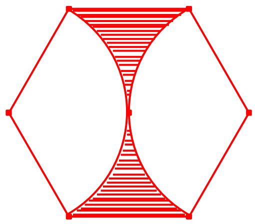
Problemes de Geometria per a l'ESO 167

1661.- En la figura, l'hexàgon regular té costat c.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.

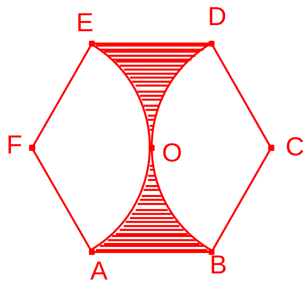


Solució.

Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB}=c$.

Els dos arcs tenen radi c i angle $\angle BCD=\angle AFE=120^o$.

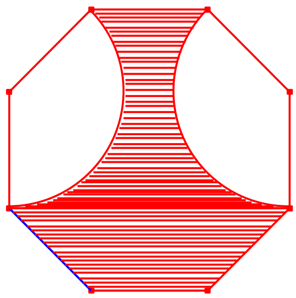
L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea de l'hexàgon de costat c menys $\frac{2}{3}$ de cercle de radi c:



$$S_{ombrejada}=6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right)-\frac{2}{3}\pi\cdot c^2=\frac{9\sqrt{3}-4\pi}{6}c^2.$$

1662.- En la figura, l'octògon regular té costat c.

Determineu l'àrea de la zona ombrejada.

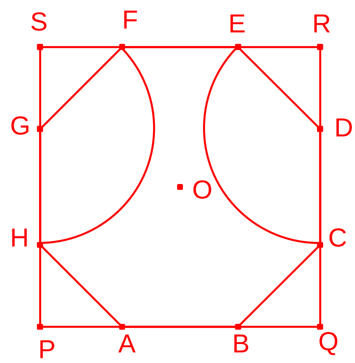


Solució:

Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$.

Els dos arcs tenen radi c i angle $\angle CDE = \angle HGF = 135^{\circ}$.

L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea de l'octògon regular de costat c menys $\frac{3}{4}$ de cercle de radi c:



L'octògon regular està inscrit en el quadrat PQRS de costat $\overline{PA} = 2 \cdot \overline{PA} + \overline{AB} = \left(1+\sqrt{2}\right)c$.

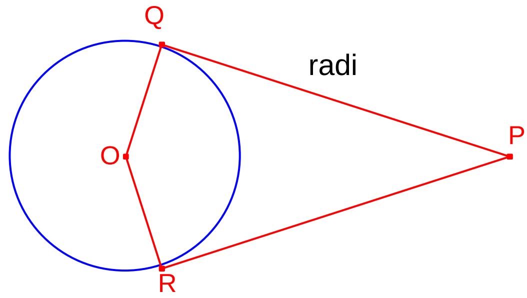
L'àrea de l'octògon regular és igual a l'àrea del quadrat PQRS menys l'àrea d'un quadrat de costat c.

$$S_{\text{octògon}} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 c^2 - c^2 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)c^2$$

L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S_{\text{ombrejada}} = 2\left(1-\sqrt{2}\right)c^2 - \frac{3}{4}\pi \cdot c^2 = \frac{8+8\sqrt{2}-3\pi}{4}c^2 .$$

Ricard Peiró i Estruch



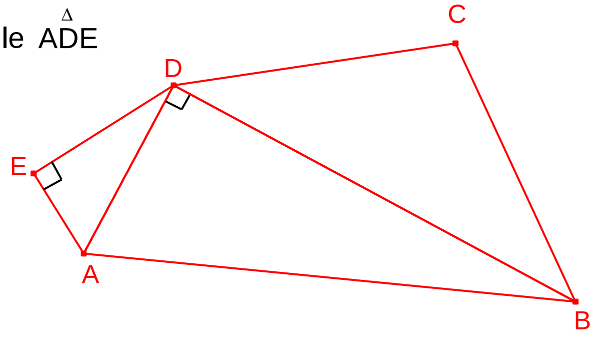
1663-.- Des d'un punt P exterior a una circumferència de r i centre O es dibuixen dues tangents que tallen la circumferència en els punts Q, R.

Determineu la distància $\overline{OP}$ a fi que l'àrea del cercle siga igual a l'àrea del quadrilàter PQOR.
KöMaL, C1302.

Solució:
Siga $\overline{OP} = d$. $\overline{OQ} = r$.
$\angle OQP = 90^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQP}$:
$\overline{PQ} = \sqrt{d^2 - r^2}$.
L'àrea del quadrilàter PQOR és:
$$S_{PQOR} = 2S_{PQO} = 2\left(\frac{1}{2}\overline{OQ}\cdot\overline{PQ}\right) = r\sqrt{d^2 - r^2}.$$
L'àrea del cercle és igual a l'àrea del quadrilàter PQOR, aleshores:
$r\sqrt{d^2 - r^2} = \pi r^2$. Resolent l'equació:
$d = r\sqrt{1 + \pi^2}$.

1664.- En la figura, $\angle AED = \angle ADB = 90º$, $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\overline{DE} = 16\,cm$, $\overline{BD} = 3 \cdot \overline{DE}$, el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 108 cm, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és $96\,cm^2$. Calculeu:



a) El perímetre del quadrilàter ABDE.
b) L'àrea del quadrilàter ABDE.
c) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.
d) L'àrea del quadrilàter ABCD.

Solució:
$\overline{BD} = 3 \cdot \overline{DE} = 48\,cm$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és $96\,cm^2$:

$\frac{1}{2}16 \cdot \overline{AE} = 96$. Resolent l'equació:

$\overline{AE} = 12\,cm$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$\overline{AD} = 20cm$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{AB} = 52\,cm$.

El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és 108 cm:
$2 \cdot \overline{BC} + 48 = 108$. Resolent l'equació:
$\overline{BC} = \overline{CD} = 30\,cm$.

a)
El perímetre del quadrilàter ABDE és:
$P_{ABDE} = 52 + 48 + 16 + 12 = 128\,cm$.

b)
L'àrea del quadrilàter ABDE és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$S_{ABDE} = \frac{1}{2}12 \cdot 26 + \frac{1}{2}20 \cdot 48 = 576\,cm^2.$$

c)
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, aplicant la fórmula d'Heró és:

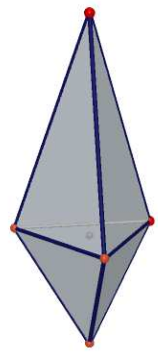
$$S_{BCD} = \frac{\sqrt{108 \cdot 48 \cdot 48 \cdot 12}}{4} = 432\,cm^2.$$

d)
L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$S_{ABDE} = \frac{1}{2}20 \cdot 48 + 432 = 912\,cm^2.$$

1665.- Una piràmide regular triangular d'altura 4 m i un tetraedre regular d'altura 2, tenen la base comuna i estan situats a distint costat d'aquesta.

Determineu l'angle que forma una de les cares de la piràmide contigua a una del tetraedre.



Solució:

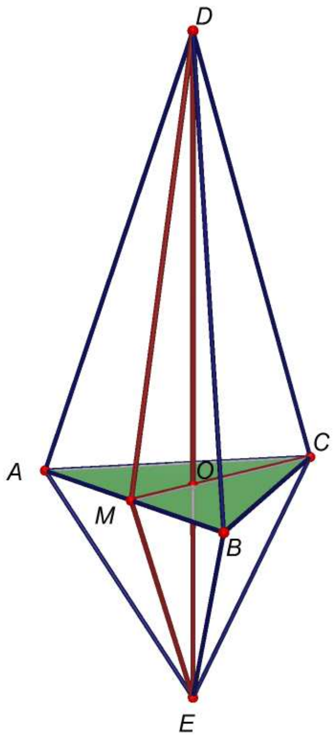
Siga ABCD la piràmide regular de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga O el centre de la base, $\overline{OD} = 4$.

Siga ABCE el tetraedre regular d'altura $\overline{OE} = 2$

Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base comuna a la piràmide i al tetraedre regular.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$, $\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOC}$:

$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right) + 2^2$. Resolent l'equació:

$a = \sqrt{6}$.

$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Siga $\alpha = \angle DMO$, $\beta = \angle OME$.

L'angle que forma una de les cares de la piràmide contigua a una del tetraedre regular és $\alpha + \beta$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMD}$:

$$tg\alpha = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}.$$

$\alpha = arctg 4\sqrt{2} \approx 79º58'30''$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OME}$:

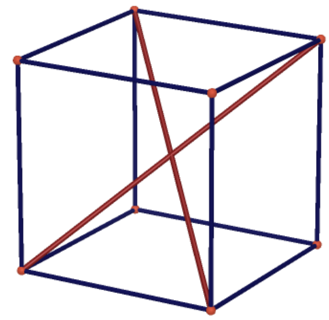
$$tg\beta = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$\beta = arctg 2\sqrt{2} \approx 70º31'43.6''$.

L'angle que forma una de les cares de la piràmide contigua a una del tetraedre és:

$\alpha + \beta = arctg\left(4\sqrt{2}\right) + arctg\left(2\sqrt{2}\right) \approx 150º30'13.6''$.

1666.- Determineu l'angle que formen dues diagonals d'un cub.



Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el cub d'aresta $a=\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC'}=\overline{BD'}=a\sqrt{3}$.

Les dues diagonals s'intersecten en el punt mig P d'ambdues.

$\overline{BP}=\overline{AP}=\frac{\overline{AC'}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Siga $\alpha=\angle APB$ l'angle que formen les diagonals $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$.

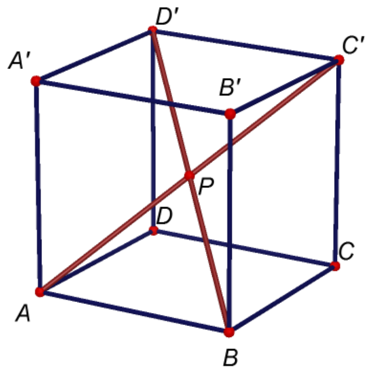
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$a^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\cos\alpha.$$

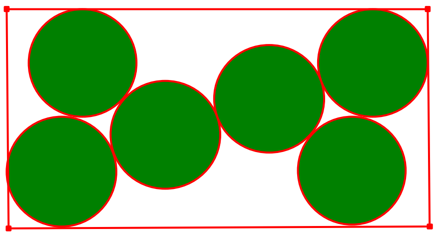
Simplificant:

$\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

$\alpha=\arccos\frac{1}{3}\approx 70º31'43.6''$.



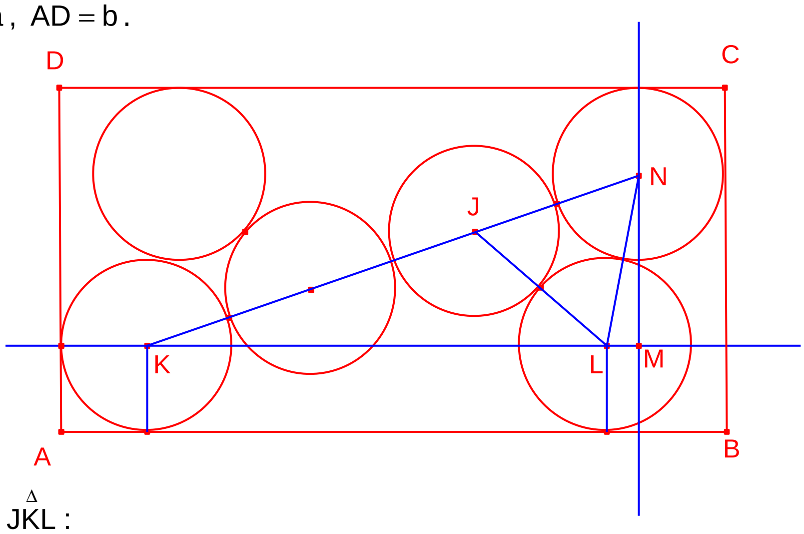
1667.- Dins d'un rectangle s'han inscrit 6 circumferències d'igual radi r (veure figura).



Determineu la mesura dels costats del rectangle.
Sangaku.

Solució:

Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$.



El triangle $\overset{\Delta}{JLN}$ de costat $\overline{JL} = 2r$,

$\angle NJL = 60^o$.

$\angle KJL = 120^o$, $\overline{KJ} = 4r$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JKL}$:

$\overline{KL}^2 = (4r)^2 + (2r)^2 - 2 \cdot 4r \cdot 2r \cdot \cos 120^o$.

Simplificant:

$\overline{KL} = 2\sqrt{7}\, r$.

Siga $\alpha = \angle JKL$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{JKL}$:

$(2r)^2 = (4r)^2 + \left(2\sqrt{7}\, r\right)^2 - 2 \cdot 4r \cdot 2\sqrt{7}\, r \cdot \cos\alpha$. Simplificant:

$\cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Siga M la projecció de N sobre la recta KL. $\overline{KM} = a - 2r$. $\overline{KN} = 6r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMN}$:

$\dfrac{a-2r}{6r} = \cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$. Resolent l'equació:

$$a = \left(2 + \frac{15\sqrt{7}}{7}\right).$$

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

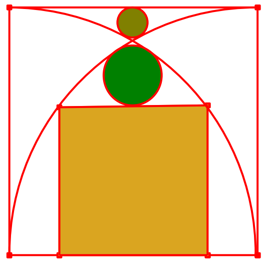
$\overline{MN} = b - 2r$. $\overline{KN} = 6r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMN}$:

$\dfrac{b-2r}{6r} = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$. Resolent l'equació:

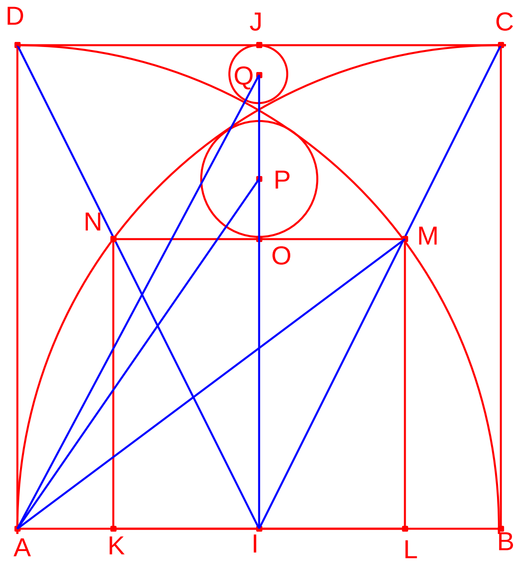
$$b = \left(2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}\right).$$

1668.- En la figura, el quadrat exterior té costat c.



Dues circumferències són tangents als dos arcs quadrats i la menuda tangent al quadrat gran i la gran tangent al quadrat menut.
Determineu el radi de les dues circumferències.
Sangaku.

Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=c$.

Siguen I, J els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Siga KLMN el quadrat de costat $\overline{KL}=x$.

Siga O el punt mig del costat $\overline{MN}$.

$\overline{AM}=c$, $\overline{AL}=\frac{c+x}{2}$, $\overline{LM}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALM}$:

$c^2=\left(\frac{c+x}{2}\right)^2+x^2$. Resolent l'equació:

$x=\frac{3}{5}c$.

Siga P el centre de la circumferència gran.
Siga Q el centre de la circumferència menuda.

Siga $\overline{PO}=r$ radi de la circumferència gran.

$\overline{IP}=x+r=\frac{3}{5}c+r$, $\overline{AP}=c-r$, $\overline{AI}=\frac{c}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIP}$:

$(c-r)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{5}c+r\right)^2$. Resolent l'equació:

$r=\frac{39}{320}c$.

Siga $\overline{QJ}=s$ radi de la circumferència menuda.

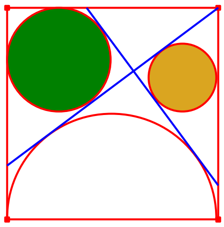
$\overline{IQ}=c-s$, $\overline{AQ}=c-s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AIQ}$:

$(c+s)^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+(c-s)^2$. Resolent l'equació:

$s=\frac{1}{16}c$.

1669.- En la figura, el quadrat té costat c.



Determineu el radi de les dues circumferències.
Sangaku.

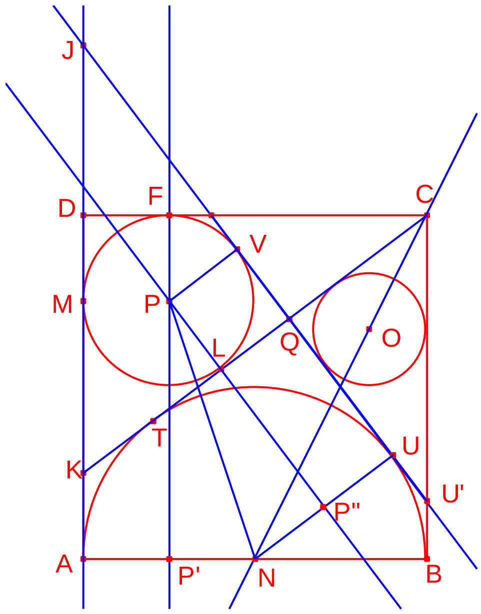
Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga O el centre de la circumferència menuda.

Siga P el centre de la circumferència gran. $\overline{QV} = \overline{QL} = x$. Siga $\alpha = \angle OCB$.

La recta CO és bisectriu de l'angle $\angle KCB$, i a més a més CK, i CB són tangents a la semicircumferència, aleshores, CO passa pel punt mig N del costat $\overline{AB}$.



$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3}$.

$\angle DKC = 2\alpha$. $\frac{\overline{CD}}{\overline{DK}} = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$. Aleshores, $\overline{DK} = \frac{3}{4}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDK}$:

$\overline{DK} = \frac{5}{4}c$.

Siga r el radi de la circumferència de centre P.

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDK}$ és:

$$r = \overline{DM} = \frac{\overline{DK} + \overline{CD} - \overline{CK}}{2} = \frac{\frac{3}{4}c + c - \frac{5}{4}c}{2} = \frac{1}{4}c.$$

$\overline{KM} = \overline{KL} = \frac{3}{4}c - \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}a$.

$\overline{CT} = \overline{CBL} = a$. $\overline{KL} + \overline{CT} = \overline{CK} + \overline{TL}$. $\frac{3}{2}c = \frac{5}{4}c + \overline{TL}$. Aleshores, $\overline{TL} = \frac{1}{4}c$.

Siga P' la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$. Siga P" la projecció de P sobre $\overline{NU}$.

$\overline{AP'} = c - r = \frac{3}{4}c$, $\overline{P'N} = \frac{c}{2} - r = \frac{1}{4}c$, $\overline{NP''} = \frac{c}{2} - r = \frac{1}{4}c$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PP'N}$, $\overset{\Delta}{PP''N}$ són iguals, aleshores:

$\overline{UV} = \overline{PP''} = \overline{PP'} = \frac{3}{4}c$.

Siga Q la intersecció de les tangents CK i UV. Siga $\overline{QV} = \overline{QL} = x$:

$\overline{QT} = \overline{QV} = x + \frac{1}{4}c$. $\overline{UV} = \frac{3}{4}c = 2x + \frac{1}{4}c$. Resolent l'equació: $\overline{QV} = \overline{QL} = x = \frac{1}{4}c$.

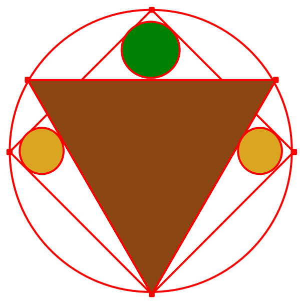
$\overline{QK} = \frac{3}{4}c$, $\overline{QC} = \frac{2}{4}c$.

Siga J la intersecció de la tangent UV i la recta AD.

Els triangles $\overset{\Delta}{KQJ}$, $\overset{\Delta}{CQU'}$ són semblants i de raó $\overline{QK} : \overline{QC} = \frac{3}{4}c : \frac{2}{4}c = 3 : 2$.

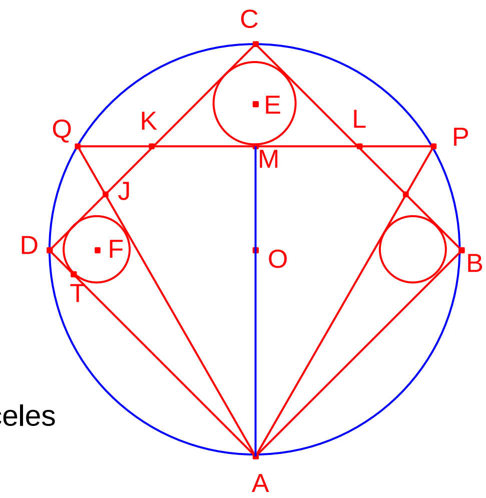
Siga s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{CQU'}$. $s = \frac{2}{3}r = \frac{2}{3}\frac{1}{4}c = \frac{1}{6}c$.

1670.- En la figura, la circumferència té radi R.
S'ha dibuixat un quadrat i un triangle equilàter.
Determineu el radi de les tres circumferències.
Sangaku 1823. Prefectura de Kanagawa.



Solució:
Siga la circumferència de radi R i centre O.
Siga el quadrat ABCD inscrit en la circumferència.

$\overline{OA} = R$



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$ inscrit en la circumferència.

Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

O és el baricentre del triangle. Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OA}$. $\overline{AM} = \overline{OA} + \overline{OM} = \frac{3}{2}R$.

$\overline{CM} = \overline{KM} = \frac{1}{2}c$. $\overline{KL} = 2 \cdot \overline{KM} = R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KCL}$:

$\overline{CK} = \overline{CL} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Siga $\overline{EO} = r$ el radi de la circumferència de centre E.

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{KCL}$ és:

$$r = \frac{\overline{CK} + \overline{CL} - \overline{KL}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2}\right)R.$$

$\angle PAQ = 60^o$, aleshores, $\angle DAQ = \angle PAB = 15^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$\overline{AD} = R\sqrt{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADJ}$:

$\frac{\overline{DJ}}{R\sqrt{2}} = tg15^o = tg(45^o – 30^o) = 2 - \sqrt{3}$. Aleshores, $\overline{DJ} = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)R$

$\frac{R\sqrt{2}}{\overline{AJ}} = \cos 15^o = \cos(45^o – 30^o) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. Aleshores, $\overline{AJ} = \left(2\sqrt{3} - 1\right)R$.

Siga $\overline{FT} = s$ el radi de la circumferència de centre F.

El radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADJ}$ és:

$$s = \frac{\overline{Ad} + \overline{DJ} - \overline{AJ}}{2} = \left(\frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2}\right)R.$$