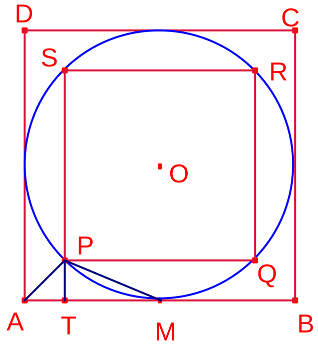
Problemes de Geometria per a l'ESO 17

161.- Siga el quadrat ABCD de centre O. Construïm el quadrat PQRS de costats paral·lels a ABCD amb P en el segment $\overline{AO}$, Q en els segment $\overline{BO}$, R en segment $\overline{CO}$, S en el segment $\overline{DO}$.
Si l'àrea del quadrat ABCD és dues vegades l'àrea del quadrat PQRS i M és el punt mig del costat $\overline{AB}$, calculeu la mesura de l'angle $\angle AMP$.
Olimpiada Argentina Mayo 2004.

Solució:
Siga $\overline{AB} = 1$.
El punt O és centre del quadrat PQRS.
Per ser del quadrat ABCD és dues vegades l'àrea del quadrat PQRS, la mesura del costat $\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{AP} = \overline{AO} - \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Siga T la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$:

$$\overline{AT} = \overline{PT} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AP} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\overline{TM} = \overline{AM} - \overline{AT} = \frac{1}{2} - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Siga $\alpha = \angle AMP$.

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{PT}}{\overline{TM}} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2}-1.$$

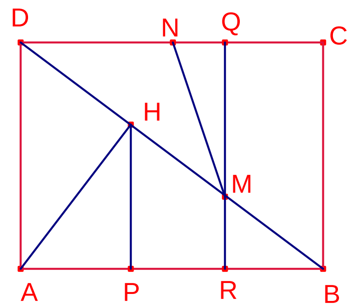
$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{45^{o}}{2} = 22^{o}30'.$$

162.- Siga ABCD un rectangle de costats $\overline{AB} = 4$ i $\overline{BC} = 3$. La perpendicular a la diagonal $\overline{BD}$ traçada per A talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt H. Siga M el punt mig del segment $\overline{BH}$ i N el punt mig del costat $\overline{CD}$. Calculeu la mesura del segment $\overline{MN}$.
Olimpiada Argentina Mayo 2003.

Solució:

Aplicatn l teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{HAD}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:



$\dfrac{\overline{DH}}{3} = \dfrac{3}{5}$, aleshores, $\overline{DH} = \dfrac{9}{5}$

$\overline{HB} = \overline{BD} - \overline{DH} = 5 - \dfrac{9}{5} = \dfrac{16}{5}$.

Siga P la projecció de H sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de M sobre el costat $\overline{CD}$.
Siga R la projecció de M sobre el costat $\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{PBH}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{HP}}{\frac{16}{5}} = \dfrac{3}{5}$. Aleshores, $\overline{HP} = \dfrac{48}{25}$. $\dfrac{\overline{PB}}{\frac{16}{5}} = \dfrac{4}{5}$. Aleshores, $\overline{PB} = \dfrac{64}{25}$.

Els triangles, $\overset{\Delta}{PBH}$, $\overset{\Delta}{RBM}$ són semblants, i la raó és 2:1, aleshores:

$\overline{MR} = \dfrac{\overline{HP}}{2} = \dfrac{24}{25}$. $\overline{QM} = \overline{BC} - \overline{MR} = 3 - \dfrac{24}{25} = \dfrac{51}{25}$.

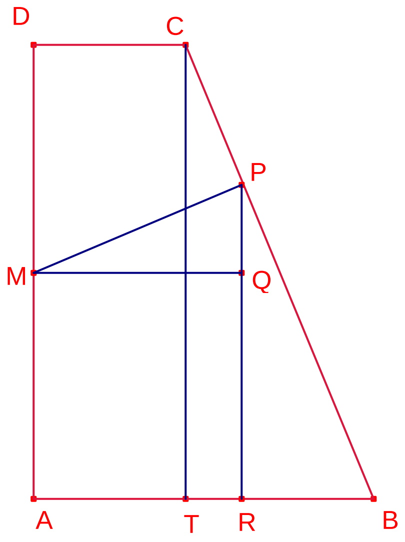
$\overline{RB} = \dfrac{\overline{PB}}{2} = \dfrac{32}{25}$.

$\overline{NQ} = \overline{NC} - \overline{RB} = 2 - \dfrac{32}{25} = \dfrac{18}{25}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQN}$:

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{18}{25}\right)^2 + \left(\frac{51}{25}\right)^2} = \frac{3}{5}\sqrt{13}.$$

163.- Siga el trapezi rectangle ABCD A=90º de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.
Siga $\overline{AB}=45, CD=20, \overline{BC}=65$. Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$, P un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BP}=\overline{AB}$. Calculeu la mesura del segment.
Olimpiada Argentina Mayo 2001.



Solució:
Siga T la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga R la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de M sobre el segment $\overline{PR}$.
$\overline{TB}=\overline{AB}-\overline{CD}=45-20=25$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTB}$:
$\overline{AD}=\overline{CT}=\sqrt{65^2-25^2}=60$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CTB}$, $\overset{\Delta}{PRB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PR}}{45}=\frac{60}{65}$, aleshores, $\overline{PR}=\frac{540}{13}$.

$\frac{\overline{RB}}{45}=\frac{25}{65}$, aleshores, $\overline{RB}=\frac{225}{13}$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQP}$:

$\overline{PQ}=\overline{PR}-\overline{AM}=\frac{540}{13}-30=\frac{150}{13}$.

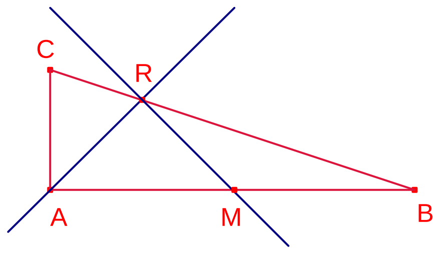
$\overline{MQ}=\overline{AB}-\overline{RB}=45-\frac{225}{13}=\frac{360}{13}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MQP}$:

$$\overline{MP}=\sqrt{\left(\frac{360}{13}\right)^2+\left(\frac{150}{13}\right)^2}=30.$$

164.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{AC} = 1$.
La bisectriu a l'angle recte talla la hipotenusa en R. La perpendicular a AR traçada per R talla el costat $\overline{AB}$ en el punt mig. Calculeu la mesura del costat $\overline{AB}$.
Olimpiada Argentina Mayo 2000.

Solució:



Siga $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$.
Siga $x = \overline{CR}$. Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\frac{x}{1} = \frac{a-x}{c}. \text{ Aleshores, } x = \frac{a}{c+1} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMR}$:

$$\overline{AR} = \frac{\sqrt{2}}{4}c.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ARC}$:

$$\frac{x}{\sin 45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}c}{\sin C}$$

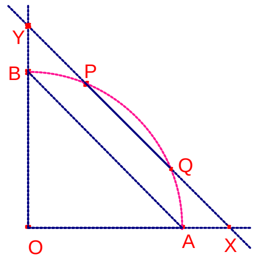
$$\frac{x}{\sin 45^o} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}c}{\frac{c}{a}}.$$

$$x = \frac{a}{4}.$$

Substituint en l'expressió (1):

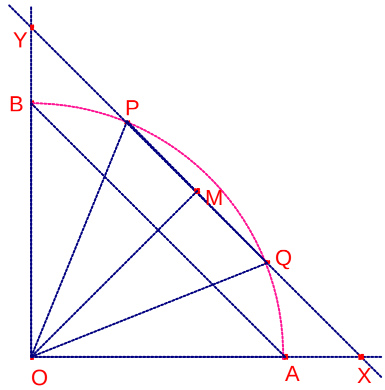
$$\frac{a}{4} = \frac{a}{c+1}. \text{ Aleshores, } c = 3.$$

165.- La figura representa la quarta part d'un cercle de radi 1.



En l'arc $\overset{\frown}{AB}$ es consideren els punts P i Q tal que la recta PQ és paral·lela a la recta AB.
Siguen X i Y els punts d'intersecció de la recta PQ i les rectes OA i OB, respectivament.
Calculeu $\overline{PX}^2+\overline{PY}^2$.
Olimpiada argentina Mayo 1999.

Solució:



El quadrilàter ABPQ és un trapezi isòsceles
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$. $\overline{OM}$ és perpendicular a $\overline{PQ}$.
Siga $x=\overline{PM}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$\overline{OM}=\sqrt{1-x^2}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{OMX}$ és rectangle i isòsceles. Aleshores:

$\overline{MX}=\overline{OM}=\sqrt{1-x^2}$.

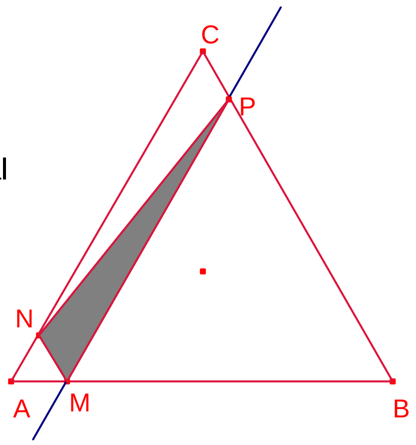
$\overline{PX}=\overline{PM}+\overline{MX}=\sqrt{1-x^2}+x$. $\overline{PY}=\overline{YM}-\overline{PM}=\sqrt{1-x^2}-x$.

$\overline{PX}^2+\overline{PY}^2=\left(\sqrt{1-x^2}+x\right)^2\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)^2=2$.

166.- $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter. N és un punt del costat $\overline{AC}$ tal que $\overline{AC} = 7 \cdot \overline{AN}$, M és un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{MN}$ és paral·lel a $\overline{BC}$, i P és un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{MP}$ és paral·lel a $\overline{AC}$. Calculeu $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}}$, la proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{MNP}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$.

Olimpiada Argentina Mayo 1998.

Solució:



En dues figures semblants, les seues àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança.

Com que $\overline{AC} = 7 \cdot \overline{AN} = 7 \cdot \overline{AM}$ aleshores, $\overline{MB} = 6 \cdot \overline{AM}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMN}$, $\overset{\Delta}{MBP}$ són equilàters, per tant semblants.

$S_{MBP} = 6^2 \cdot S_{AMN} = 36 \cdot S_{AMN}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMN}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són equilàters, per tant semblants.

$S_{ABC} = 7^2 \cdot S_{AMN} = 49 \cdot S_{AMN}$.

Considerem el paral·lelogram MNCP.

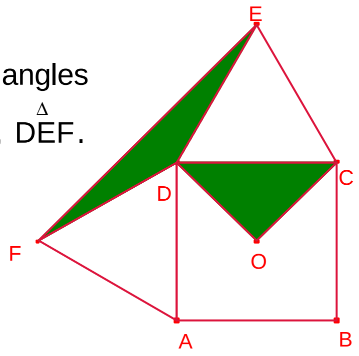
$S_{MNCP} = S_{ABC} - (S_{AMN} + S_{MBP}) = (49 - (1 + 36))S_{AMN} = 12 \cdot S_{AMN}$

$S_{MNP} = \dfrac{1}{2} S_{MNCP} = 6 \cdot S_{AMN}$.

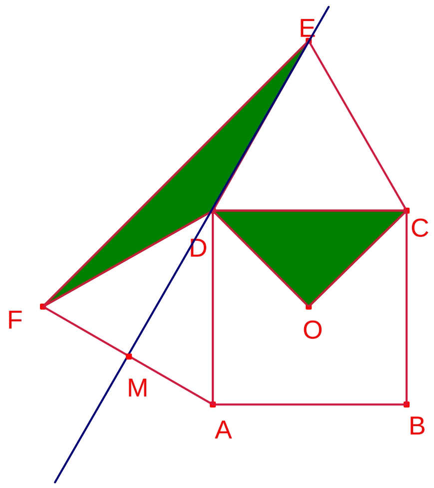
La proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{MNP}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \dfrac{6 \cdot S_{AMN}}{49 \cdot S_{AMN}} = \dfrac{6}{49}$.

167.- Siga el quadrat ABCD de centre O.
Sobre els costats $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ i exterior al quadrat es dibuixen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{CED}$ i $\overset{\Delta}{ADF}$. Compareu les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{CDO}$, $\overset{\Delta}{DEF}$.
Olimpiada Argentina Mayo 1998.



Solució:



Siga $a=\overline{AB}$ costat del quadrat.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDO}$ és la quarta part de l'àrea del quadrat ABCD.

$S_{CDO}=\frac{1}{4}a^2$.

$\angle EDF=150^o$.
La recta DE talla el segment $\overline{AF}$ en el punt M.
$\angle FDM=30^o$.

Aleshores, M és el punt mig del costat $\overline{AF}$ del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADF}$.
$\angle FMD=90^o$.

Aleshores, $\overline{FM}$ és altura del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ sobre el costat $\overline{DE}$.

$S_{DEF}=\frac{\overline{DE}\cdot\overline{FM}}{2}=\frac{1}{4}a^2$.

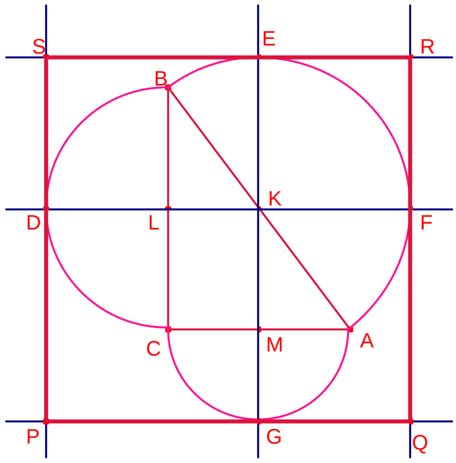
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CDO}$, $\overset{\Delta}{DEF}$ tenen igual àrea.

168.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90º$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$.
Es dibuixen tres semicircumferències exteriors al triangle de diàmetres $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$.
Dibuixem la tangent a la semicircumferència de diàmetre $\overline{AC}$ que és paral·lela a $\overline{AC}$.
Dibuixem la tangent a la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ que és paral·lela a $\overline{AC}$.
Dibuixem la tangent a la semicircumferència de diàmetre $\overline{BC}$ que és paral·lela a $\overline{BC}$.
Dibuixem la tangent a la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ que és paral·lela a $\overline{BC}$.
Les quatre rectes tangents determinen un rectangle. Calculeu el perímetre del rectangle.

Solució:

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ rectangle i els catets $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ les quatre rectes tangents (paral·leles dos a dos als catets) formen un rectangle.

Els centres de les 3 semicircumferències són els centres dels costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, K, L, M.



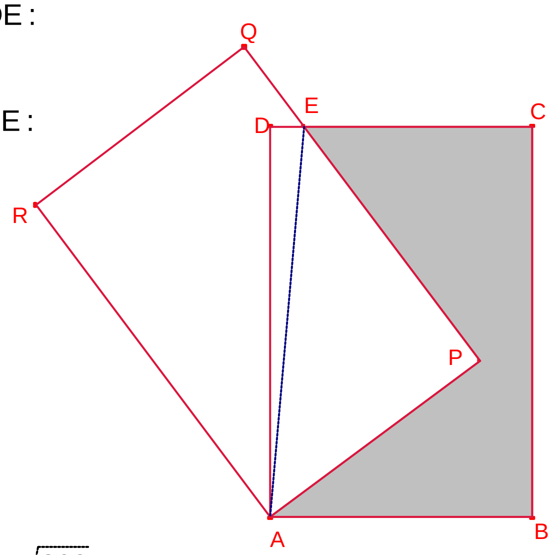
Siguen D, E, F, G els punts de tangència (veure figura)
Els punts D, L, K, F estan alineats.
Els punts GMKE estan alineats.
$\overline{LK} = 3$ ja que és paral·lela mitjana del triangle.
$\overline{KM} = 4$ ja que és paral·lela mitjana del triangle.

Siga PQRS el rectangle que formen les tangents.
$\overline{PQ} = \overline{DL} + \overline{LK} + \overline{KF} = 4 + 3 + 5 = 12$
$\overline{PS} = \overline{GM} + \overline{KM} + \overline{KE} = 3 + 4 + 5 = 12$.

PQRS és un quadrat de costat 12, aleshores el seu perímetre és 48.

169.- Siguen dos rectangles iguals ABCD i APQR, tal que P està en l'interior del rectangle ABCD i el costat $\overline{PQ}$ del rectangle APQR intersecta el costat $\overline{CD}$ en el punt E.
Si $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AP}=\overline{QR}=8$, $\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{AR}=\overline{PQ}=12$ i $\overline{DE}=1$.
Determineu l'àrea del polígon ABCEP.
Olimpiada Mercosur, 1997.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{AE}^2=12^2+1^2=145$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APE}$:

$\overline{PE}^2=8^2+\overline{AE}^2$.

$\overline{PE}^2=64+145=209$.

$\overline{PE}=\sqrt{209}$.

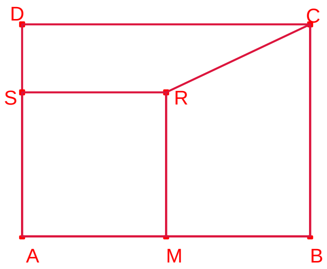
Calculem les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{APE}$.

$$S_{ADE}=\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DE}}{2}=6.$$

$$S_{APE}=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{PE}}{2}=4\sqrt{209}.$$

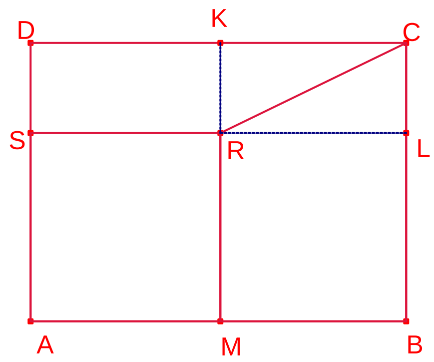
Calculem l'àrea del polígon ABCEP:

$$S_{ABCEP}=S_{ABCD}-(S_{ADE}+S_{APE})=96-\left(6+4\sqrt{209}\right)=90-4\sqrt{209}.$$



170.- En la figura ABCD és un rectangle AMRS és un quadra, M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
L'àrea del rectangle ABCD és 224cm^2, l'àrea de SRCD és 72cm^2 i el perímetre de SRCD és de 40cm.
Calculeu l'àrea i el perímetre de MBCR.
Olimpiada Argentina Ñandú.

Solució:



Siga $x=\overline{AM}=\overline{MB}=\overline{AS}$. Siga $y=\overline{SD}$.
$\overline{AB}=2x$, $\overline{BC}=x+y$.
Siga K la projecció de R sobre el costat $\overline{CD}$.
Siga L la projecció de R sobre el costat $\overline{BC}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KRC}$:
$\overline{RC}=\sqrt{x^2+y^2}$.
El perímetre del trapezi SRCD és:

$$P_{SRCD}=\overline{SR}+\overline{RC}+\overline{CD}+\overline{SD}=x+\sqrt{x^2+y^2}+x+y+x=3x+y+\sqrt{x^2+y^2}=40.$$

El perímetre del trapezi MBCR és:

$$P_{MBCR}=\overline{MB}+\overline{BC}+\overline{RC}+\overline{MR}=x+x+y+\sqrt{x^2+y^2}+x=3x+y+\sqrt{x^2+y^2}=40\text{cm}.$$

L'àrea del rectangle ABCD és:

$$S_{ABCD}=2x(x+y)=2x^2+2xy=224.$$

$$x^2+xy=112 \qquad (1)$$

L'àrea del trapezi SRCD és:

$$S_{SRCD}=\frac{2x+x}{2}y=72.$$

$$3xy=144$$

$$xy=48 \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$x^2=64 \qquad (3)$$

L'àrea del trapezi SRCD és:

$$S_{MBCR}=\frac{x+y+x}{2}x.$$

$$S_{MBCR}=\frac{2x^2+xy}{2} \qquad (4)$$

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (4):

$$S_{MBCR}=\frac{2\cdot 64+48}{2}=88\text{cm}^2.$$

Notem que $\begin{cases} x=8 \\ y=6 \end{cases}$ satisfan totes les condicions del proposicions del problema.