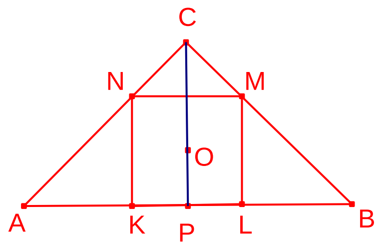
Problemes de Geometria per a l'ESO 166

1651.-En un triangle isòsceles està inscrit un quadrat d'àrea 1, un costat del quadrat es troba en la base del triangle. Determineu l'àrea del triangle si sabem que els centres de gravetat del triangle i del quadrat coincideixen.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Siga $\overline{AB} = c$

Siga el quadrat KLMN, $\overline{KL} = 1$ sobre la base $\overline{AB}$ del triangle.

Siga O el centre del quadrat, per hipòtesi baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{OP} = \frac{1}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{OC} = 2 \cdot \overline{OP} = 1$. $\overline{CP} = \frac{3}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{AKN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

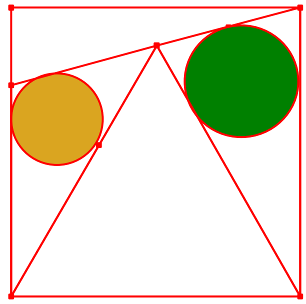
$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}c} = \frac{1}{\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}}$. Resolent l'equació:

$c = 3$.

L'àrea del quadrat és, $S_{KLMN} = 3^2 = 9$.

Notem que $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles rectangle, $C = 90º$.

1652.- En la figura, el quadrat té costat c i el triangle és equilàter. Calculeu la mesura dels radis de les dues circumferències.
Sangaku



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABL}$.

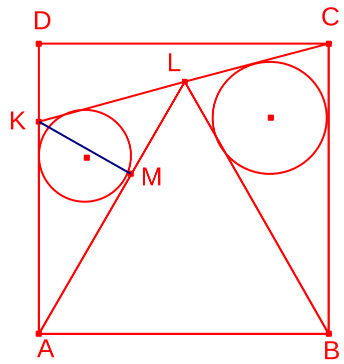
La recta CL talla el costat $\overline{AD}$ en el punt K.

Siga M la projecció de K sobre $\overline{AL}$.

$\angle LBC = \angle KAL = 30^{o}$.

$\angle CLC = \angle BCL = 75^{o}$.

$\angle KLA = 180^{o} – (60^{o} + 75^{o}) = 45^{o}$.



Siga $\overline{CL} = x$. Aplicant el teorema del cosinus al triagle $\overset{\Delta}{BCL}$:

$x^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cos 30^{o}$.

$x^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)c^2$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCL}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCL}$ és:

$$S_{BCL} = \frac{1}{2}c^2 \sin 30^{o} = \frac{c + c + x}{2} r.$$

$$S_{BCL} = \frac{1}{2}c^2 \frac{1}{2} = \frac{2c + c\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} r.$$ Resolent l'equació:

$$r = \frac{1}{2\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)} c.$$

Siga $y = \overline{KM} = \overline{LM}$.

$\overline{KL} = y\sqrt{2}$, $\overline{AK} = 2y$, $\overline{AM} = c - y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMK}$:

$(2y)^2 = y^2 + (c - y)^2$. Resolent l'equació:

$$y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} c.$$

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ALK}$.

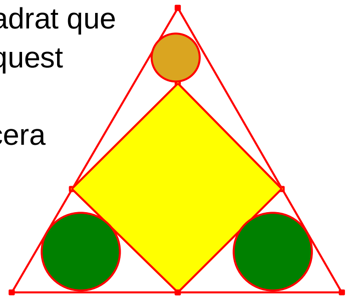
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ALK}$ és:

$$S_{ALK} = \frac{1}{2} c \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} c = \frac{c + 2y + y\sqrt{2}}{2} s.$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2} c = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} s.$$ Resolent l'equació:

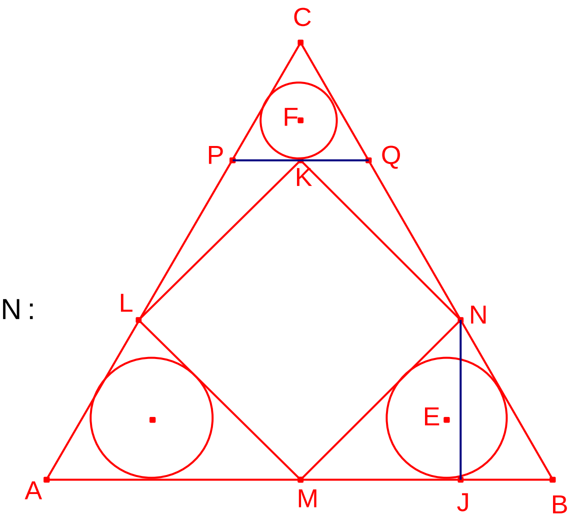
$$s = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{6}} c.$$

1653.- En la figura, dins d'un triangle equilàter de costat c hi ha un quadrat que té un vèrtex en el put mig d'un costat i l'altre vèrtex en l'altura sobre aquest costat.
S'han dibuixat dos circumferències inscrites en dos triangles i una tercera tangent al triangle equilàter que passa pel vèrtex superior del quadrat.
Determineu el radi de les tres circumferències.
Sangaku.



Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siga KLMN el quadrat.
$\angle NMB = 45^o$
Siga J la projecció de N sobre el costat $\overline{AB}$.



Siga $\overline{MJ} = \overline{NJ} = x$. $\overline{JB} = \frac{c}{2} - x$.

$\overline{BN} = 2\overline{JB} = c - 2x$. $\overline{MN} = x\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BJN}$:

$x = \frac{\sqrt{3}}{2}(c - 2x)$. Resolent l'equació:

$x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}c$.

Siga r el radi de la circumferència inscrita als triangles $\overset{\Delta}{MBN}$, $\overset{\Delta}{AML}$.

$$S_{MBN} = \frac{1}{2}\frac{c}{2}x = \frac{x\sqrt{2} + x + \frac{c}{2}}{2}r. \quad \frac{1}{2}\frac{c}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{4}c = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{4}c\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{c}{2}}{2}r.$$

Resolent l'equació: $r = \frac{3-\sqrt{3}}{2\left(5+3\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)}c$.

Siga $\overline{PQ}$ paral·lel al costat $\overline{AB}$. K és el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$ són semblants.

Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{PQC}$.

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

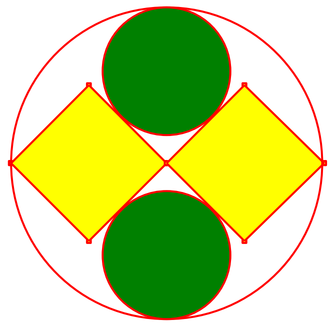
$R = \frac{\sqrt{3}}{3}c$.

$\overline{MK} = \sqrt{2}\cdot\overline{MN} = 2x$. $\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$, $\overline{CK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c - 2x$.

Aplicant el teorema de Tales:

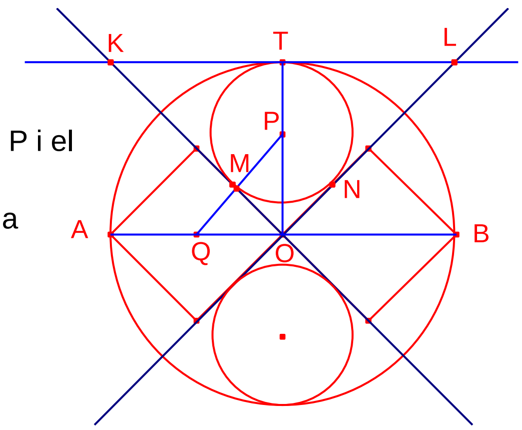
$$\frac{s}{\frac{\sqrt{3}}{3}c} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c - 2x}{\frac{\sqrt{3}}{2}c}. \quad s = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}c.$$

1654.- En la figura, la circumferència exterior té radi R.



Els dos quadrats són iguals, el vèrtex comú és el centre de la circumferència i els oposats a aquest formen un diàmetre. Determineu el radi de les dues circumferències tangents a als quadrats i a la circumferència exterior.
Sangaku

Solució:
Siga O el centre de la circumferència exterior i R el seu radi.
Siga P el centre de la circumferència superior i r el seu radi.
Siga Q el centre del quadrat de l'esquerra.
Siga M el punt de tangència de la circumferència de centre P i el quadrat de l'esquerra.
Siga N el punt de tangència de la circumferència de centre P i el quadrat de la dreta.
Siga T el punt de tangència de la circumferència exterior i la de centre P.
Siga la recta r tangent a la recta OT que passa pel punt T.
Siga K la intersecció de la recta r i la recta OM.
Siga L la intersecció de la recta r i la recta ON.



El triangle $\overset{\Delta}{OKL}$ és rectangle i isòsceles:

$$\overline{OK} = \overline{OL} = R\sqrt{2}.$$

$$\overline{KL} = \sqrt{2} \cdot \overline{OM} = \frac{2}{8}R.$$

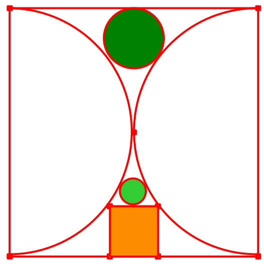
$$\overline{QM} = \overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OQ} = \frac{\sqrt{2}}{8}R.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKL}$

$$s = \frac{\overline{OK} + \overline{OL} - \overline{KL}}{2}.$$

$$s = \frac{2R\sqrt{2} - 2R}{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)R.$$

1655.- En la figura el quadrat exterior té costat c.

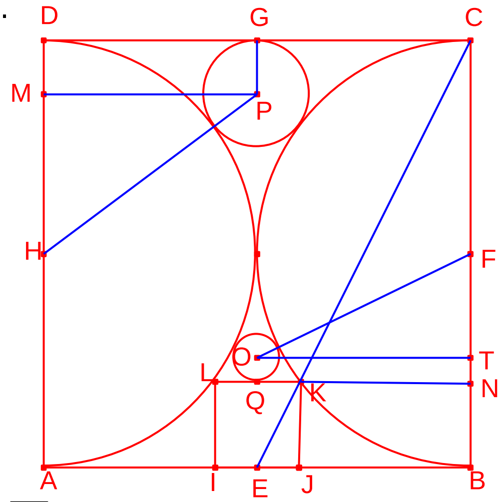


Hi ha dues semicircumferències de diàmetres dos costats oposats.
Un quadrat que té els dos vèrtexs en les semicircumferències i els altres dos sobre un costat del quadrat.
Determineu el radi de les dues circumferències.
Sangaku

Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siguen E, F, G H els punts migs dels costats del quadrat ABCD.



Siga IJKL el quadrat de costat $\overline{IJ} = x$.

Siga $\overline{PG} = r$ radi de la circumferència superior (P el centre).

Siga M la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

$\overline{PH} = \frac{c}{2} + r$, $\overline{HM} = \frac{c}{2} - r$, $\overline{PM} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HMP}$:

$\left(\frac{c}{2} + r\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - r\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:

$r = \frac{1}{8}c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{EJK}$, $\overset{\Delta}{EBC}$ són semblants ja que $\frac{\overline{JK}}{\overline{EJ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CB}} = 2$.

Aleshores, E, K, C estan alineats.

Siga N la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{KN} = \frac{c}{2} - \frac{x}{2}$, $\overline{FN} = \frac{c}{2} - x$, $\overline{FK} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNF}$:

$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{x}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:

$x = \frac{1}{5}c$.

Siga $\overline{OQ} = s$ radi de la circumferència inferior (O el centre).

Siga T la projecció de O sobre costat $\overline{BC}$.

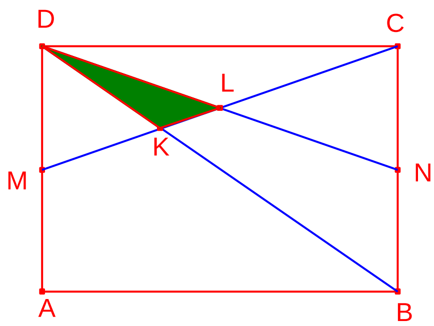
$\overline{OF} = \frac{c}{2} + \frac{s}{2}$, $\overline{FT} = \frac{c}{2} - x - s = \frac{3c}{10} - s$, $\overline{OT} = \frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTF}$:

$\left(\frac{c}{2} + s\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{3c}{10} - s\right)^2$. Resolent l'equació:

$s = \frac{9}{160}c$.

1656.- Siga el rectangle ABCD.



Siguen M i N els punts migs dels costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivament.

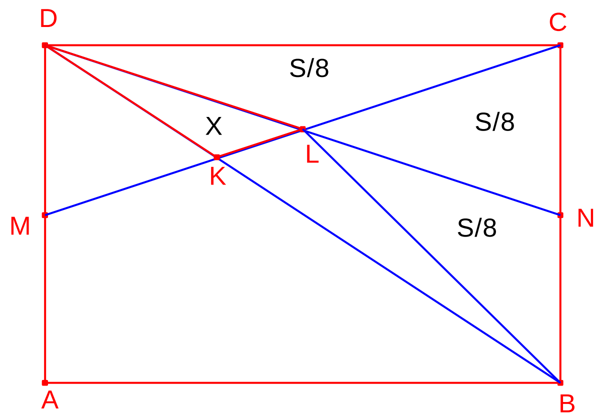
Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DKL}$ i el rectangle ABCD.

Sangaku

Solució 1:

Siga S l'àrea del rectangle ABCD.

L és el punt mig dels segments $\overline{CM}$, $\overline{BN}$.



Siga X l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DKL}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$S_{DCN} = \frac{1}{4}S$.

$S_{DLC} = S_{LNC} = \frac{1}{2}S_{DCN} = \frac{1}{8}S$.

$S_{BNL} = S_{LNC} = \frac{1}{8}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DLM}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són iguals, aleshores: $S_{DMK} = \frac{1}{8}S - X$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DMK}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són semblants i de raó $1:2$.

Aleshores, $\overline{BK} = 2\overline{DK}$.

$S_{BKL} = 2 \cdot S_{DKL} = 2X$.

$S_{BCK} = 4 \cdot S_{DMK}$.

$\frac{1}{8}S + \frac{1}{8}S + 2X = 4\left(\frac{1}{8}S - X\right)$. Resolent l'equació: $X = \frac{1}{24}S$. Aleshores, $\frac{S_{DKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.

Solució 2:

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$S_{DCN} = \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

$S_{DLC} = S_{LNC} = \frac{1}{2}S_{DCN} = \frac{1}{8}S_{ABCD}$.

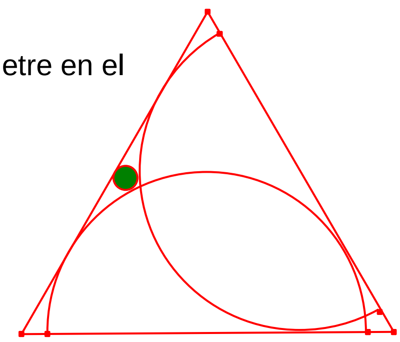
Els triangles $\overset{\Delta}{DLM}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són iguals, aleshores: $\overline{CL} = \overline{ML}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DMK}$, $\overset{\Delta}{NCL}$ són semblants i de raó $1:2$.

Aleshores, $\overline{CK} = 2 \cdot \overline{MK}$.

$\overline{CL} + \overline{KL} = 2 \cdot \left(\overline{CL} - \overline{KL}\right)$.

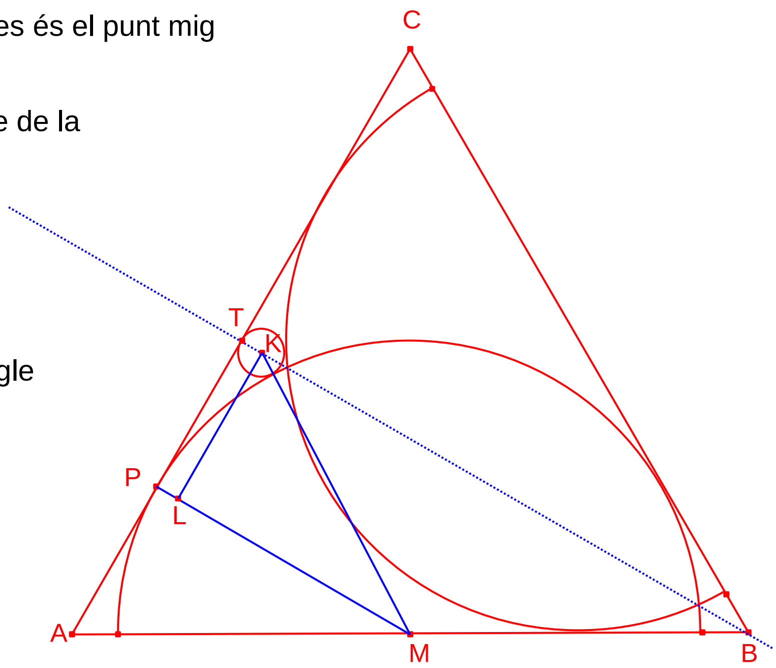
$\overline{KL} = \frac{1}{3}\overline{CL}$. $\frac{S_{DKL}}{S_{CDL}} = \frac{1}{3}$, $\frac{S_{DKL}}{\frac{1}{8}S_{ABCD}} = \frac{1}{3}$. Aleshores, $\frac{S_{DKL}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{24}$.



1657.- En un triangle equilàter de costat c s'ha inscrit dues semicircumferències tangents a dos costats i que tenen el diàmetre en el tercer costat.
Una circumferència es tangent exterior a les dues semicircumferències i a un costat del triangle (veure figura).
Calculeu el radi de la circumferència.
Sangaku.

Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = c$.
El centre de les dues semicircumferències és el punt mig dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$, centre de la semicircumferència.
Siga P el punt de tangència de la semicircumferència de centre M i el costat $\overline{AC}$.
Siga $\overline{MP} = r$ el seu radi.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}\overline{AM} = \frac{c}{4}, \quad r = \frac{\sqrt{3}}{4}c.$$

Les dues semicircumferències són simètriques respecte de la mediatriu del costat $\overline{AC}$.
Aleshores, la circumferència és simètrica respecte de la mediatriu anterior.
El punt de tangència T de la circumferència i el costat $\overline{AC}$ és el punt mig T del costat.
Siga K el centre de la circumferència i $\overline{KT} = s$ el seu radi.
Siga L la projecció de K sobre el segment $\overline{MP}$.

$$\overline{KL} = \overline{PT} = \overline{AT} - \overline{AP} = \frac{c}{4}.$$

$$\overline{MK} = r + s, \quad \overline{ML} = r - s.$$

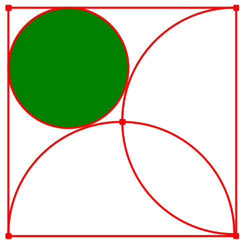
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MLK}$:

$$(r+s)^2 = \left(\frac{c}{4}\right)^2 + (r-s)^2.$$

$$4rs = \frac{1}{16}c^2.$$

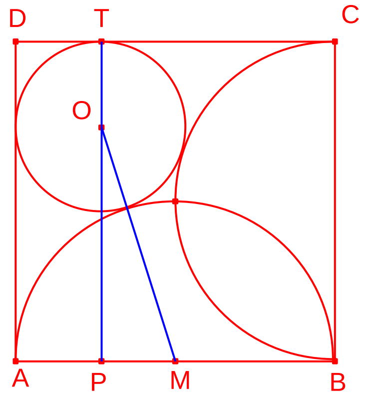
$$s = \frac{1}{64}c^2\frac{1}{r} = \frac{1}{64}c\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{48}c.$$

1658.- En un quadrat sobre dos costats s'han dibuixat dues semicircumferències (veure figura). Una circumferència és tangent exterior a les dues semicircumferències i als altres dos costats.



Determineu el radi de la circumferència.
Sangaku.

Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=c$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.

Siga O el centre de la circumferència. Siga $\overline{OT}=r$ el seu radi.

Siga P la projecció de O sobre el costat $\overline{AB}$,

$\overline{OM}=\frac{c}{2}+r$, $\overline{OP}=c-r$, $\overline{PM}=\frac{c}{2}-r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

$$\left(\frac{c}{2}+r\right)^2=\left(\frac{c}{2}-r\right)^2+(c-r)^2.$$

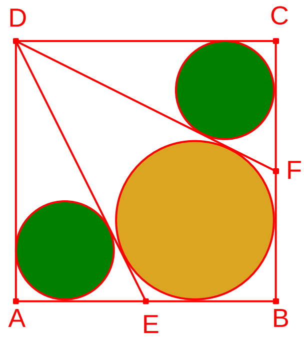
Simplificant:

$$r^2-4cr+c^2=0.$$

Resolent l'equació:

$$r=\left(2-\sqrt{3}\right)c.$$

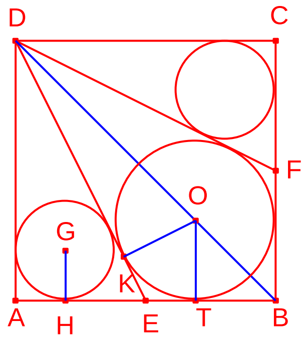
1659.- Siga ABCD un quadrat de costat c.



Siguen E i F els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.
Determineu el radi de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{FCD}$ i el quadrilàter DEBF.
Sangaku.

Solució:

Siga G el centre de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$ i $\overline{GH}=r$ el seu radi.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$$\overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{2}c.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és:

$$r=\frac{\overline{AE}+\overline{AD}-\overline{DE}}{2}=\frac{\frac{c}{2}+c-\frac{\sqrt{5}}{2}c}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{4}c.$$

Siguen T i K punts de tangència de la circumferència inscrita al quadrilàter DEBF amb els costats $\overline{BE}$, $\overline{DE}$, respectivament.
Siga O el centre de la circumferència i $s=\overline{OT}=\overline{OK}$ el radi.

$\overline{BD}=c\sqrt{2}$, $\overline{BO}=s\sqrt{2}$.

$\overline{DO}=\overline{BD}-\overline{BO}=(c-s)\sqrt{2}$.

Siga $\alpha=\angle ADE$, aleshores, $\angle ODK=45^{o}-\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODK}$:

$$\sin(45^{o}-\alpha)=\frac{s}{(c-s)\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\frac{s}{(c-s)\sqrt{2}}.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{s}{(c-s)\sqrt{2}}.$$

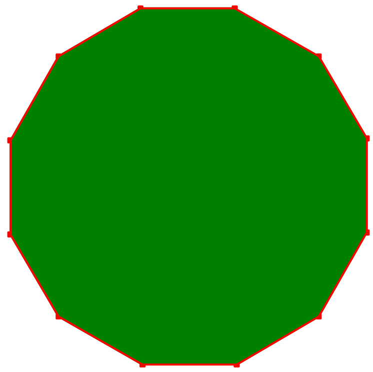
Simplificant:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{s}{(c-s)}.$$

Resolent l'equació:

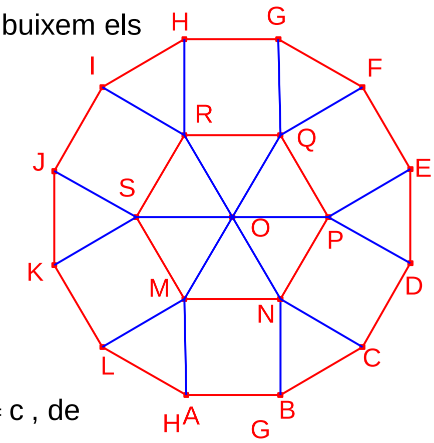
$$s=\frac{\sqrt{5}-1}{4}c.$$

1660.- Calculeu l'àrea d'un dodecàgon regular de costat c.



Solució 1:

Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de costat $\overline{AB} = c$, de centre O.
Sobre els costats alternatiu cap a l'interior del dodecàgon dibuixem els quadrats ABNM, CDPN, EFQP, GHRQ, IJSR, KLMS.
El dodecàgon regular ha quedat dividit amb 12 triangles equilàters de costat c i 6 quadrats de costat c.
La seua àrea és:



$$S_{ABCDEFGHIJKL} = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) + 6\left(c^2\right) = \left(3\sqrt{3} + 6\right)c^2 .$$

Solució 2:

Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de costat $\overline{AB} = c$, de centre O.

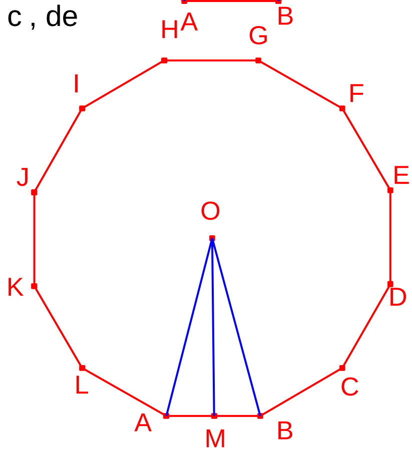
$$\angle AOB = \frac{360^{o}}{12} = 30^{o} .$$

Aleshores, $\angle OAB = \angle OBA = 75^{o}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga $\overline{OM} = a$, apotema del polígon regular.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:



$$\frac{2a}{c} = tg75^{o} = \frac{tg45^{o} + tg30^{o}}{1 - tg45^{o} \cdot tg30^{o}} = 2 + \sqrt{3} .$$

$$a = \frac{2+\sqrt{3}}{2}c .$$

L'àrea del dodecàgon regular és:

$$S_{ABCDEFGHIJKL} = 12\left(\frac{1}{2}c\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = \left(3\sqrt{3} + 6\right)c^2 .$$