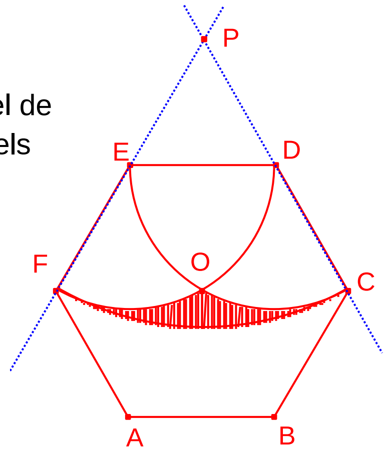
Problemes de Geometria per a l'ESO 170

1691.- Donat l'hexàgon regular ABCDEF de costat 1 i centre O.
Les rectes FE i CD és tallen en el punt P.
Es dibuixen tres arcs: el de centre P que passa pels punts F, C, el de centre E que passa pels punts F, D, i el de centre D que passa pels punts C, E.
Determineu l'àrea i el perímetre de la zona afitada pels tres arcs.

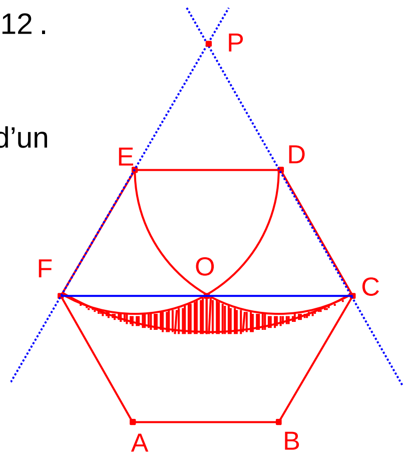


Solució:

$\overline{PF} = 2$, $\angle FPC = 60^\circ$.

L'àrea de la regió afitada pels tres arcs és igual a l'àrea del segment circular de radi 2 i angle 60º menys la suma de les àrees de dos segments circulars de radi 1 i 60º:

$$S_{ombrejada} = \left(\frac{1}{6}\pi\cdot 2^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}2^2\right) - 2\left(\frac{1}{6}\pi\cdot 1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.1812\,.$$

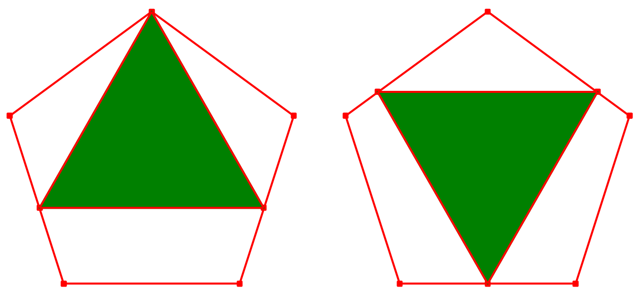


El perímetre de la zona afitada pels tres arcs és iguals a la suma d'un arc de radi 2 i angle 60º i dos arcs de radi 1 i 60º:

$$P_{ombrejada} = \left(\frac{1}{6}2\pi\cdot 2\right) + 2\left(\frac{1}{6}2\pi\cdot 1\right) = \frac{4}{3}\pi \approx 4.1888\,.$$

1692.- En dos pentàgons regulars de costat 1 s'han inscrit dos triangles equilàters (veure figura).

Determineu el costat de cadascun dels triangles equilàters.



Solució:

a)

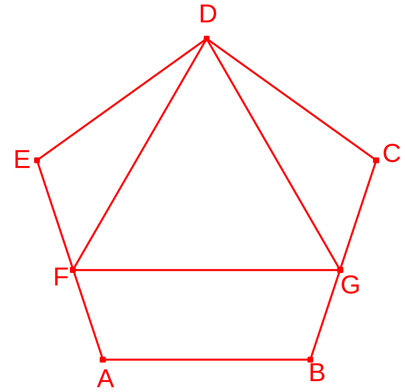
Siga $\overline{DF} = x$ costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{DFG}$.

$\angle DEF = 108^o$, $\angle EDF = \dfrac{108^o - 60^o}{2} = 24^o$, $\angle EFD = 48^o$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{DEF}$:

$\dfrac{x}{\sin 108^o} = \dfrac{1}{\sin 48^o}$. Resolent l'equació:

$x = \dfrac{\sin 108^o}{\sin 48^o} \approx 1.2797727760$.



b)

Siga $\overline{KL} = y$ costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.

M és el punt mig del costat $\overline{AB}$.

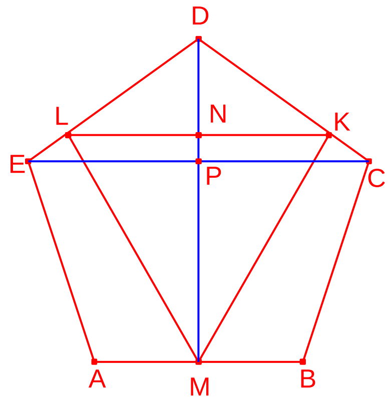
Siga N el punt mig del costat $\overline{KL}$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{EC}$.

$\overline{MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} y$.

$\overline{CE} = \overline{BD} = \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$\angle DAB = 72^o$, $\angle DEC = 36^o$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$\overline{MD} = \Phi \cdot \sin 72^o$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPD}$: $\overline{DP} = \sin 36^o$.

Els triangles $\overset{\Delta}{LKD}$, $\overset{\Delta}{ECD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

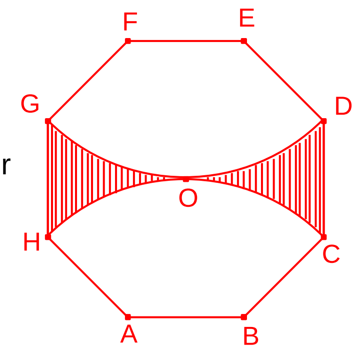
$\dfrac{\overline{KL}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{MD} - \overline{MN}}{\overline{DP}}$.

$\dfrac{y}{\Phi} = \dfrac{\Phi \cdot \sin 72^o - \dfrac{\sqrt{3}}{2} y}{\sin 36^o}$. Resolent l'equació:

$y = \dfrac{\Phi^2 \cdot \sin 72^o}{\sin 36^o + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Phi} \approx 1.2518066704$.

Aleshores, és més gran el triangle $\overset{\Delta}{DFG}$ que el triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.

1693.- Donat l'octògon regular ABCDEFGH de costat 1 i centre O, es dibuixen dos arcs: el que passa pels punts G, O, D i el que passa pels punts H, O, C.



Determineu l'àrea i el perímetre de la zona afitada pels dos arcs interior a l'octògon.

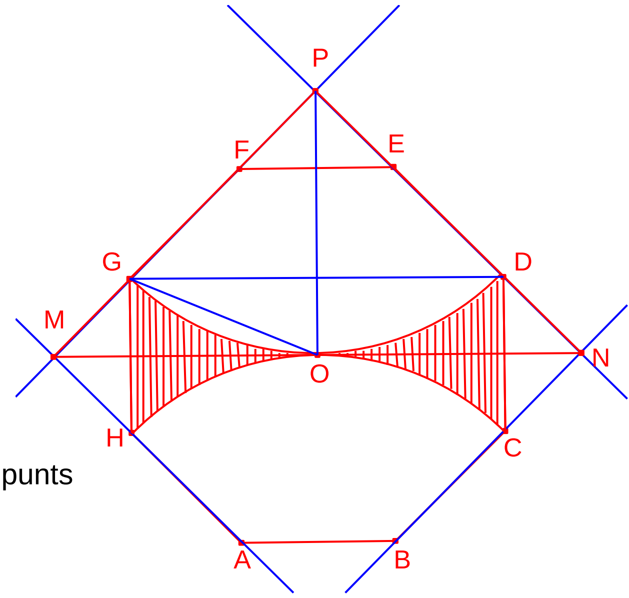
Solució:
Siga P el centre de l'arc que passa pels punts G, O, D.

P pertany a la mediatriu del segment $\overline{DG}$.

P pertany a la mediatriu del segment $\overline{OG}$, $\overline{PG} = \overline{PO}$.

Notem que $\angle GOP = \frac{135^o}{2}$, $\angle PGO = \frac{135^o}{2}$.

$\angle FGO = \frac{135^o}{2}$.



Aleshores, P, E; G estan alineats.
Per tant, P és la intersecció de les rectes GF,DE.
$\angle FPE = 90^o$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{EPF}$:

$\overline{PF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

La mediatriu al costat $\overline{CD}$ talla les rectes GE, De en els punts M, N, respectivament.

$\overline{GM} = \overline{PF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{PG} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, $\overline{PM} = 1+\sqrt{2}$.

La meitat de l'àrea de la regió ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{MPN}$ menys un quadrat de radi $\overline{PG} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, menys l'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{EPF}$.

L'àrea ombrejada és:

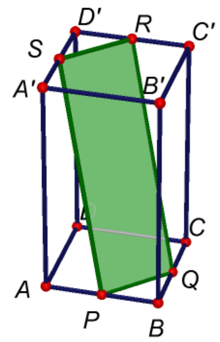
$$S_{ombrejada} = 2\left(S_{MPN} - S_{quadrant} - S_{EPF}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\pi\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)$$

$$S_{ombrejada} = \frac{5+4\sqrt{2}}{2} - \frac{3+2\sqrt{2}}{4}\pi.$$

El perímetre de la regió ombrejada és igual a la suma de dos costats de l'octògon regular i 2 arcs de 90º i de radi $\overline{PG} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$:

$$P_{ombrejada} = 2 + \frac{1}{2}2\pi\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \frac{2+\sqrt{2}}{2}\pi.$$

1694.- Siga ABCDA'B'C'D' el prima recte regular de base quadrada d'aresta 1 i altura 2.



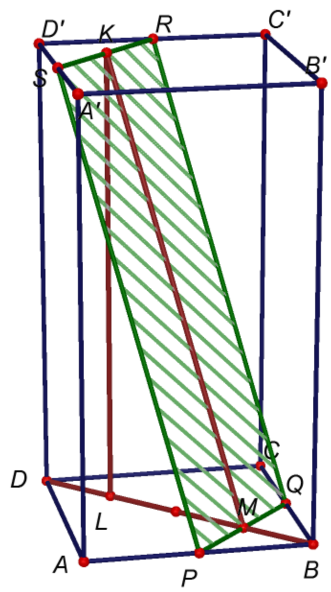
Siguen P, Q, R, S els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{C'D'}$ i $\overline{A'D'}$, respectivament..
Determineu l'àrea del rectangle PQRS.

Solució:

$\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BAD}$:

$\overline{BD}=\sqrt{2}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$, K el punt mig del segment $\overline{RS}$.
Siga L la projecció de K sobre la base ABCD.

$\overline{DL}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\overline{LM}=\overline{BD}-2\cdot\overline{BM}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

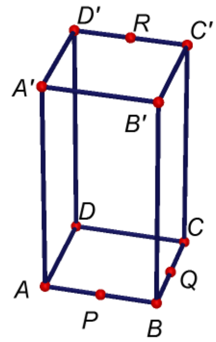
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$\overline{KM}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

L'àrea del rectangle PQRS és:

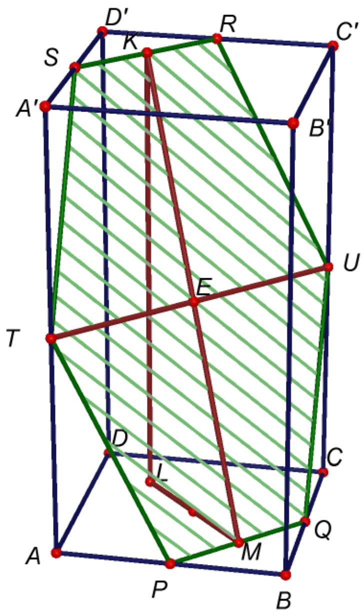
$S_{PQRS}=\overline{PQ}\cdot\overline{KM}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$.

1695.- Siga ABCDA'B'C'D' el prima recte regular de base quadrada d'aresta 1 i altura 2.



Siguen P, Q, R els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, I $\overline{C'D'}$, respectivament..
Determineu l'àrea de La secció del prisma determinada pel plànol PQR

Solució:
La secció determinada pels punts P, Q, R és l'hexàgon PQURST, tal que U és el punt mig de l'aresta $\overline{CC'}$, S és el punt mig de l'aresta $\overline{A'D'}$ i T és el punt mig de l'aresta $\overline{AA'}$.



$\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=\overline{TU}=\overline{BD}=\sqrt{2}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$, K el punt mig del segment $\overline{RS}$.

Siga L la projecció de K sobre la base ABCD.

$\overline{DL}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\overline{LM}=\overline{BD}-2\cdot\overline{BM}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$$\overline{KM}=\sqrt{2^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

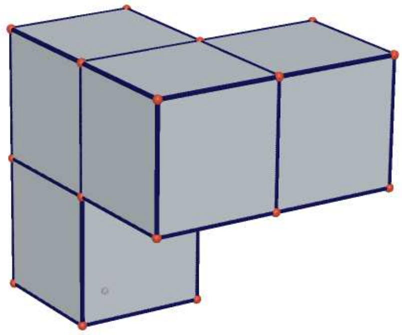
Siga E el punt mig del segment $\overline{TU}$.

$\overline{ME}=\frac{1}{2}\overline{KM}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

L'àrea de la secció és igual al doble de l'àrea del trapezi PQUT:

$$S_{PQURST}=2\left(\frac{\overline{PQ}+\overline{TU}}{2}\overline{ME}\right)=2\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}}{2}\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{9}{4}.$$

1966.- La figura està formada per cubs d'aresta 1.
Determineu la seua superfície.

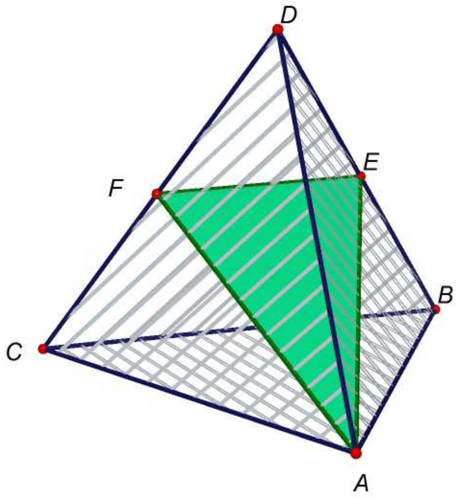


Solució:
Les 6 vistes del cos està format per tres quadrats de costat 1.
L'àrea del cos és:
$S_{cos} = 6 \cdot 3 = 18$.

1697.- Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta 2.

Siguen E i F els punts migs de les arestes $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$, respectivament.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.



Solució:

$\overline{EF}$ és paral·lela mitjana de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$, aleshores:

$\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{BC}=1.$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFC}$:

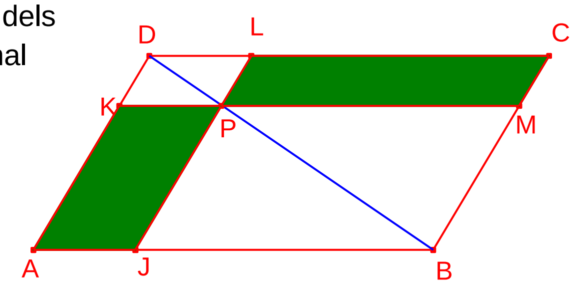
$\overline{AF}=\overline{AE}=\sqrt{3}$.

Utilitzant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:

$$S_{AEF}=\frac{\sqrt{\left(2\sqrt{3}+1\right)\cdot 1\cdot 1\cdot\left(2\sqrt{3}\right)-1}}{4}=\frac{\sqrt{11}}{4}.$$

1698.- En qualsevol paral·lelogram els complements dels paral·lelograms construïts sobre un punt de la diagonal tenen la mateixa àrea

Proposició I43 Euclides.



Solució:
Siga ABCD un paral·lelogram.
Siga P un punt de la diagonal $\overline{BD}$.
Pel punt P tracem paral·leles al costat del paral·lelogram es formen els paral·lelograms AJPK i PMCL.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{CDB}$ són iguals, aleshores, tenen la mateixa àrea.

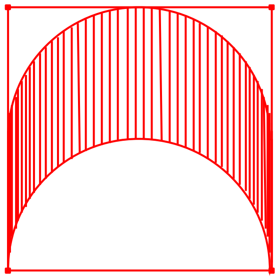
Els triangles $\overset{\Delta}{KPD}$, $\overset{\Delta}{LDP}$ són iguals, aleshores, tenen la mateixa àrea.

Els triangles $\overset{\Delta}{JBP}$, $\overset{\Delta}{MPB}$ són iguals, aleshores, tenen la mateixa àrea.

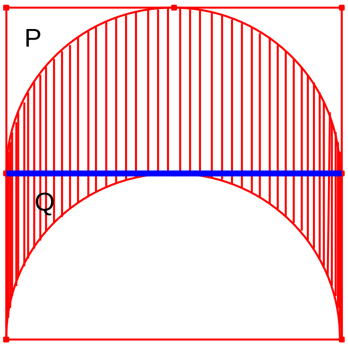
$$S_{AJPK} = S_{ABD} - (S_{KPD} + S_{JBP}) = S_{CDB} - (S_{LDP} + S_{MPB}) = S_{PMCL}.$$

1699.- En un quadrat de costat c s'han dibuixat dos arcs (semicircumferències) de diàmetre el costat d'un quadrat.

Calculeu l'àrea de la regió afitada pels dos arcs.

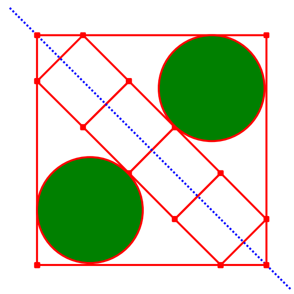


Solució:



L'àrea ombrejada és igual a la meitat de l'àrea del quadrat.

1700.- El costat del quadrat gran de la figura, mesura 10 cm.



Quatre quadrats iguals són simètrics respecte del diàmetre del quadrat gran.
Calculeu el radi dels cercles.

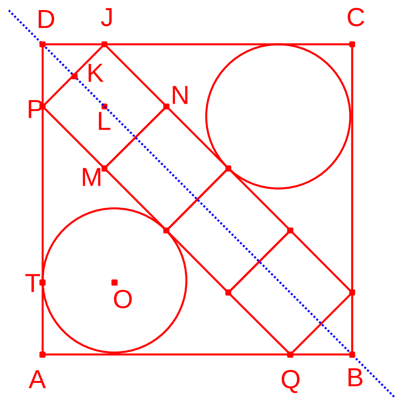
Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c = 10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAB}$:

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$

Siga L el centre del quadrat JPMN.



Siga K el punt mig del costat $\overline{PJ}$.

Notem que $\overline{DK} = \overline{KL} = \overline{PK}$, aleshores:

$\overline{BD} = 10 \cdot \overline{DK}$, Per tant:

$$\overline{DK} = \frac{c}{10}\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DKP}$:

$$\overline{DP} = \overline{DK} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{5}c.$$

$$\overline{AP} = c - \frac{1}{5}c = \frac{4}{5}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAQ}$:

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \cdot \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}c.$$

Siga $\overline{OT} = r$ el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAQ}$.

$$r = \frac{2\overline{AP} - \overline{PQ}}{2} = \frac{\frac{8}{5}c - \frac{4\sqrt{2}}{5}c}{2} = \frac{2}{5}\left(2 - \sqrt{2}\right)c.$$

Si $c = 10$, $r = 4\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 2.34\text{cm}$.