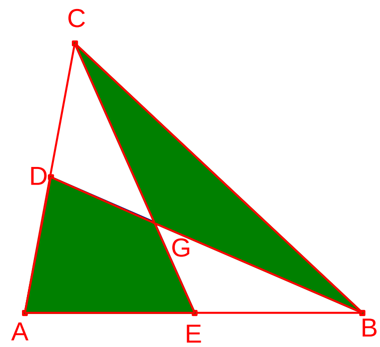
Problemes de Geometria per a l'ESO 165



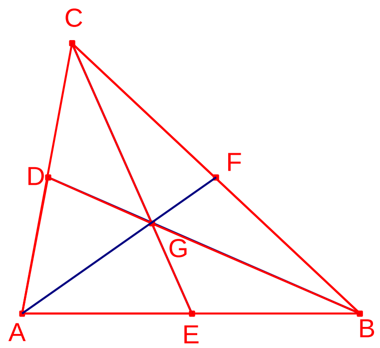
1641.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'han traçat les mitjanes $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$ que s'intersecten en el punt G. Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{BCG}$ i el quadrilàter ADGE tenen la mateixa àrea.

Solució:

Siga la mitjana $\overline{AF}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Aplicant la propietat del baricentre:



$\overline{AG}:\overline{GF}=2:1.$

$S_{AGC}=2\cdot S_{GFC}$.

$S_{BCG}=2\cdot S_{GFC}$.

$S_{ADG}=S_{DCG}$.

Aleshores, $S_{ADG}=S_{GFC}$.

Aplicant la propietat del baricentre:

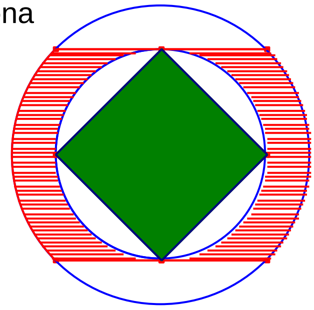
$\overline{CG}:\overline{GE}=2:1.$

$S_{AGC}=2\cdot S_{AGE}$.

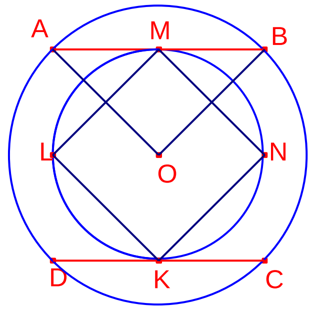
Aleshores, $S_{AGE}=S_{GFC}$.

Per tant, $S_{BCG}=S_{ADG}+S_{AGE}=S_{ADGE}$.

1642.- Dues circumferències són concèntriques i la circumferència menor divideix la major en dues parts d'igual àrea. Demostreu que la part de la corona compresa entre dues tangents paral·leles a la circumferència de radi menor, té la mateixa àrea que el quadrat inscrit en la circumferència menor.



Solució:
Siga O el centre de les dues circumferències.
Siguen $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ dos segments paral·lels tangents a la circumferència de radi menor.
Siga K el punt mig del segment $\overline{CD}$.
Siga KLMN un quadrat inscrit a la circumferència de radi menor.



Siga $\overline{OA} = R$ radi de la circumferència exterior.
Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència interior.
El cercle de radi major té el doble d'àrea del cercle de radi menor.
Aleshores, $\left(\frac{R}{r}\right) = 2$. $R = r\sqrt{2}$.
Siga $\overline{KL} = c$ costat del quadrat KLMN.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KOL}$:
$c^2 = 2r^2$.
L'àrea del quadrat inscrit KLMN és:
$S_{KLMN} = 2r^2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:
$R^2 = \overline{AM}^2 + r^2$.
$\overline{AM}^2 = R^2 - r^2 = r^2$.
Aleshores, $\overset{\Delta}{OMA}$ és un triangle rectangle isòsceles.
$\angle AOM = 90°$.
L'àrea del segment circular AB és igual a l'àrea d'un quart de circumferència de radi R menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$$S_{segment} = \frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}2r \cdot r = \frac{1}{2}\pi r^2 - r^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)r^2.$$

L'àrea de la part de la corona circular compresa entre dues tangents paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ és igual a l'àrea del cercle de radi R menys la suma de les àrees de dos segments circulars AB i el cercle de radi r:

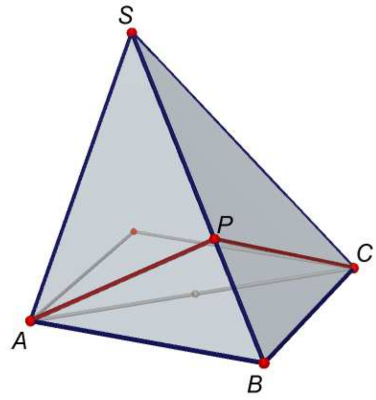
$$S_{ombrejada} = \pi R^2 - \left(2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)r^2 + \pi r^2\right) = 2\pi r^2 - \left(\pi r^2 - 2r^2 + \pi r^2\right) = 2r^2.$$

Aleshores, $\overline{AB}$, l'àrea de la part de la corona circular compresa entre dues tangents paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ és igual a l'àrea del quadrat KLMN.

1643.- La base d'una piràmide és un quadrat. Dues cares són perpendiculars al plànol de la base i les altres dues formen amb la base dos angles iguals α. Calculeu l'angle diedre format per les dues darreres cares laterals.

Solució:

Siga ABCDS la piràmide base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.



Siga l'aresta $\overline{AD} = h$ perpendicular a la base.

Les cares $A\overset{\Delta}{D}S$, $C\overset{\Delta}{D}S$ són perpendiculars a la base.

Siga $\angle SAD = \angle SDA = \alpha$. L'angle diedre de la cara $A\overset{\Delta}{B}S$ i la base i l'angle diedre de la cara $C\overset{\Delta}{D}S$ i la base és α.

Siga P la projecció de A sobre l'aresta $\overline{BS}$. P també és la projecció de C sobre l'aresta $\overline{BS}$.

L'angle diedre que formen les cares $A\overset{\Delta}{B}S$ i $C\overset{\Delta}{D}S$ és $\beta = \angle APC$.

Siga $\overline{AS} = \overline{CS} = b$, $\overline{CS} = d$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{D}S$:

$$\frac{h}{a} = tg\alpha, \ \frac{a}{b} = \cos\alpha.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $C\overset{\Delta}{D}S$:

$$d^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + h^2.$$

$$d = a\sqrt{2 + tg^2\alpha}$$

Els triangles rectangles $S\overset{\Delta}{A}B$, $A\overset{\Delta}{P}B$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b}{d} = \frac{\overline{AP}}{a}.$$

$$\overline{AP} = \overline{CP} = \frac{ab}{d} = \frac{1}{\cos\alpha\sqrt{2 + tg^2\alpha}}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $A\overset{\Delta}{P}C$:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2\frac{1}{\cos^2\alpha\left(2 + tg^2\alpha\right)}a^2 - 2\frac{1}{\cos^2\alpha\left(2 + tg^2\alpha\right)}a^2\cos\beta.$$

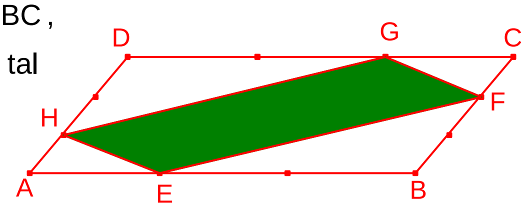
Simplificant:

$$\cos\beta = 1 - \cos^2\alpha\left(2 + tg^2\alpha\right).$$

$$\cos\beta = -\cos^2\alpha.$$

$$\beta = ar\cos\left(-\cos^2\alpha\right).$$

1644.- En un paral·lelogram ABCD, sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ hem agafat els punts E, F, G, H, respectivament, tal que $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CF}:\overline{FB}=\overline{CG}:\overline{GD}=\overline{AH}:\overline{HD}=1:2$.



Demostreu que el quadrilàter EFGH és un paral·lelogram i determineu la proporció entre la seua àrea i l'àrea del paral·lelogram ABCD.

Solució:

$\overline{AH}=\overline{CF}$, $\overline{AE}=\overline{CG}$, $\angle HAE=\angle FCG$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{AEH}$, $\overset{\Delta}{CGF}$ són iguals, per tant, $\overline{HE}=\overline{GF}$.

$\overline{AH}, \overline{CF}$ són paral·lels, $\overline{AE}, \overline{CG}$ són paral·lels.

Aleshores, $\overline{HE}, \overline{GF}$ són paral·lels.

Per tant, EFGH és un paral·lelogram.

Siga S l'àrea del paral·lelogram ABCD.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEH}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ són semblants i la raó de semblança 1:3.

Aleshores, $S_{AEH}=\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{ABD}=\frac{1}{9}\frac{1}{2}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{EBF}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i la raó de semblança 2:3.

Aleshores, $S_{EBF}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 S_{ABC}=\frac{4}{9}\frac{1}{2}S$.

L'àrea del quadrilàter EFGH és:

$$S_{EFGH}=S-(2\cdot S_{AEH}+2\cdot S_{EBF})=S-\left(2\cdot\frac{1}{18}S+2\cdot\frac{2}{9}S\right)=\frac{4}{9}S.$$

Aleshores, $\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}}=\frac{4}{9}$.

Generalització:

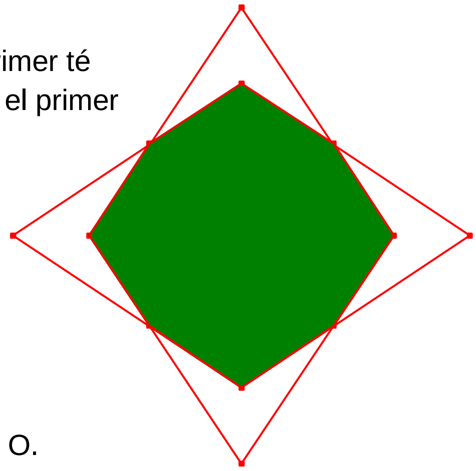
En un paral·lelogram ABCD, sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ hem agafat els punts E, F, G, H, respectivament, tal que $\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{CF}:\overline{FB}=\overline{CG}:\overline{GD}=\overline{AH}:\overline{HD}=1:k$.

Demostreu que el quadrilàter EFGH és un paral·lelogram i determineu la proporció entre la seua àrea i l'àrea del paral·lelogram ABCD.

Solució:

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}}=\frac{2k}{(1+k)^2}.$$

1645.- Calculeu l'àrea comuna de dos rombes, en què el primer té diagonals iguals a 2 i 3, mentre que el segon s'obté al girar el primer 90º al voltant del seu centre.



Solució:

Siga el rombe ABCD de diagonals $\overline{AC}=3$, $\overline{BD}=2$ i centre O.

Siga el rombe A'B'C'D' que s'obté de girar ABCD 90º al voltant de O.

La intersecció dels dos rombes és el quadrat KLMN.

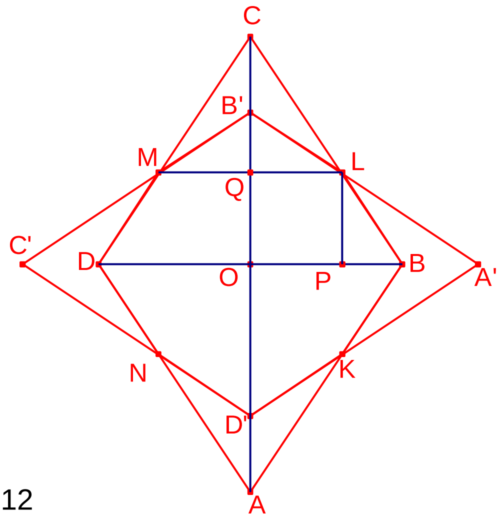
L'àrea comuna als dos rombes és l'octògon D'KBLB'MDN.

Siga P la projecció del punt L sobre la diagonal $\overline{BD}$.

Siga Q el punt mig del segment $\overline{LM}$.

Siga $\overline{QL}=\overline{PL}=x$.

$\overline{PB}=\overline{QB'}=1-x$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{COB}$, $\overset{\Delta}{LPB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{3}{2}=\frac{x}{1-x}$. Resolent l'equació:

$x=\frac{3}{5}$.

L'àrea de l'octògon D'KBLB'MDN és:

$$S_{D'KBLB'MDN}=S_{KLMN}+4\cdot S_{MLB'}=(2x)^2+4\frac{1}{2}2x(1-x)=4x=\frac{12}{5}.$$

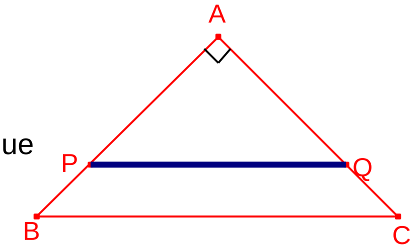
Generalització:

Calculeu l'àrea comuna de dos rombes, en què el primer té diagonals iguals a a i b, $a\le b$ mentre que el segon s'obté al girar el primer 90º al voltant del seu centre.

Solució:

$$S_{oct}=\frac{a^2b}{a+b}.$$

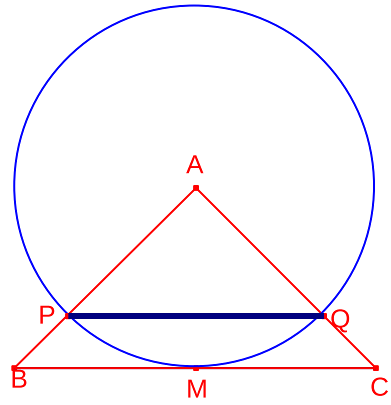
1646.- Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $A = 90^{\circ}$.



Construïu el segment $\overline{PQ}$ paral·lel a la hipotenusa $\overline{BC}$, tal que $\overline{PA} = \overline{AB}$.

Solució:

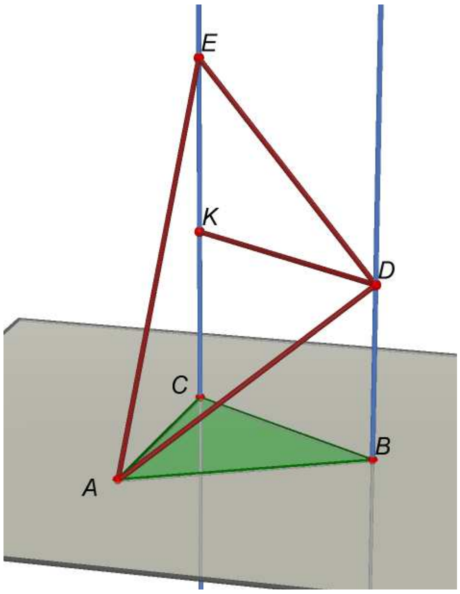
Considerem el punt mig M de la hipotenusa $\overline{BC}$.
Dibuixem la circumferència de centre A que passa pel punt M.



La circumferència talla els catets del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en els punts P, Q.
$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{AP}$.
$\overline{PQ}$ paral·lel a la hipotenusa $\overline{BC}$.

Notem que els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{BMA}$, $\overset{\Delta}{PAQ}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{AB}$.

1647.- En el pànol Π es troba el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.



Per un costat del plànol es troben els segments perpendiculars al plànol $\overline{BD}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\overline{CE}=a\sqrt{2}$. Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és rectangle.

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{AD}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACE}$:

$\overline{AE}=a\sqrt{3}$.

Siga K la projecció de D sobre la recta CE.

$\overline{KE}=a\sqrt{2}-\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKD}$:

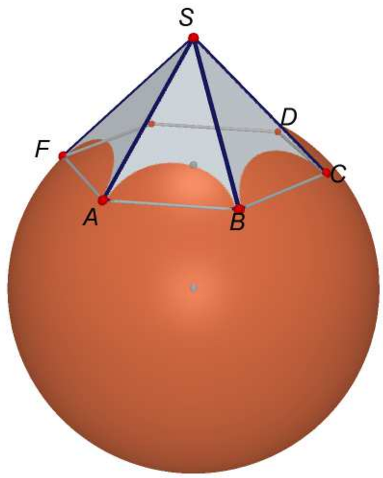
$\overline{DE}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Notem que $\overline{DE}^2+\overline{AD}^2=\overline{AE}^2$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és rectangle i isòsceles $\angle ADE=90º$.

1648.- Siga ABCDEFS una piràmide hexagonal regular de base l'hexàgon regular ABCDEF de costat a. Siga a l'altura de la piràmide.

Una esfera és tangent a les arestes laterals de la piràmide en els vèrtexs de la base.

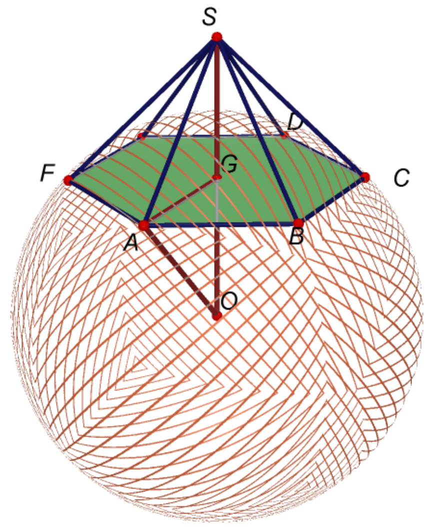


Solució:
Siga G el centre de la base ABCDEF de la piràmide.
$\overline{SG} = a$, altura de la piràmide.
Siga O el centre de l'esfera.
$\angle SAO = 90^o$, $\angle AGO = 90^o$.
Siga $\overline{OA} = R$ radi de l'esfera.
Siga $\overline{OG} = x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AGS}$:
$\overline{AS} = a\sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{SAO}$:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 + R^2 = (a+x)^2 \qquad (1)$$

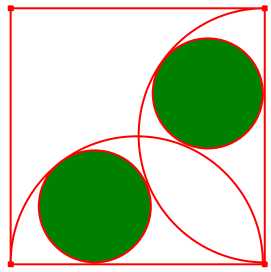
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AGS}$:

$$a^2 + x^2 = R^2 \qquad (2)$$



Considerem els sistema format per les expressions (1) (2):

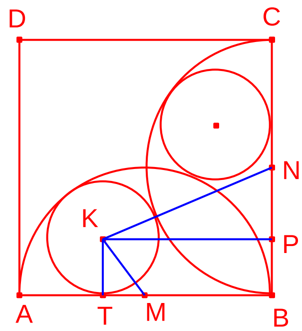
$\begin{cases} \left(a\sqrt{2}\right)^2 + R^2 = (a+x)^2 \\ a^2 + x^2 = R^2 \end{cases}$. Resolent els sistema: $\begin{cases} x = a \\ R = a\sqrt{2} \end{cases}$.



1649.- En un quadrat de costat c s'han dibuixat dos semicircumferències de diàmetre dos costats del quadrat.

Dos circumferències, cadascuna d'elles, es tangent a les semicircumferències i a un costat del quadrat.
Determineu el radi de les circumferències.
Sangaku

Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.

Siga K el centre de la circumferència tangent al costat $\overline{AB}$.

Siga T el punt de tangència. Siga $\overline{KT} = r$ el radi.

Siga $\overline{MT} = x$.

Siga P la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{MK} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{KN} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{PN} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{KP} = x + \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KTM}$:

$$\left(\frac{c}{2} - r\right)^2 = r^2 + x^2$$. Simplificant:

$$4cr = c^2 - 4x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPN}$:

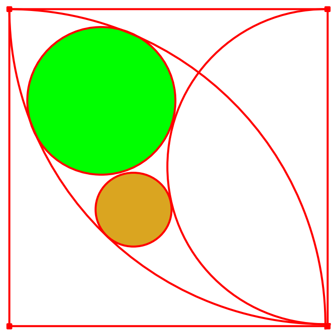
$$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(x + \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - r\right)^2$$. Simplificant:

$$8cr = c^2 + 4x^2 + 4cx \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} 4cr = c^2 - 4x^2 \\ 8cr = c^2 + 4x^2 + 4cx \end{cases}$$. Resolent el sistema:

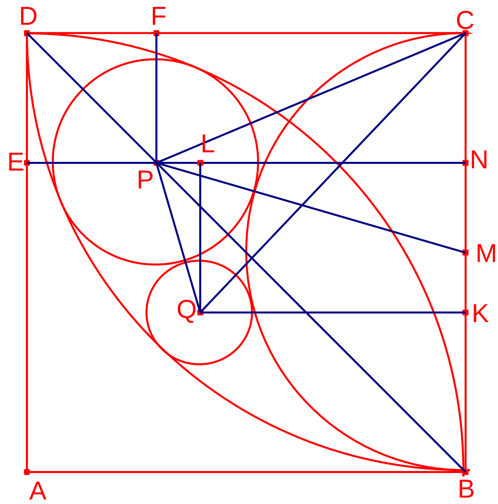
$$\begin{cases} x = \frac{1}{6}c \\ r = \frac{2}{9}c \end{cases}.$$



1650.- En un quadrat de costat c s'han dibuixat dos quadrant de radi el costat i una semicircumferència de diàmetre un costat.

Dos circumferències tangents, cadascuna d'elles, és tangent als quadrants i a la semicircumferència.
Determineu el radi de les circumferències.
Sangaku

Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siga P el centre de la circumferència major i r el seu radi.
P pertany a la diagonal $\overline{BD}$.

Siga E la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

Siga F la projecció de P sobre el costat $\overline{CD}$.

$\overline{PE}=\overline{PF}=x$.

Siga N la projecció de P sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{PN}=c-x$, $\overline{CP}=c-r$, $\overline{CN}=x$, $\overline{PM}=\frac{c}{2}+r$, $\overline{MN}=\frac{c}{2}-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNC}$:

$$(c-r)^2=x^2+(c-x)^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PNM}$:

$$\left(\frac{c}{2}+r\right)^2=\left(\frac{c}{2}-x\right)^2+(c-x)^2 \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} r^2-2cr=2x^2-2cx \\ r^2+cr=2x^2-3cx+c^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=\frac{5}{17} \\ r=\frac{4}{17} \end{cases}.$$

Siga P el centre de la circumferència menor i s el seu radi.

Siga K la projecció de Q sobre el costat $\overline{BC}$.

Siga L la projecció de Q sobre el segment $\overline{PN}$.

Siguen $\overline{QL}=y$, $\overline{QK}=z$.

$\overline{PQ}=r+s$, $\overline{PL}=c-x-z$, $\overline{MQ}=\frac{c}{2}+s$, $\overline{MK}=y-\left(\frac{c}{2}-x\right)$, $\overline{CQ}=c-s$, $\overline{CK}=y+x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QLP}$:

$$(r+s)^2=y^2+(c-x-z)^2 \qquad (3)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKM}$:

$$\left(\frac{c}{2}+s\right)^2 = z^2 + \left(y-\frac{c}{2}+x\right)^2 \qquad (4)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKC}$:

$$(c-s)^2 = z^2 + (y+x)^2 \qquad (5)$$

Resolent el sistema format per les expressions (3) (4) (5):

$$\begin{cases} y = \dfrac{64}{187} \\ z = \dfrac{20}{33} \\ s = \dfrac{4}{33} \end{cases}.$$