r + r + \sqrt{2}\,r$.

Resolent l'equació:

$$c = \frac{1+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}r = \frac{6+\sqrt{2}}{2}r.$$

1632.- El quadrilàter ABCD està inscrit en una circumferència.



Si $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=6$ i $\overline{DA}=8$, determineu la seua àrea.

Solució 1:
Siga $\angle ADC=\alpha$, aleshores, $\angle ABC=180^{o}-\alpha$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DAC}$:

$$\overline{AC}^2=8^2+6^2-2\cdot 8\cdot 6\cos\alpha \qquad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AC}^2=1^2+3^2-2\cdot 1\cdot 3\cos(180^{o}-\alpha) \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):
$10-96\cos\alpha=19+6\cos\alpha$.
Resolent l'equació:

$$\cos\alpha=\frac{15}{17}.$$

$$\sin\alpha=\frac{8}{17}.$$

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DAC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}8\cdot 6\sin\alpha+\frac{1}{2}1\cdot 3\sin(180^{o}-\alpha).$$

$$S_{ABCD}=\left(24+\frac{3}{2}\right)\sin\alpha=\left(24+\frac{3}{2}\right)\frac{8}{17}=12.$$

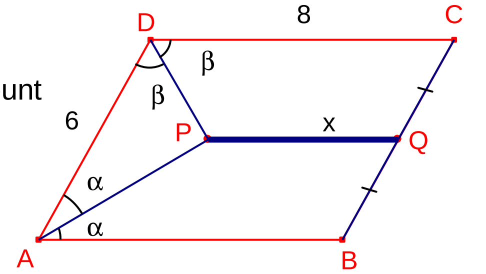
Solució 2:
Fórmula de Brahmagupta:
En un quadrilàter inscriptible ABCD de costats a, b, c, d la seua àrea és:

$$S_{ABCD}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \text{ on } s=\frac{a+b+c+d}{2}.$$

$$s=\frac{1+3+6+8}{2}=9.$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{(9-1)(9-3)(9-6)(9-8)}=12.$$

1633.- Siga el paral·lelogram ABCD, $\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=6$.



Es tracen les bisectrius als angles A i D que es tallen en el punt P.

Siga Q el punt mig del costat $\overline{BC}$.

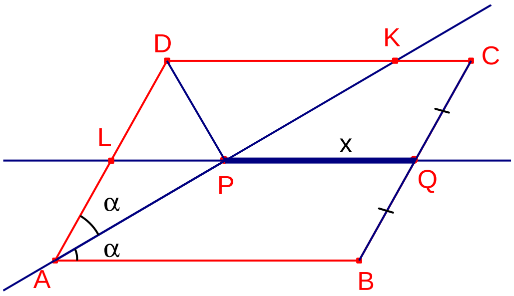
Determineu la mesura del segment $\overline{PQ}=x$.

Solució:

La bisectriu AP talla el costat $\overline{CD}$ en el punt K.

$\angle DKA=\angle KAB=\alpha$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{ADK}$ és isòsceles, $\overline{DK}=\overline{AD}=6$.



Per ser DP bisectriu del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADK}$, P és el punt mig del costat $\overline{AK}$.

Aleshores, P, Q pertanyen a la paral·lela mitjana del paral·lelogram ABCD.

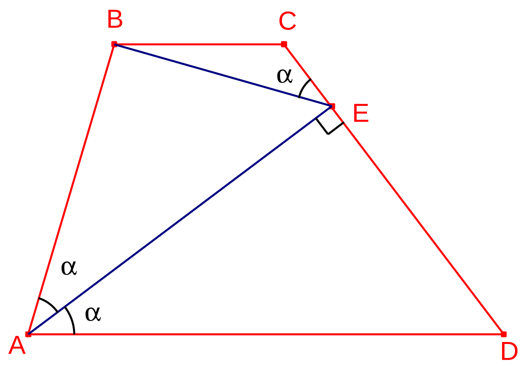
La recta PQ talla el costat $\overline{AD}$ en el punt L.

$\overline{LQ}=\overline{AB}=8$

$\overline{LP}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ADK}$, aleshores, $\overline{LP}=\frac{1}{2}\overline{DK}=3$.

$\overline{PQ}=x=\overline{LQ}-\overline{LP}=8-3=5$.

1634.- Siga el trapezi ABCD $\overline{AD} // \overline{BC}$.



Siga E del costat $\overline{CD}$ tal que $\angle EAD = \angle EAB = \angle BEC$, $\angle AED = 90^o$.

Siga $\overline{BC} = 3$ i $\overline{BE} = 4$, determineu $\overline{DE}$.

Solució:

$\angle ADC = 90^o - \alpha$.

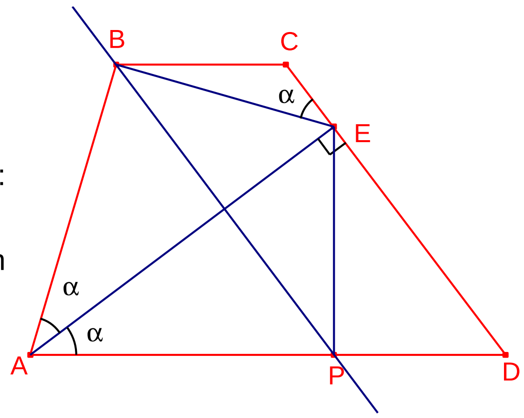
$\angle BCD = 180^o - \angle ADC = 90^o + \alpha$.

$\angle ABC = 180^o - \angle BAD = 180^o - 2\alpha$.

$\angle CBD = 180^o - (\angle BEC + \angle BCD) = 90^o - 2\alpha$.

$\angle EBA = \angle ABC - \angle CBE = 90^o$.

Siga P la projecció de E sobre $\overline{AD}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{APE}$ són iguals, aleshores:

$\overline{PE} = \overline{BE} = 4$, $\overline{AP} = \overline{AB}$.

Aleshores, ABEP és un cometa, per tant les diagonals són perpendiculars.

$\overline{BP}$ és perpendicular a $\overline{AE}$.

$\overline{CD}$ és perpendicular a $\overline{AE}$.

Aleshores, $\overline{BP}$ i $\overline{CD}$ són paral·lels.

$\overline{BC}$ i $\overline{PD}$ són paral·lels.

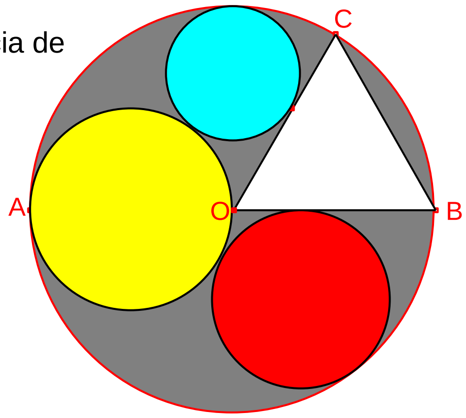
Aleshores, BCDP és un paral·lelogram. Per tant:

$\overline{PD} = \overline{BC} = 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPE}$:

$\overline{DE} = 5$.

1635.- En la figura, $\overline{AB} = 2r$ és diàmetre de la circumferència de centre O.

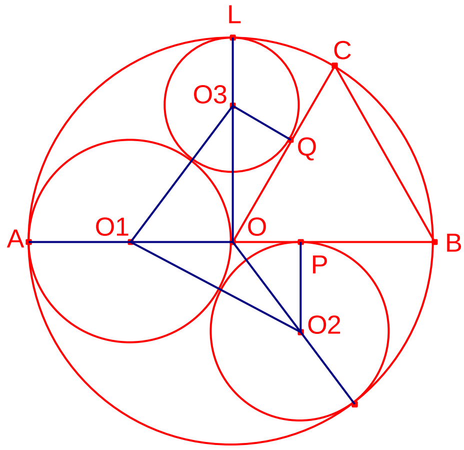


$\overset{\Delta}{OBC}$ és un triangle equilàter.
Determineu el radi de les altres tres circumferències.
Sangaku

Solució:
Siga O_1 la circumferència de diàmetre $\overline{AO}$ el seu radi és

$\overline{O_1A} = \overline{O_1O} = \frac{1}{2}r$.

Siga P el punt de tangència de la circumferència de centre O_2 i el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$.



Siga $\overline{O_2P} = r_2$ el seu radi.

$\overline{OO_2} = r - r_2$. $\overline{O_1O_2} = \frac{1}{2}r + r_2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O_1PO_2}$:

$$\overline{OP}^2 = (r - r_2)^2 - r_2^{\,2} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPO_2}$:

$$\left(\frac{1}{2}r + r_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r + \overline{OP}\right)^2 + r_2^{\,2} \qquad (2)$$

$$r \cdot r_2 = \overline{OP}^2 + r\overline{OP} \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (3):

$$r \cdot r_2 = r^2 - 2r \cdot r_2 + r\sqrt{(r - r_2)^2 - r_2^{\,2}} \qquad (4)$$

$$3r_2 - r = \sqrt{r^2 - 2r \cdot r_2} \qquad (5)$$

Resolent l'equació:

$r_2 = \frac{4}{9}r$.

Siga Q el punt de tangència de la circumferència de centre O_3 i el triangle $\overset{\Delta}{OBC}$.

Siga $\overline{O_3P} = r_3$ el seu radi.

$\overline{OO_3} = r - r_3$

$\angle QOO_3 = 30^\circ$.

$\frac{\overline{O_3P}}{\overline{OO_3}} = \frac{1}{2}$, $\frac{r_3}{r - r_3} = \frac{1}{2}$.

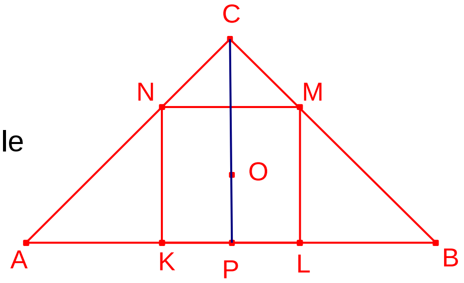
$r_3 = \frac{1}{3}r$.

1636.- En un triangle isòsceles està inscrit un quadrat d'àrea 1 el costat del qual es troba en la base del triangle. Determineu l'àrea del triangle si sabem que els centres de gravetat del triangle i del quadrat coincideixen.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Siga $\overline{AB} = c$



Siga el quadrat KLMN, $\overline{KL} = 1$ sobre la base $\overline{AB}$ del triangle.
Siga O el centre del quadrat, per hipòtesi baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{OP} = \frac{1}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{OC} = 2 \cdot \overline{OP} = 1$. $\overline{CP} = \frac{3}{2}$.

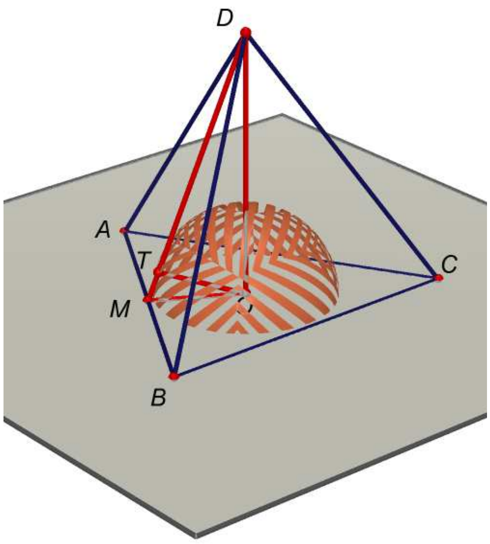
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{AKN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}}$. Resolent l'equació:

$c = 3$.

Notem que $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles rectangle, $C = 90°$.

1637.- En un tetraedre regular d'aresta 1, està inscrita una semiesfera de forma que tres cares del tetraedre són tangents a la superfície esfèrica la quarta cara serveix de plànol diametral. Determineu l'àrea de la semiesfera.



Solució:
Siga el tetraedre ABCD tal que el plànol diametral de la semiesfera pertany a la cara ABC.
Siga O el baricentre de la cara ABC.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga T el punt de tangència de la semiesfera i la cara ABD.
Siga $r=\overline{OT}$ radi de la semiesfera.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\overline{MD}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{OM}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \overline{OC}=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COD}$:

$$\overline{OD}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

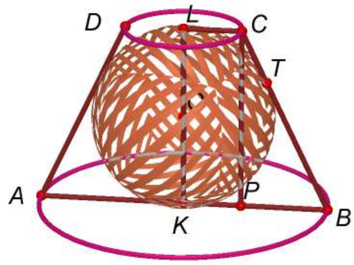
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{OTM}$ són semblants. Aplicant el teorema de tales:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{MD}}=\frac{\bar{r}}{\overline{OM}}.$$

$$\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{6}}.$$ Resolent l'equació, $r=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

L'àrea de la semiesfera és:

$$S=\frac{1}{2}\left(4\pi r^2\right)=2\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2=\frac{4\pi}{27}.$$



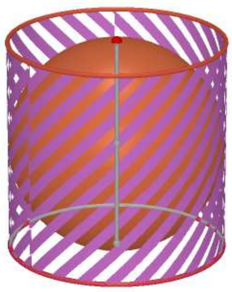
1638.- Una esfera està inscrita en un con truncat.

Proveu que l'àrea de l'esfera és menor o igual que l'àrea lateral del con truncat.

Solució:
Siga r el radi de l'esfera.
Siga ABCD una secció axial del con truncat.
Siga K el centre de la base inferior del con truncat. Siga $\overline{BK} = a$ el radi de la base inferior del con truncat.
Siga L el centre de la base superior del con truncat. Siga $\overline{CL} = b$ el radi de la base superior del con truncat.
Siga $a > b$.
$\overline{KL} = 2r$.
Siga $\alpha = \angle ABC$, $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Siga T el punt de tangència de l'esfera i la generatriu $\overline{BC}$ del con.
$\overline{BK} = \overline{BT} = a$, $\overline{CL} = \overline{CT} = b$.
$\overline{BC} = a + b$.
Siga P la projecció de P sobre la base inferior del con truncat.
$\overline{PB} = a - b$.

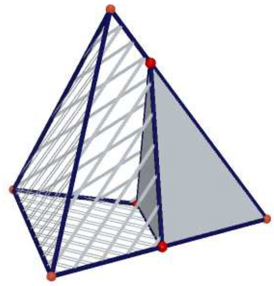
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPB}$:
$$\sin\alpha = \frac{2r}{a+b}.$$
L'àrea de l'esfera és:
$$S_{esfera} = 4\pi r^2 = \pi(a+b)^2 \sin^2\alpha.$$
L'àrea lateral del con truncat és:
$$S_{conT} = \left(\frac{2\pi a + 2\pi b}{2}\right)\overline{BC} = \pi(a+b)^2.$$
$$S_{esfera} = \pi(a+b)^2 \sin^2\alpha < \pi(a+b)^2 = S_{conT}.$$

Nota: L'àrea d'una esfera inscrita en un cilindre és igual a l'àrea lateral del cilindre.



1639.- La secció d'un tretraedre regular que passa per dos punts migs de dues arestes de la base i és perpendicular a la base divideix el tetraedre en dos políedres.

Determineu la proporció entre els volums dels dos políedres.



Solució:

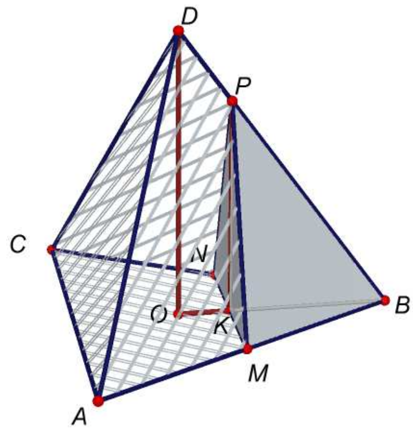
Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $h = \overline{OD}$ altura del tetraedre ABCD.

El volum del tetraedre regular ABCD és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$$



Siguen M, N els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.

Siga K el punt mig del segment $\overline{MN}$.

Siga MNP la secció perpendicular a la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \overline{BK} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOB}$, $\overset{\Delta}{PKB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{\overline{PK}}{\frac{\sqrt{3}}{4}a}.$$

$$\overline{PK} = \frac{3}{4}h.$$

El volum del tetraedre MNBP és:

$$V_{MNBP} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{3}{4}h = \frac{\sqrt{3}}{64}a^2h.$$

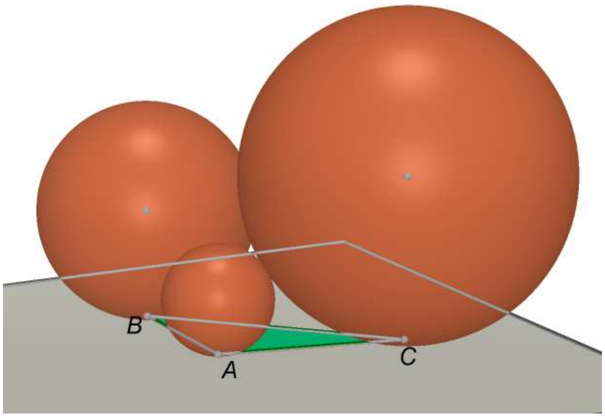
El volum del políedre AMNCPD és igual al volum del tetraedre ABCD menys el volum del tetraedre MNBP:

$$V_{AMNCPD} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h - \frac{\sqrt{3}}{64}a^2h = \frac{13\sqrt{3}}{192}a^2h.$$

La proporció entre els volums dels políedres AMNCPD i MNBP és:

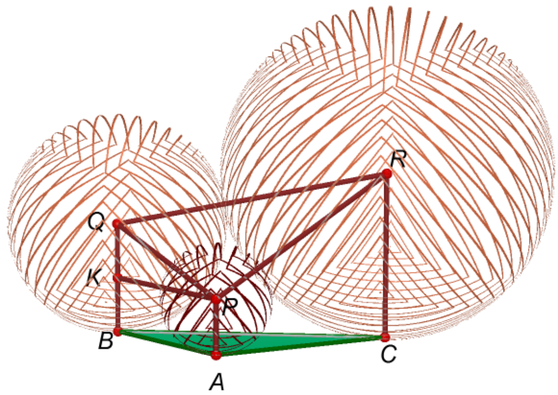
$$\frac{V_{AMNCPD}}{V_{MNBP}} = \frac{\frac{13\sqrt{3}}{192}a^2h}{\frac{\sqrt{3}}{48}a^2h} = \frac{13}{3}.$$

1640.- Tres esferes són tangents al plànol que determina el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en els seus vèrtexs i a la vegada són tangents a parelles una a l'altra.



Determineu els radis de les esferes si $\overline{AB} = \sqrt{8}$, $\overline{AC} = \sqrt{12}$, $\overline{BC} = \sqrt{24}$.

Solució:



Siga P el centre de la circumferència tangent en el punt A al plànol i $\overline{AP} = r_1$ el seu radi.
Siga Q el centre de la circumferència tangent en el punt B al plànol i $\overline{BQ} = r_2$ el seu radi.
Siga R el centre de la circumferència tangent en el punt C al plànol i $\overline{CR} = r_3$ el seu radi.
$\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ i $\overline{CR}$ són perpendiculars al plànol.
Siga K la projecció de P sobre $\overline{BQ}$.
$\overline{PK} = \overline{AB} = \sqrt{8}$.
$\overline{QK} = r_2 - r_1$.
$\overline{PQ} = r_1 + r_2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:
$\left(\sqrt{8}\right)^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_1 + r_2)^2$. Simplificant:
$4r_1 \cdot r_2 = \left(\sqrt{8}\right)^2$.
Anàlogament:
$4r_1 \cdot r_3 = \left(\sqrt{12}\right)^2$.
$4r_2 \cdot r_3 = \left(\sqrt{24}\right)^2$.
Considerem els sistema format per les tres equacions anteriors:
$\begin{cases} r_1 \cdot r_2 = 2 \\ r_1 \cdot r_3 = 3 \\ r_2 \cdot r_3 = 6 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 3 \end{cases}$.

Generalització:

Tres esferes són tangents al plànol que determina el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en els seus vèrtexs i a la vegada són tangents a parelles una a l'altra.
Determineu els radis de les esferes si $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$.

Solució:
$r_A = \dfrac{bc}{2a}$, $r_B = \dfrac{ac}{2b}$, $r_C = \dfrac{ab}{2c}$.