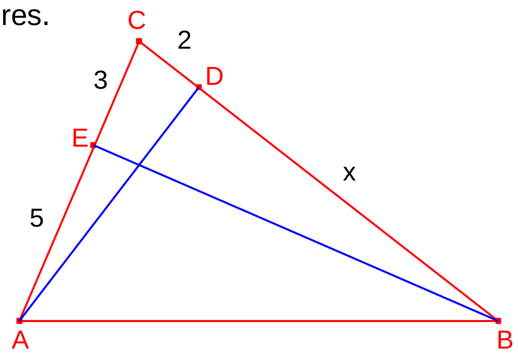
Problemes de Geometria per a l'ESO 171

1701.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle acutangle i $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ les altures.
Si $\overline{AE}=5$, $\overline{CE}=3$, $\overline{CD}=2$.
Determineu $\overline{BD}$.



Solució:
Siga $\overline{BD}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:
$\overline{AD}=2\sqrt{15}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CEB}$:
$\overline{BE}=\sqrt{(2+x)^2-3^2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AD}.$$

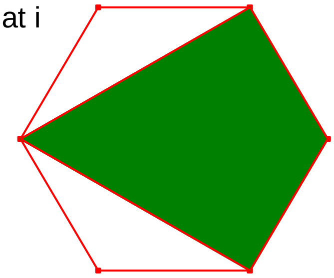
$$2\sqrt{15}(2+x)=8\sqrt{(2+x)^2-9}.$$

Resolent l'equació:
$x=10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(2\sqrt{15}\right)^2+10^2}=4\sqrt{10}.$$

1702.- Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter ombrejat i l'àrea de l'hexàgon regular.

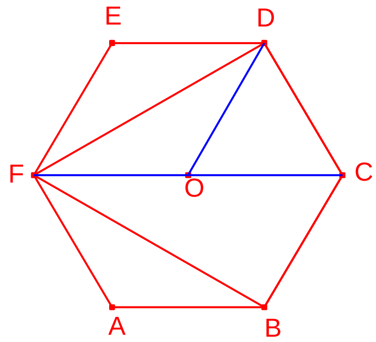


Solució:

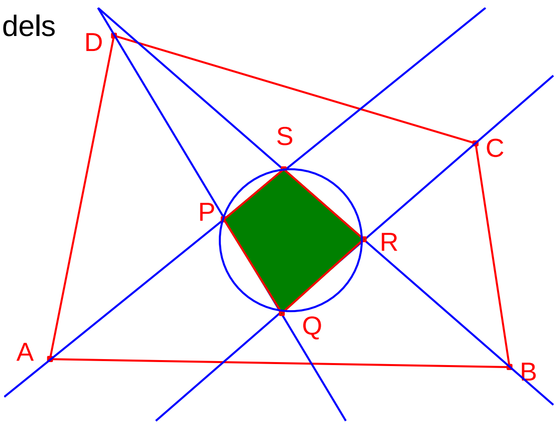
Siga ABCDEF l'hexàgon regular de centre O.

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{FED}$, $\overset{\Delta}{FOD}$ i $\overset{\Delta}{OCD}$ són iguals.

$$\frac{S_{BCDF}}{S_{ABCDEF}}=\frac{S_{CDF}}{S_{CDEF}}=\frac{2}{3}.$$



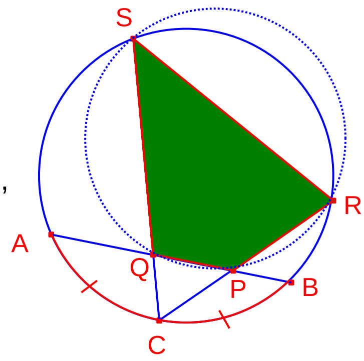
1703.- En el quadrilàter ABCD és dibuixen les bisectrius dels vèrtexs.



La intersecció dos a dos de les bisectrius formen el quadrilàter PQRS.
Proveu que el quadrilàter PQRS és inscriptible en una circumferència.

Solució:
La suma dels angles d'un quadrilàter convex és 360º:
$A+B+C+D=360^{o}$.
Provarem que els angles oposats del quadrilàter PQRS són suplementaris, aleshores, pel teorema de Tolomeu és inscriptible.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABS}$.
$\angle ASB=180^{o}-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)$.
Considerem el triangle $\overset{\Delta}{CDQ}$.
$\angle CQD=180^{o}-\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right)$.
Vegem que són suplementaris:
$\angle ASB+\angle CQD=180^{o}-\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)+180^{o}-\left(\frac{C}{2}+\frac{D}{2}\right)=360^{o}-\left(\frac{A+B+C+D}{2}\right)=180^{o}$.



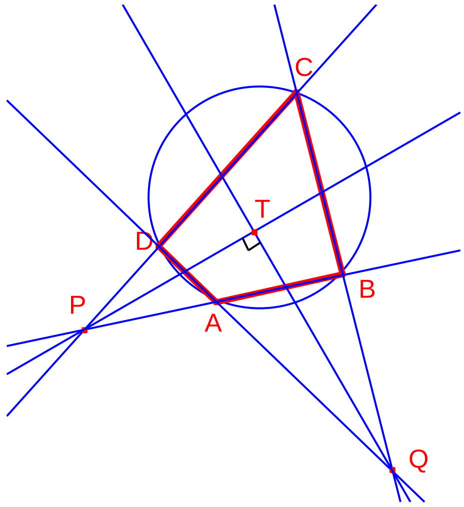
1704.- Siga $\overline{AB}$ una corda d'una circumferència.

Siga C el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Dibuixem les cordes $\overline{CR}$, $\overline{CS}$ que tallen la corda $\overline{AB}$ en els punts P, Q, respectivament.
Proveu que el quadrilàter PRSQ és inscriptible en una circumferència.

Solució:
Provarem que els angles oposats del quadrilàter PQRS són suplementaris, aleshores, pel teorema de Tolomeu és inscriptible.

Siguen $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} = 2\alpha$, $\overset{\frown}{AS} = 2\beta$.

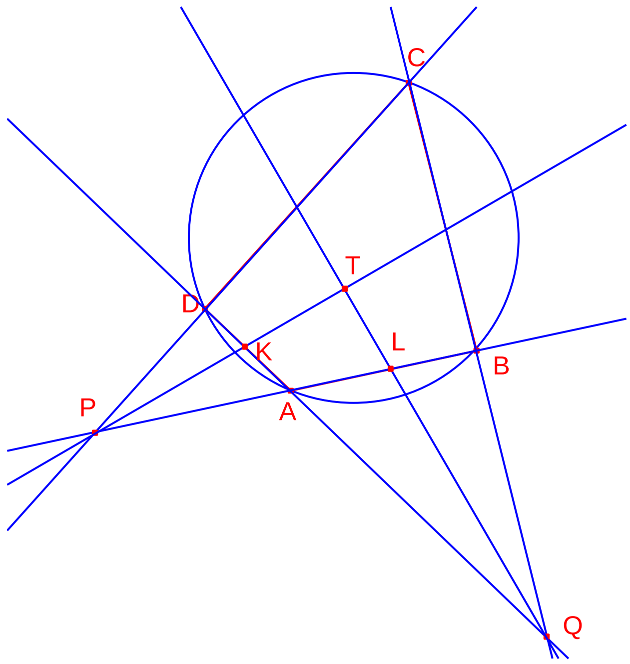
Per ser $\angle AQS$ angle interior a la circumferència mesura la semisuma dels arcs que abraça:
$\angle AQS = \alpha + \beta$, aleshores, $\angle SQP = 180º - (\alpha + \beta)$.
Per ser $\angle SRC$ angle inscrit a la circumferència mesura la meitat de l'arc que abraça:
$\angle SRP = \alpha + \beta$.
Aleshores, els angles oposats del quadrilàter PQRS són suplementaris.



1705.- Siga ABCD un polígon inscrit en una circumferència.

Les rectes AB i CD és tallen en P
Les rectes AD i BC és tallen en Q.
Proveu que les bisectrius dels angles $\angle CPB$ i $\angle CQD$ són perpendiculars.

Solució:



Siguen $\overset{\frown}{AB}=2\alpha$, $\overset{\frown}{BC}=2\beta$, $\overset{\frown}{CD}=2\gamma$ $\overset{\frown}{AD}=2\delta$.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=180^o$.

Els angles inscrits mesuren la meitat de l'arc que abracen, aleshores:

$A=\beta+\gamma$, $B=\gamma+\delta$, $C=\alpha+\delta$, $D=\alpha+\beta$.

Per ser P angle exterior a la circumferència mesura la semidiferència dels arcs que abraça:

$\angle BPC=\beta-\delta$

$\angle PDA=180^o-D=180^o-(\alpha+\beta)$.

Per ser Q angle exterior a la circumferència mesura la semidiferència dels arcs que abraça:

$\angle CQD=\gamma-\alpha$.

$\angle QBA=180^o-B=180^o-(\gamma+\delta)$.

La bisectriu a l'angle $\angle BPC$ talla el costat $\overline{AD}$ en el punt K.

$$\angle TKA=\angle PKD=180^o-\left(\frac{1}{2}\angle BPC+\angle PDA\right)=180^o-\left(\frac{\beta-\delta}{2}+180^o-(\alpha+\beta)\right)=\frac{2\alpha+\beta+\delta}{2}.$$

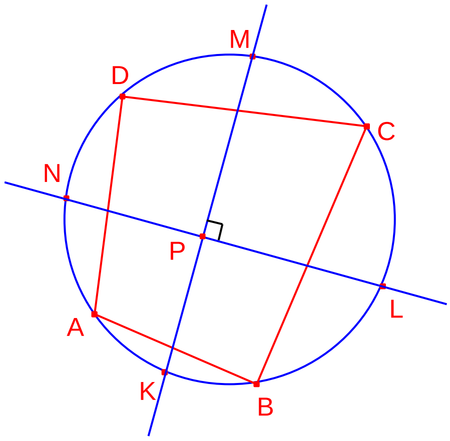
La bisectriu a l'angle $\angle CQD$ talla el costat $\overline{AB}$ en el punt L.

$$\angle TLA=\angle QLB=180^o-\left(\frac{1}{2}\angle CQD+\angle QBA\right)=180^o-\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}+180^o-(\gamma+\delta)\right)=\frac{\alpha+\gamma+2\delta}{2}.$$

$$\angle KTL=360^o-(A+\angle TKA+\angle TLA)=360^o-\left(\beta+\gamma+\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{2}+\frac{\alpha+\gamma+2\delta}{2}\right)=$$

$$=360^o-\frac{3(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}{2}=90^o.$$

1706.- Siga ABCD un quadrat inscrit en una circumferència.



Siguen K, L, M, N els punts migs dels arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AD}$, respectivament.

Proveu que les rectes KM i LN són perpendiculars.

Solució:

Siguen $\overset{\frown}{AB}=4\alpha$, $\overset{\frown}{BC}=4\beta$, $\overset{\frown}{CD}=4\gamma$ $\overset{\frown}{AD}=4\delta$.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=90^{o}$.

Siga P la intersecció de les rectes KM i LN.

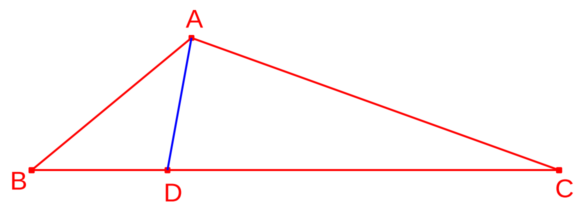
Per ser $\angle KPL$ interior a la circumferència mesura la semisuma dels arcs que abraça:

$$\angle KPL=\frac{2\alpha+2\beta+2\beta+2\delta}{2}=\alpha+\beta+\gamma+\delta=90^{o}\ .$$

1707.- Quins triangles obtusangles acompleixen que al traçar una recta pel vèrtex obtús divideixen el triangle en dos triangles isòsceles.

Hi ha algun d'ells que ho puga fer de forma diferent amb dues rectes que passen pel vèrtex obtús?.
KöMaL, C1308.

Solució:



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A > 90^{o}$.

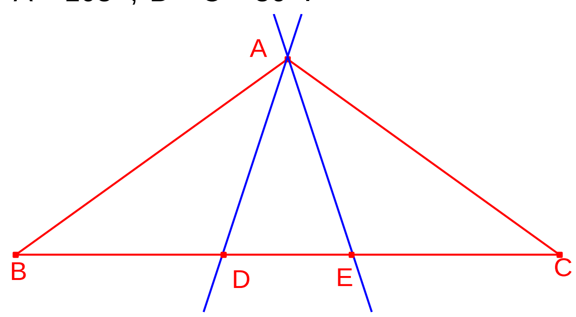
Siga D del costat $\overline{BC}$ tal que $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles $\angle BAD = B$.
$\angle ADC = 2B$.
$\overset{\Delta}{ADC}$ ha de ser isòsceles:

Cas 1:
Suposem que $\angle CAD = C$.

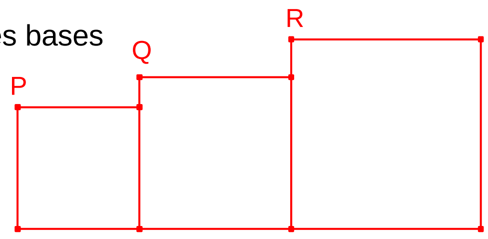
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és 180º:
$C + 2B + C = 180^{o}$, La qual cosa és absurda ja que $B + C < 90^{o}$.

Cas 2:
Suposem que $\angle CAD = \angle ADC = 2B$.
Aleshores, $A = \angle BAD + \angle CAD = B + 2B = 3B$.
Aleshores, $B = \frac{1}{3}A$, $C = 180^{o} - 4B = 180^{o} - \frac{4}{3}A$.

Hi haurà un triangle que tinga dues rectes solució si el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles:
És a dir si $B = C$:
$\frac{1}{3}A = 180^{o} - \frac{4}{3}A$. Resolent l'equació:
Si $A = 108^{o}$, $B = C = 36^{o}$.

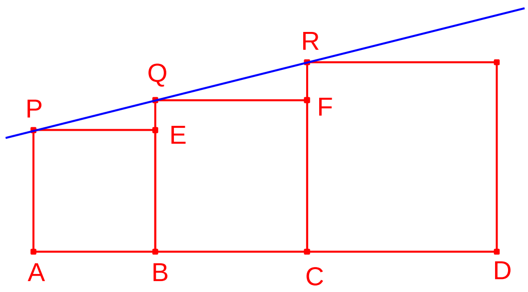


1708.- En la figura hi ha 3 quadrats adossats que tenen les bases alineades i els punts P, Q, R alineats.

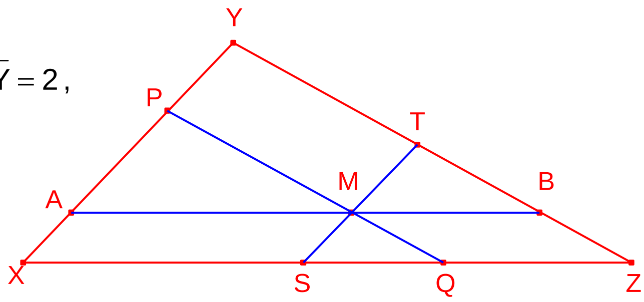


Si el costat quadrat del mig mesura 8cm que el quadrat menut i el costat mesura 50cm.
Determineu la mesura del quadrat menut.
UKMT. Senior Mathematical Challenge 2015.

Solució:
Siga $\overline{AB}=\overline{BE}=x$ costat del quadrat menut.
Siga $\overline{BC}=\overline{BQ}=\overline{CF}=x+8$ costat del quadrat mitjà.
Siga $\overline{CD}=\overline{CR}=50$ costat del quadrat gran.
Aleshores, $\overline{QE}=8$, $\overline{RF}=50-(x+8)=42-x$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PEQ}$, $\overset{\Delta}{QFR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{8}{x}=\frac{42-x}{x+8}$. Resolent l'equació:
$x=2,32$.
El problema té dues solucions.



1709.- En la figura, el triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$ té costats $\overline{XY}=2$, $\overline{YZ}=3$, $\overline{XZ}=4$.
M és un punt interior al triangle tal que els segments AMB, PMQ i SMT són paral·lels als costats $\overline{XZ}$, $\overline{YZ}$, $\overline{XY}$, respectivament i $\overline{AP}=\overline{BT}=\overline{QS}$.

Determineu la mesura del segment $\overline{AP}$.

UKMT. Senior Mathematical Challenge 2015.

Solució:

Siga $\overline{AP}=\overline{QS}=\overline{TB}=x$.

Siga $\overline{AS}=\overline{AM}=y$.

$\overline{QZ}=4-(x+y)$.

Els triangles $\overset{\Delta}{XYZ}$, $\overset{\Delta}{APM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{4} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{XYZ}$, $\overset{\Delta}{MBT}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

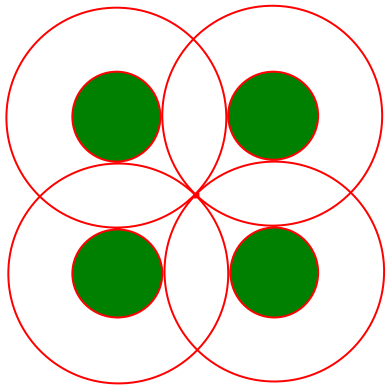
$$\frac{x}{4-(x+y)}=\frac{3}{4} \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{x}{y}=\frac{2}{4} \\ \frac{x}{4-(x+y)}=\frac{3}{4} \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=\frac{12}{13} \\ y=\frac{24}{13} \end{cases}.$$

1710.- El diagrama mostra 8 circumferències de dues mides diferents. Les circumferències estan disposades en parells concèntriques de manera que formen els centres un quadrat. Cada circumferències gran toca un altra circumferència gran i dues circumferències menudes. Les circumferències grans tenen radi 1. Determineu el radi de la circumferència menuda.



UKMT. Senior Mathematical Challenge 2015.

Solució:

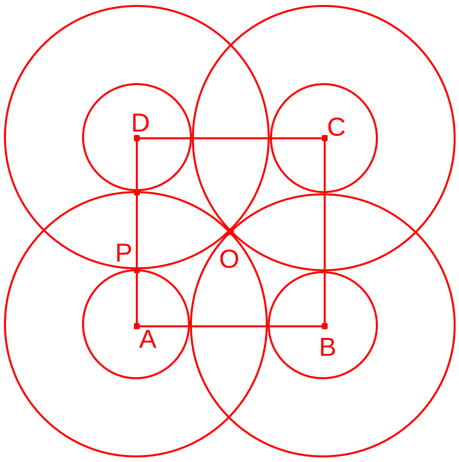
Siga ABCD el quadrat que formen els centres de les circumferències grans.

Siga O el centre del quadrat.

Siga $\overline{AP} = x$ radi de la circumferència menuda.

$\overline{AD} = \overline{AB} = 1 + x$.

$\overline{BD} = 2$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$2(1+x)^2 = 2^2$.

Resolent l'equació:

$x = \sqrt{2} - 1$.