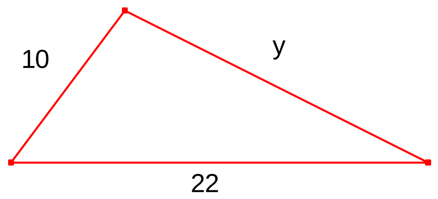
Problemes de Geometria per a l'ESO 172

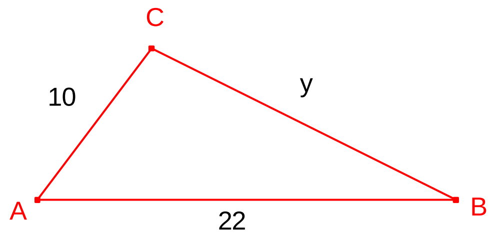
1711.- En la figura, l'àrea del triangle és 88.
Calculeu el valor y.
UKMT. Senior Mathematical Challenge 2015.



Solució:

Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=22$, $\overline{AC}=12$, $\overline{BC}=y$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 88:



$S_{ABC}=\frac{1}{2}10\cdot 22\cdot \sin A=88$. Resolent l'equació:

$\sin A=\frac{4}{5}$.

Aleshores, $\cos A=\frac{3}{5}$.

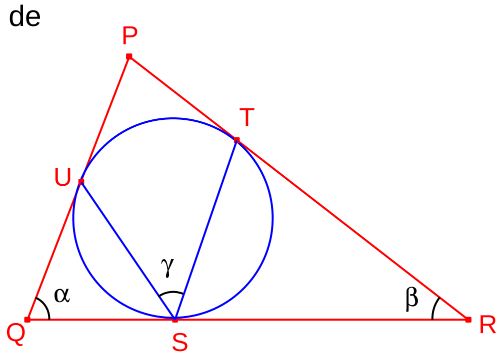
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$y^2=10^2+22^2-2\cdot 10\cdot 22\cdot\frac{3}{5}$.

Resolent l'equació:

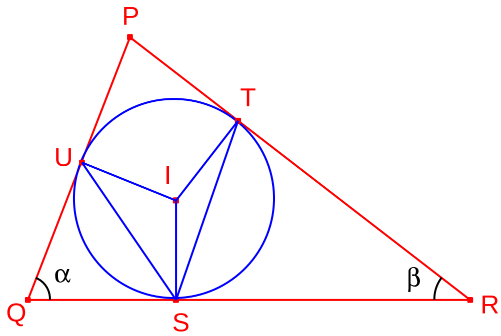
$y=8\sqrt{5}$.

1712.- Donat el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$, siguen S, T i U els punts de tangència de la circumferència inscrita i el triangle.
Siga $\angle PQR = \alpha$, $\angle PRQ = \beta$ i $\angle TSU = \gamma$.
Determineu l'angle γ en funció dels angles α, β.
UKMT. Senior Mathematical Challenge 2015.



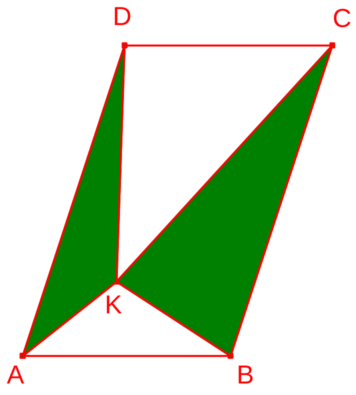
Solució:

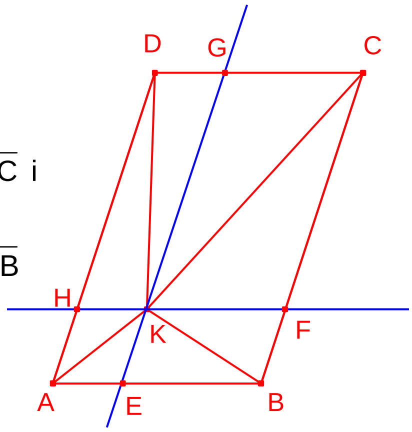
Si I és l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.
$\angle QUI = \angle QSI = 90^o$.
Aleshores, $\angle UIS = 180^o - \alpha$.
El triangle $\overset{\Delta}{UIS}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle USI = 90^o - \dfrac{\alpha}{2}$.
Anàlogament, $\angle TSI = 90^o - \dfrac{\beta}{2}$.
$\gamma = \angle TSU = \angle USI + \angle TSI = 180^o - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$.



1713.- Siga K un punt interior del paral·lelogram ABCD.

Proveu que $S_{AKD}+S_{BKC}=S_{AKB}+S_{CKD}$.





Solució:

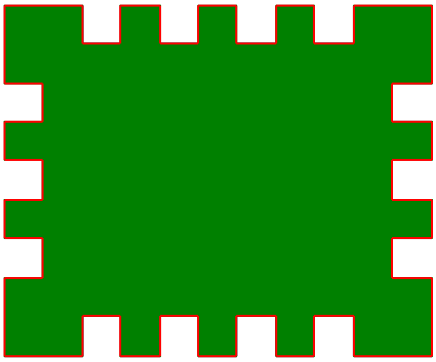
Pel punt K tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla els costats $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ en els punts F, H respectivament.

Pel punt K tracem una paral·lela al costat $\overline{AD}$ que talla els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ en els punts E, G respectivament.

La diagonal d'un paral·lelogram divideix el paral·lelogram en dos triangles d'igual àrea.

$$S_{AKD}+S_{BKC}=S_{AKH}+S_{DKH}+S_{BKF}+S_{CKF}=S_{AKE}+S_{DKG}+S_{BKE}+S_{CKG}=$$
$$=S_{AKB}+S_{CKD}$$

1714.- D'un rectangle de cartró de mesures $55\text{cm} \times 45\text{cm}$ s'ha retallat 14 quadrats de costats $5\text{cm} \times 5\text{cm}$, com mostra la figura.



Determineu el perímetre de la figura.

Solució:

El rectangle inicial té perímetre $P_{rectangle} = 2 \cdot 55 + 2 \cdot 45 = 200\,\text{cm}$.

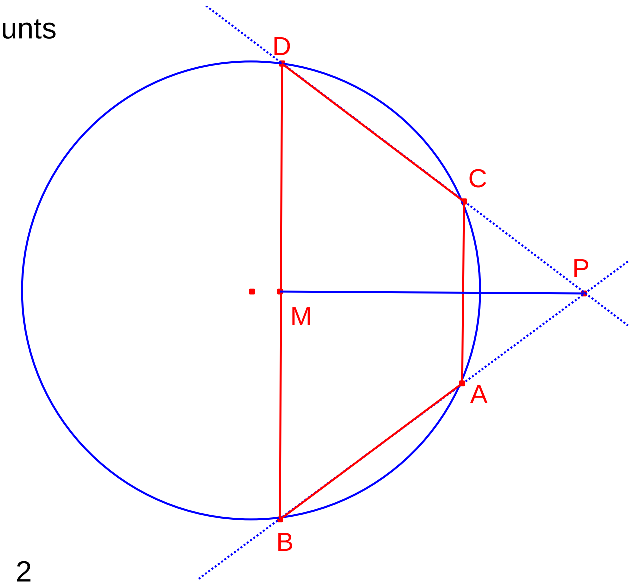
A aquest perímetre s'han d'afegit 28 segments de longitud 5 cm.

Aleshores, el perímetre de la figura és:

$P_{figura} = 200 + 28 \cdot 5 = 340\,\text{cm}$.

1715.- Des d'un punt exterior d'una circumferència es dibuixen dues secants tal que els segments externs mesuren 2 m.
Determineu l'àrea del quadrilàter els vèrtexs del qual són els punts d'intersecció de les secants i la circumferència, saben que les longituds dels seus costats oposats són 6m i 2,4 m.

Solució:
Siga PAB la recta secant a la circumferència. A i B punts d'intersecció amb la circumferència.
Siga PCD la recta secant a la circumferència. C, D punts d'intersecció amb la circumferència.



$\overline{PA} = \overline{PC} = 2$, aleshores, $\overline{PB} = \overline{PD}$.
Aleshores, $\overline{AC} = 2{,}4$, $BD = 6$ costats oposats del quadrilàter ABDC.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BD}$.
Siga $x = \overline{AB} = \overline{CD}$.
Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{PAC}$, $\overset{\Delta}{PBD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{2}{2{,}4} = \frac{2+x}{6}$. Resolent l'equació:
$x = 3$.
La raó de proporcionalitat dels dos triangle és: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{2}{5}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BMP}$:
$\overline{PM} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBD}$ és:
$S_{PBD} = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 = 12$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PAC}$ és:
$S_{PAC} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 S_{PBD} = \frac{4}{25} 12 = \frac{48}{25}$.
L'àrea del quadrilàter ABDC és igual a la diferència entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PBD}$ i $\overset{\Delta}{PAC}$.
$S_{ABDC} = S_{PBD} - S_{PAC} = 12 - \frac{48}{25} = \frac{252}{25}$.

1716.- Els angles interiors del pentàgon ABCDE són $A = 90^{o}$, $B = 60^{o}$, $C = D = 150^{o}$.

D'altra banda $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC} = \frac{4}{3}\overline{AD}$.

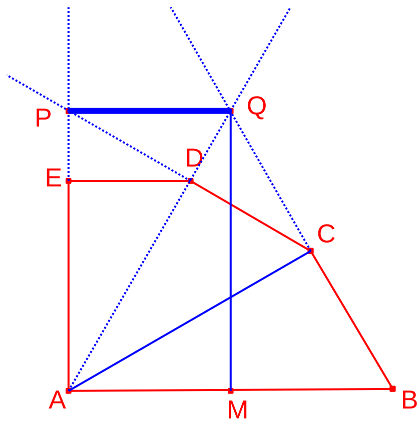
Demostreu que el segment format pel punt intersecció de les rectes AE i CD i la intersecció de les rectes AD i AC és paral·lel al costat $\overline{AB}$.

KöMaL, C1317.

Solució:

Siga P el punt intersecció de les rectes AE i CD.

Siga Q el punt intersecció de les rectes AD i AC.



Siga $\overline{BC} = x$, $\overline{AB} = 2x$, $\overline{AD} = \frac{3}{2}x$.

La suma dels angles del pentàgon ABCDE és $180^{o} \cdot 3 = 540^{o}$.

Aleshores, $E = 540^{o} - (A + B + C + D) = 90^{o}$.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = \sin B$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $\angle ACB = 90^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AC} = x\sqrt{3}$.

$\angle ACD = 150^{o} - \angle ACB = 60^{o}$.

$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{3}{2}x}{x\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\angle ACD$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és rectangle, $\angle ADC = 90^{o}$.

$\angle DAB = \angle BAC + \angle CAD = 30^{o} + 30^{o} = 60^{o}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és equilàter.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$

La distància de Q al costat $\overline{AB}$ és:

$\overline{QM} = \overline{AC} = x\sqrt{3}$.

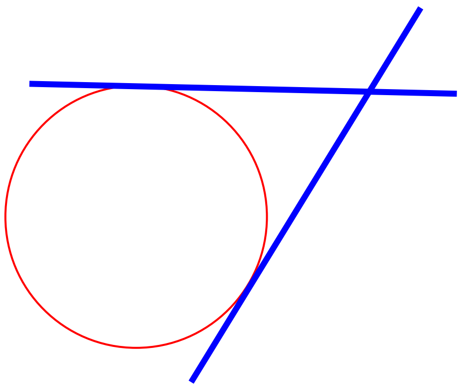
$\angle PAC = 90^{o} - \angle CAB = 60^{o}$, $\angle ACP = 60^{o}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACP}$ és equilàter:

$\overline{AP} = \overline{AC} = x\sqrt{3}$.

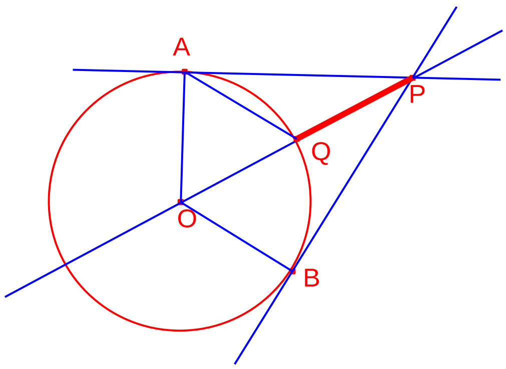
Aleshores, $\overline{PQ}$ equidista del costat $\overline{AB}$, aleshores, $\overline{PQ}$ és paral·lel al costat $\overline{AB}$.

1717.- Joan està tractant de menjar en bastons xinesos.



Per practicar, ha d'aixecar una bola d'arròs de 4 cm de diàmetre amb els bastons tal com mostra la figura. (la bola per ser aixecada el seu centre ha d'estar en el plànol que formen els dos palets) les dos bastons formen un angle de 60º. Trobeu la distància del punt d'encreuament dels dos bastons i el punt més proper de la bola durant aquesta operació.
KöMaL, K477.

Solució:



Siga P el punt intersecció dels dos bastons.
Siga O el centre de la bola.
Siguen A i B els punts de tangència de la bola i els bastons.
$\angle APB = 60^{\circ}$.
La recta OP talla la bola en el punt Q el punt de mínima distància.

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OQ} = \frac{4}{2} = 2$.

$\overline{OA}$ és perpendicular al bastonet $\overline{AP}$.

$\angle APO = 30^{\circ}$.

$\overline{OP} = 2 \cdot \overline{OA} = 4$.

$\overline{PQ} = \overline{OP} - \overline{OQ} = 4 - 2 = 2$.

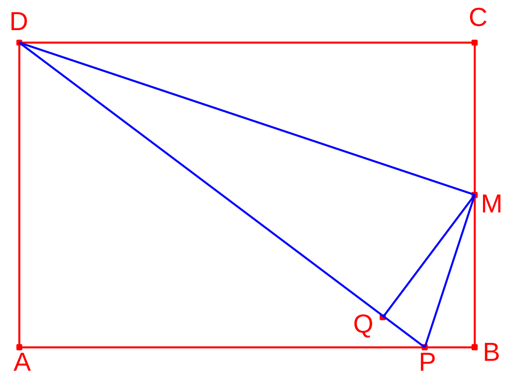
1718.- El rectangle ABCD té costats $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$.

El punt P del costat $\overline{AB}$ és tal que la bisectriu de l'angle $\angle CDP$ passa pel punt mig del costat $\overline{BC}$. Determineu la longitud del segment $\overline{BP}$.

Solució 1:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga $\alpha=\angle CDM=\angle MDP$.

Siga Q el punt simètric de C respecte de DM.



$\angle DQM = 90^{\text{o}}$.

$\angle CMD=\angle DMQ=90^{\text{o}}-\alpha$.

$\angle QMB=2\alpha$

$\overline{QM}=\overline{BM}$. Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MQP}$, $\overset{\Delta}{MBP}$ són iguals.

$\angle BMP=\frac{1}{2}2\alpha=\alpha$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MBP}$, $\overset{\Delta}{DCM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

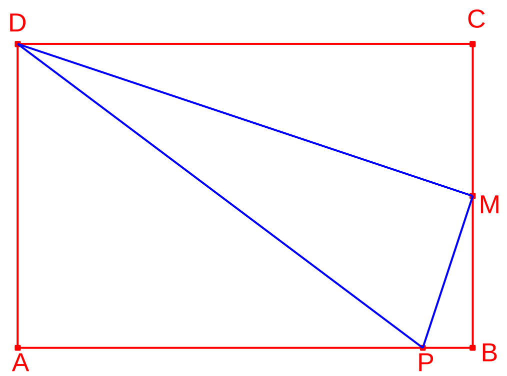
$\frac{\overline{PB}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{CM}}{\overline{CD}}$. Aleshores, $\overline{PM}=\frac{1}{3}$.

Solució 2:

Siga $x=\overline{BP}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCM}$:



$\overline{DM}=\sqrt{10}$.

Siga $\alpha=\angle CDM=\angle MDP$.

$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBM}$:

$\overline{PM}^2=1+x^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAP}$:

$\overline{PD}^2=2^2+(3-x)^2=x^2-6x+13$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{DPM}$:

$1+x^2=x^2-6x+13+10-2\sqrt{x^2-6x+13}\sqrt{10}\frac{3}{\sqrt{10}}$.

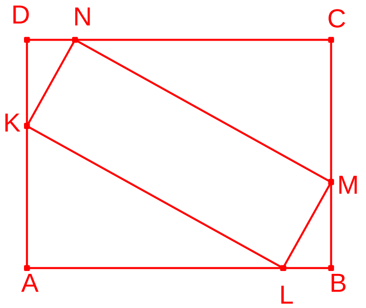
Simplificant:

$-3x+11=3\sqrt{x^2-6x+13}$. Resolent l'equació:

$x=\frac{1}{3}$.

1719.- En un rectangle de costats 3 i 4 està inscrit un rectangle els costats del qual estan en relació 1:3.
Determineu els costats d'aquest rectangle.

Solució:



Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=3$.
Siga el rectangle KLMN inscrit en el rectangle ABCD tal que $\overline{KN}=x$, $\overline{KL}=3x$.

Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KDN}$, $\overset{\Delta}{LAK}$ són semblants.
Siga $\overline{KN}=y$, aleshores, $\overline{AL}=3y$.

$\overline{AK}=3-x$, $\overline{DN}=\overline{LB}=4-3x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KDN}$:

$x^2=y^2+16-24y+9y^2$.

$x^2=10y^2+16-24y$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LAK}$:

$9x^2=9y^2+9-6y+y^2$.

$9x^2=10y^2+9-6y$ (2)

Restant les expressions (2) (1):

$x^2=\frac{-7+18y}{8}$ (3)

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$16y^2-42y+27=0$ (4)

Resolent l'equació:

$y=\frac{9}{8}$, la solució, $y=\frac{3}{2}$ és absurda ja que $y<\frac{\overline{AD}}{2}=\frac{3}{2}$.

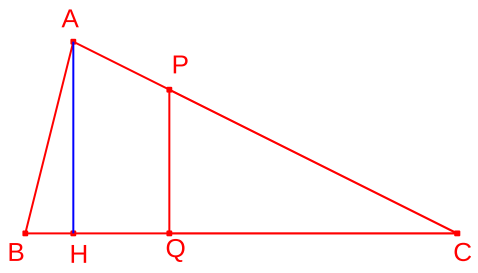
Si $y=\frac{9}{8}$ substituint en l'expressió (3):

$x=\overline{KN}=\frac{\sqrt{106}}{8}$, $3x=\overline{KL}=\frac{3\sqrt{106}}{8}$, costats del rectangle KLMN.

1720.- L'altura d'un triangle és igual a 4, divideix a la base en dues parts que estan en relació 1:8.

Determineu la longitud d'un segment paral·lel a l'altura que dividesca el triangle en dues parts d'igual àrea.

Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'altura $\overline{AH}=4$, $\overline{BH}=a$, $\overline{CH}=8a$.

Siga $\overline{PQ}=x$, segment paral·lel a l'altura $\overline{AH}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{PQC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{4}{8a}=\frac{x}{\overline{CQ}}.$$

$$\overline{CQ}=2ax.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQC}$ és igual a la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}9a\cdot 4\right)=\frac{1}{2}2ax\cdot x.$$

Simplificant:

$x^2=9$. Resolent l'equació:

$x=\overline{PQ}=3$.