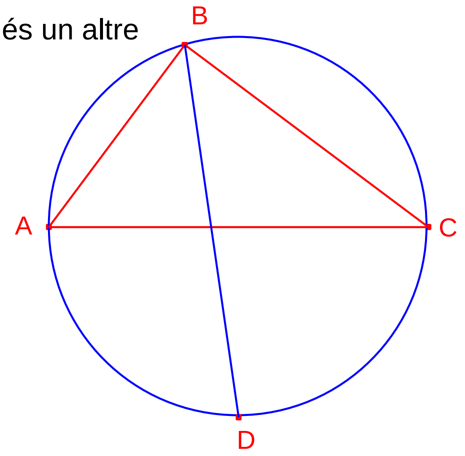
**Problemes de Geometria per a l'ESO 168**

1671.- Donada una circumferència de diàmetre $\overline{AC}=50$. Si B és un altre punt de la circumferència amb $\overline{BC}=40$ i $\overline{BD}$ és la bisectriu de l'angle $\angle ABC$, determineu la longitud del segment $\overline{BD}$.
*Calendari Matemàtic, abril 2016.*



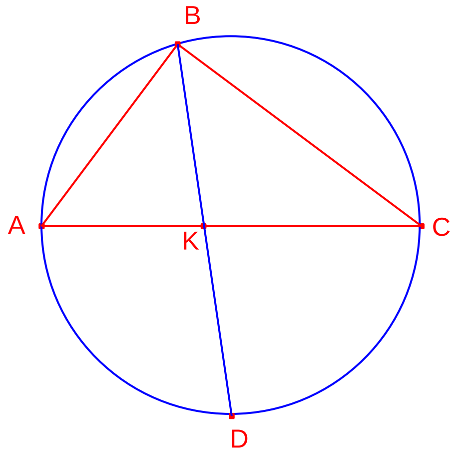

Solució:
Si $\overline{AC}$ és un diàmetre $\angle ABC=90^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB}=30$.

Siga K la intersecció de $\overline{BD}$ i $\overline{AC}$.
Aplicant la propietat de la bisectriu:
$\frac{\overline{AK}}{30}=\frac{50-\overline{AK}}{40}$. Resolent l'equació:
$\overline{AK}=\frac{150}{7}$.

$\overline{CK}=50-\overline{AK}=\frac{200}{7}$.

$\angle ABK=45^o$.




Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AKB}$:
$\frac{\overline{BK}}{\sin A}=\frac{\overline{AK}}{\sin 45^o}$.

$$\overline{BK}=\sin A\frac{\overline{AK}}{\sin 45^o}=\frac{40}{50}\frac{\frac{150}{7}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{120\sqrt{2}}{7}.$$

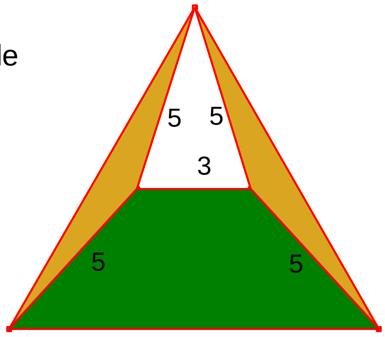
Aplicant la potència del punt K respecte de la circumferència:
$\overline{AK}\cdot\overline{CK}=\overline{BK}\cdot\overline{DK}$.

$\frac{150}{7}\cdot\frac{200}{7}=\frac{120\sqrt{2}}{7}\overline{DK}$. Resolent l'equació:

$\overline{DK}=\frac{125\sqrt{2}}{7}$.

$$\overline{BD}=\overline{BK}+\overline{DK}=\frac{120\sqrt{2}}{7}+\frac{125\sqrt{2}}{7}=\frac{245\sqrt{2}}{7}.$$

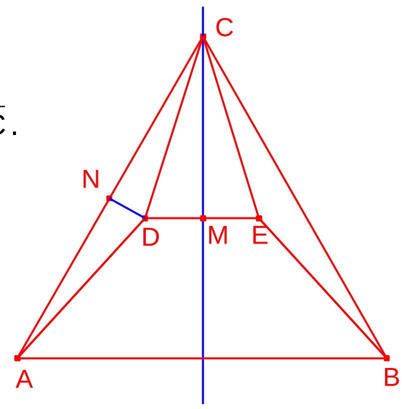
1672.- En la figura es té un trapezi isòsceles i sobre ell un triangle isòsceles que forma a l'exterior un triangle equilàter.




Determineu el costat del triangle equilàter.
*Calendari Matemàtic, abril 2016.*

Solució 1:

Siga el trapezi isòsceles ABED, $\overline{AD}=\overline{BE}=5$, $\overline{DE}=3$.




Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overline{CD}=\overline{CE}=5$.

El triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és isòsceles.

Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{AC}$.

Siga $\overline{AC}=c$ el costat del triangle equilàter.

Siga $\alpha=\angle NCD$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMC}$:

$$\sin\alpha=\frac{3}{10},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{91}}{10}.\ \angle NCD=30^{o}-\alpha.$$

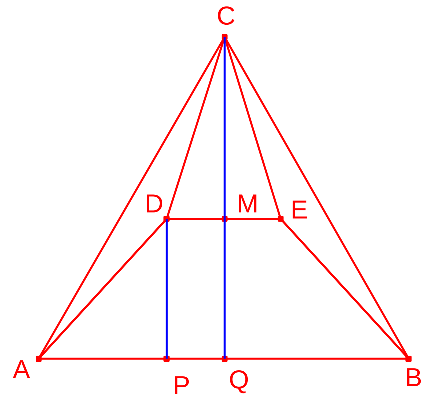
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CND}$:

$$\cos(30^{o}-\alpha)=\frac{c}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{91}}{2}+\frac{1}{2}\frac{3}{10}.$$

Resolent l'equació:

$$c=\frac{\sqrt{273}+3}{2}.$$

Solució 2:




Siga el trapezi isòsceles ABED, $\overline{AD}=\overline{BE}=5$, $\overline{DE}=3$.

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overline{CD}=\overline{CE}=5$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{DE}$.

Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$. Siga Q el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga $x=\overline{AP}$. El costat del triangle equilàter és $\overline{AB}=2x+3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$: $\overline{PD}=\sqrt{25-x^2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMC}$: $\overline{CM}=\frac{\sqrt{91}}{2}$.

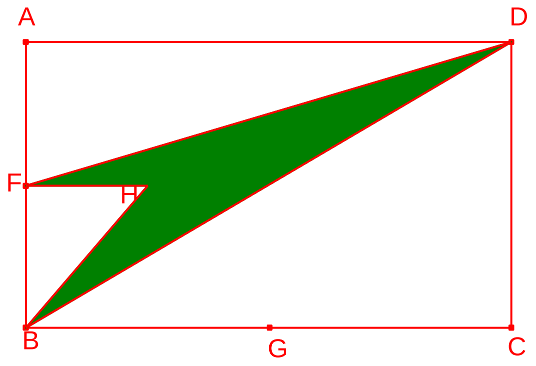
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQC}$:

$$\overline{CQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+3).\quad \overline{CQ}=\overline{CM}+\overline{PD},$$ aleshores:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+3)=\frac{\sqrt{91}}{2}+\sqrt{25-x^2}.$$ Elevant al quadrat i simplificant:

$16x^4+72x^3-156x^2-738x-594=0$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{\sqrt{273}-3}{2}.$$ Aleshores, $\overline{AB}=2x+3=\frac{\sqrt{273}+3}{2}$.




1673.- Siga el rectangle ABCD d'area $32\ cm^2$.

Siguen F i G els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament.

Siga H el punt mig del segment $\overline{AG}$.

Determineu l'àrea de la regió FHBD.

*Torneos geometricos 2015.*

Solució.

Siga S l'àrea del rectangle ABCD.

$$S_{BCD} = S_{BAD} = S_{ABC} = \frac{1}{2}S.$$

$$S_{FAD} = \frac{1}{2}S_{BAD} = \frac{1}{4}S.$$

$\overline{FH}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABG}$.

$$S_{ABG} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{4}S.$$

$$S_{AFH} = \frac{1}{4}S_{ABG} = \frac{1}{16}S.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AFH}$, $\overset{\Delta}{BFH}$ són iguals ja que tenen els catets iguals.

$$S_{BFH} = S_{AFH} = \frac{1}{16}S.$$

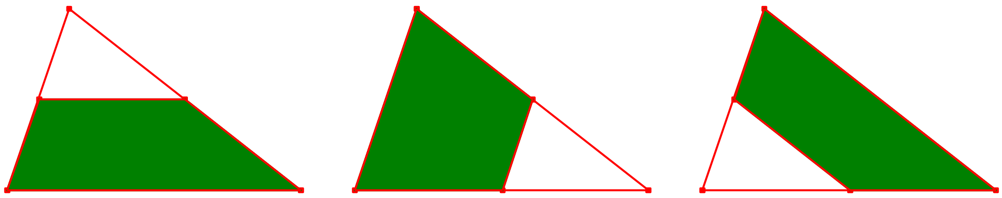
$$S_{FHBD} = S - (S_{BCD} + S_{FAD} + S_{BFH}) = S - \left(\frac{1}{2}S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S\right) = \frac{3}{16}S.$$

Aleshores,

$$S_{FHBD} = \frac{3}{16}S = \frac{3}{16}32 = 6\ cm^2.$$

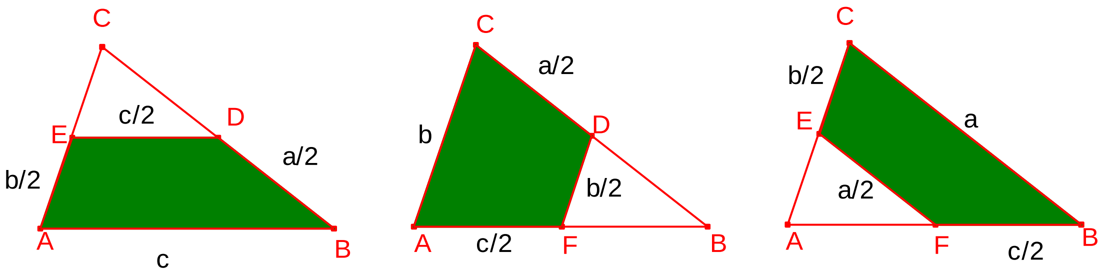
1674.- Amb els punts migs dels costats d'un triangle es formen tres trapezis.

Si la suma dels perímetres dels tres trapezis és 20 cm, calculeu el perímetre del triangle.



*Torneos geometricos 2015.*

Solució:



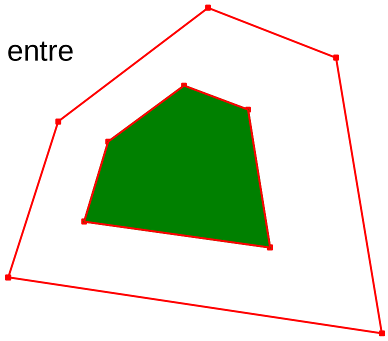

La suma dels perímetres dels trapezis és:

$$P_{sT} = \frac{5}{2}(a+b+c) = 20.$$

Aleshores el perímetre del triangle és:

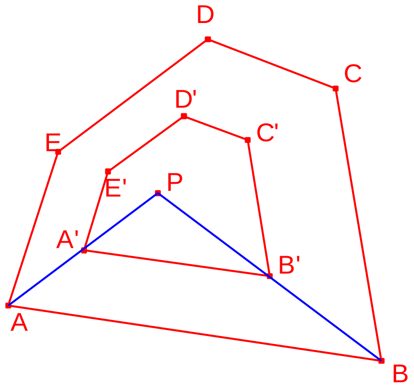
$$P_{ABC} = a+b+c = \frac{2}{5}20 = 8 \text{ cm}.$$

1675.- En l'interior d'un pentàgon d'àrea $12\ \text{cm}^2$ i perímetre 30 cm es troba un punt P.



Construïm un nou pentàgon utilitzant com vèrtexs els punts migs entre P i els vèrtexs del pentàgon inicial.
Determineu l'àrea i el perímetre del nou pentàgon.
*Torneos geometricos 2015.*

Solució:
Siga ABCDE el pentàgon inicial i A'B'C'D'E' el pentàgon interior:




$\overline{A'B'}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$\overline{A'B'} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Anàlogament els altres costats.
Els dos pentàgons són semblants i de raó 2:1.
Dos figures semblant els perímetres són proporcionals a la raó de semblança de les figures:

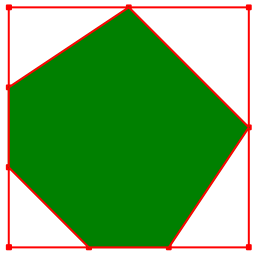
$\frac{P_{A'B'C'D'E'}}{P_{ABCDE}} = \frac{1}{2}$. Aleshores, $P_{A'B'C'D'E'} = \frac{1}{2}P_{ABCDE} = \frac{1}{2}30 = 15\ \text{cm}$.

Dos figures semblant les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança de les figures:

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

$$S_{A'B'C'D'E'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABCDE} = \frac{1}{4}12 = 3\ \text{cm}^2.$$

1676.- En dos costats d'un quadrat s'han dividit en dues parts iguals i els altres dos en tres parts iguals.



Determineu la proporció entre l'àrea de l'hexàgon format i l'àrea del quadrat.
*Calendari 2016. Societat d'Educació Matemàtica Al-Khwarizmi*

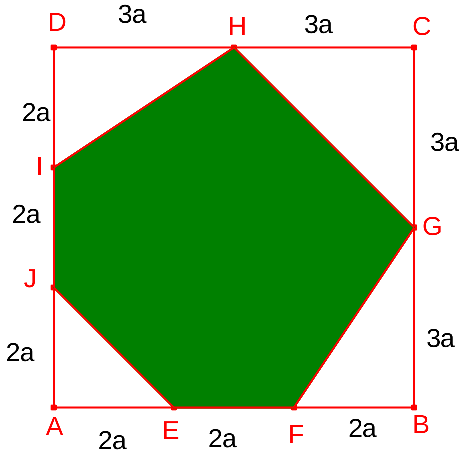
Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 6a$.

La seua àrea és:

$S_{ABCD} = (6a)^2 = 36a^2$.

Siga EFGHIJ l'hexàgon.




L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEJ}$ és:

$S_{EAJ} = \frac{1}{2}2a \cdot 2a = 2a^2$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{IDH}$, $\overset{\Delta}{FBG}$ són iguals, la suea àrea és:

$S_{FBG} = \frac{1}{2}2a \cdot 3a = 3a^2$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{GCH}$ és:

$S_{GCH} = \frac{1}{2}3a \cdot 3a = \frac{9}{2}a^2$.

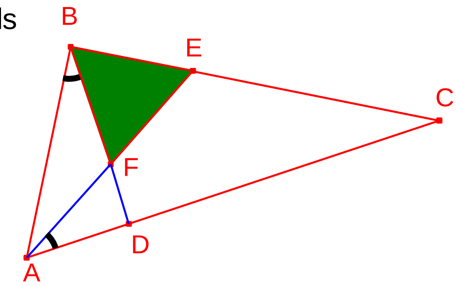
L'àrea de l'hexàgon EFGHIJ és:

$$S_{EFGHIJ} = S_{ABCD} - (S_{EAJ} + 2 \cdot S_{FBG} + S_{GCH}) = 36a^2 - \left(2a^2 + 2 \cdot 3a^2 + \frac{9}{2}a^2\right) = \frac{47}{2}a^2.$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon i el quadrat és:

$$\frac{S_{EFGHIJ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{47}{2}a^2}{36a^2} = \frac{47}{72}.$$

1677.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$ i els punts D i E sobre els costats $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, respectivament, compleixen que $\angle CAE = \angle ABD$.




Siga F la intersecció dels segments $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$.

Si $\overset{\Delta}{CFE}$ és equilàter, determineu la mesura de l'angle $\angle ABC$.

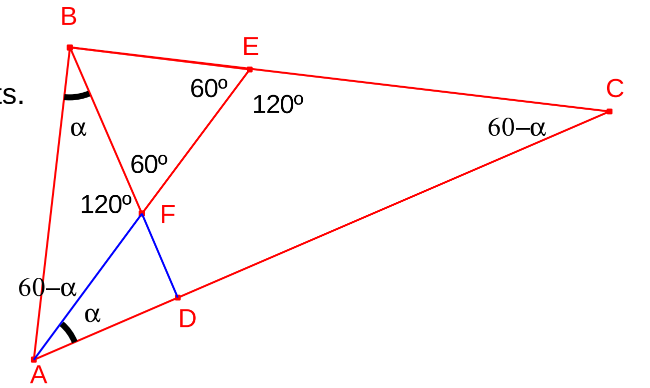
*Calendari 2016. Societat d'Educació Matemàtica Al-Khwarizmi.*

Solució:

Siga $\overline{BF} = \overline{EF} = \overline{BE} = x$.

Siga $\angle CAE = \angle ABD = \alpha$.

$\angle AFB = \angle CEA = 120^{o}$




Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{AFB}$, $\overset{\Delta}{CEF}$ són semblants.

I de raó 1:2 ja que $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AE} = 2 \cdot \overline{BF} = 2x$.

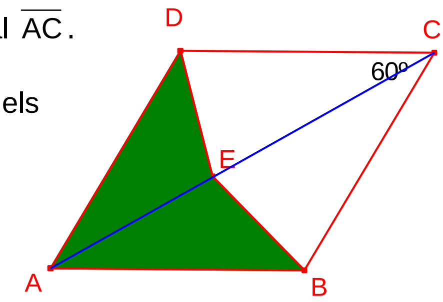
Aleshores, $\overline{AF} = \overline{AE} - \overline{EF} = 2x - x = x$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AFB}$ és isòsceles.

Aleshores, $\alpha = \dfrac{180^{o} - 120^{o}}{2} = 30^{o}$.

$\angle ABC = 60^{o} + \alpha = 60^{o} + 30^{o} = 90^{o}$.

1678.- Considerem el rombe ABCD i el punt E en la diagonal $\overline{AC}$.




Si $\angle BCD = 60º$ i $\overline{CE} = \overline{CD}$, calculeu la raó entre les àrees dels quadrilàters ABED i BCDE.

Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del rombe.

Els triangles $\overset{\Delta}{AED}$ i $\overset{\Delta}{ECD}$. Són equilàters.

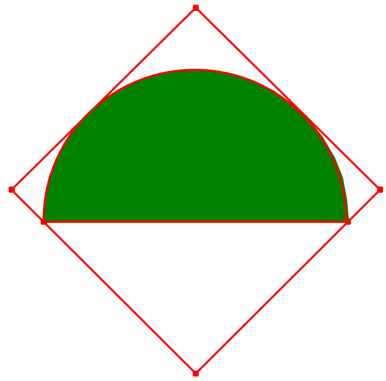
$$\overline{AC} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right) = c\sqrt{3}.$$

La raó entre les àrees dels quadrilàters ABED i BCDE, és igual a la raó entre els triangles $\overset{\Delta}{AED}$ i $\overset{\Delta}{ECD}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{ABED}}{S_{BCDE}} = \frac{S_{ADE}}{S_{ECD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{c\sqrt{3} - c}{c} = \sqrt{3} - 1.$$

1679.- En la figura, un semicercle de radi 1 està inscrit en un quadrat.



El centre del semicercle està en una de les diagonals del quadrat. Determineu l'àrea del quadrat.

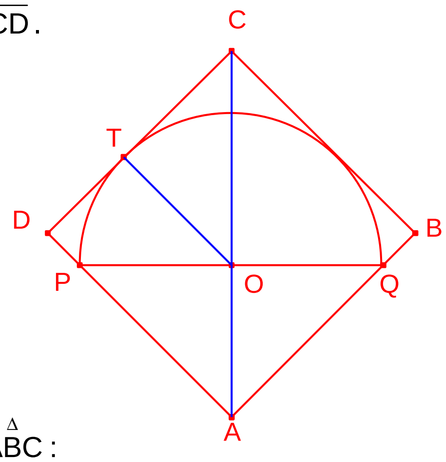
Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siga el semicercle de diàmetre $\overline{PQ} = 2$ i centre O.

$\overline{PQ}$ és perpendicular a $\overline{AC}$.

Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{CD}$.




$\overline{OT} = 1$, $\angle CTO = 90^o$. $\angle TCO = 45^o$.

Aleshores, $\overline{CT} = \overline{OT} = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:

$\overline{OC} = \overline{OT}\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{AOP}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:

$\overline{OA} = \overline{OP} = 1$.

$\overline{AC} = 1 + \sqrt{2}$.

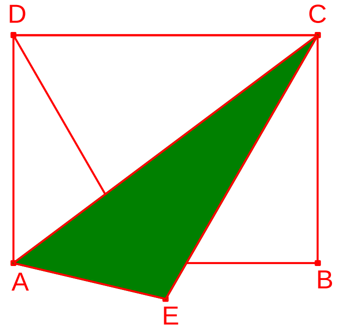
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$c^2 = \overline{AB}^2 = \frac{1}{2}\overline{AC}^2 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

L'àrea del quadrat ABCD és :

$$S_{ABCD} = c^2 = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}.$$

1680.- Siga el rectangle ABCD tal que $\overline{AD} = 6$ i $\overline{DC} = 8$.




Construïm el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CED}$ tal que E, A i B estan en el mateix semiplànol determinat per la recta CD.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$:

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = 10$.

Siga $\alpha = \angle ACB$.

Aleshores, $\angle ACE = \alpha - 30^o$.

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Aplicant la fórmula trigonomètrica l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ és:

$$S_{AEC} = \frac{1}{2} 8 \cdot 10 \cdot \sin(\alpha - 30^o) = 40\left(\frac{4}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5}\frac{1}{2}\right) = 16\sqrt{3} - 12.$$