Problemes de Geometria per a l'ESO 173

1721.- Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ està dividit en tres figures d'àrees iguals mitjançant rectes paral·leles al costat $\overline{AC}$.

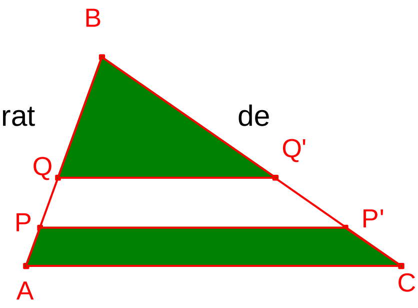
Calculeu les parts en què el costat $\overline{AB}=c$ és dividit per les línies paral·leles.

1000 problemas. N. Antonov.

Solució:

Siga $\overline{PP'}$ la paral·lela més pròxima al costat $\overline{AC}$.

Siga $\overline{QQ'}$ l'altra paral·lela.



Dues figures semblants la proporció de les àrees és igual al quadrat de la raó de semblança dels costats.

Els triangles $\overset{\Delta}{QBQ'}$ $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i les seues àrees estan en proporció 1:3, aleshores:

$\left(\frac{\overline{QB}}{c}\right)^2=\frac{1}{3}$. Aleshores, $\overline{BQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PBP'}$ $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants i les seues àrees estan en proporció 2:3, aleshores:

$\left(\frac{\overline{BP}}{c}\right)^2=\frac{2}{3}$. Aleshores, $\overline{BP}=\frac{\sqrt{6}}{3}c$.

$$\overline{PQ}=\overline{BP}-\overline{BQ}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}c.$$

$$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}=\frac{3-\sqrt{6}}{3}c.$$

Aleshores, $\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QB}=3-\sqrt{6}:\sqrt{6}-\sqrt{3}:\sqrt{3}$.

1722.- Siga un paral·lelogram l'angle agut del qual mesura 60º.

Determineu la relació entre les longituds dels costats sabent que la relació entre els quadrats de les diagonals és $\frac{19}{7}$.

1000 problemas. N. Antonov.

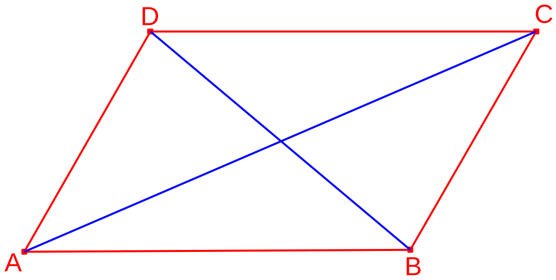
Solució:

Siga el paral·lelogram ABCD tal que $A = 60º$.

Siga $a = \overline{AB}$, $b = \overline{AD}$ costats del paral·lelogram.

Siga $M = \overline{AC}$, $m = \overline{BD}$ diagonals major i menor, respectivament.

Per hipòtesi, $\frac{M^2}{m^2} = \frac{19}{7}$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$M^2 = a^2 + b^2 + ab \qquad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$m^2 = a^2 + b^2 - ab \qquad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2):

$$M^2 + m^2 = 2(a^2 + b^2).$$

$$a^2 + b^2 = \frac{13}{7}d^2 \qquad (3)$$

Restant les expressions (1) (2):

$$M^2 - m^2 = 2ab.$$

$$ab = \frac{6}{7}d^2 \qquad (4)$$

Dividint les expressions (3) (4):

$$\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{13}{6}.$$

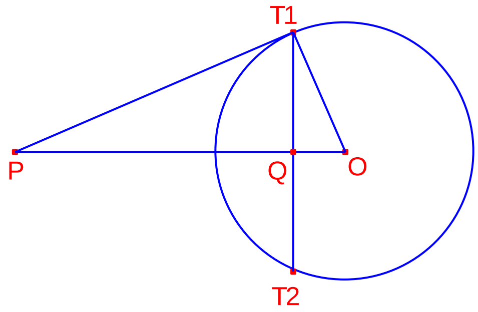
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{13}{6}\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$, o bé $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

1723.- Des d'un punt que dista m del centre d'una circumferència es tracen tangents a la circumferència.

La distància entre és punts de tangència és 2a. Determineu el radi de la circumferència.
1000 problemas. N. Antonov.

Solució:
Siga P el punt exterior a la circumferència de radi R i centre O.



Siga $\overline{OP} = m$.

Siguen T_1, T_2 els punts de tangència, $\overline{T_1T_2} = a$.

Siga Q la intersecció de $\overline{OP}$ i $\overline{T_1T_2}$.

$\overline{QT_1} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POT_1}$:

$\overline{PT} = \sqrt{m^2 - R^2}$.

Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{POT_1}$, $\overset{\Delta}{T_1OQ}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{m^2 - R^2}}{m}$. Resolent l'equació:

$R^2 = \frac{1 \pm \sqrt{m^2 - a^2}}{2} m^2$.

$R = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{m^2 - a^2}}{2} m}$.

1724.- En l'interior d'una circumferència de radi 13 es troba el punt M que dista 5 del centre de la circumferència.

Pel punt M es traça una corda $\overline{AB} = 25$.

Determineu la longitud dels segments en què el punt M divideix la corda $\overline{AB}$.
1000 problemas. N. Antonov.

Solució:

Considerem el diàmetre $\overline{PQ}$ que passa pel punt M.

$\overline{PM} = 18$, $\overline{QM} = 8$.

Siga $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = 25 - x$.

Aplicant la potència del punt M respecte de la circumferència:

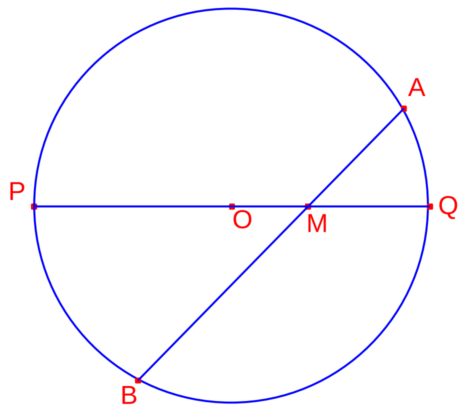
$\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \overline{PM} \cdot \overline{QM}$.

$x(25 - x) = 18 \cdot 8$.

Resolent l'equació:

$x = 9$, o bé $x = 16$.

Aleshores, $\overline{AM} = 9$, $\overline{BM} = 16$, o bé, $\overline{AM} = 16$, $\overline{BM} = 9$.



1725.- Els costats d'un triangle són $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

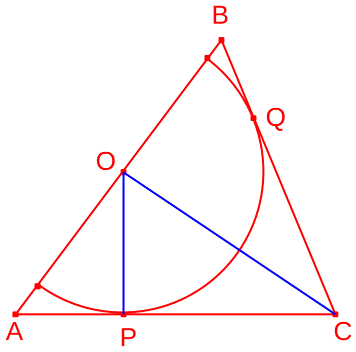
Els costats a, b són tangents a una circumferència que té el centre sobre el costat c.
1000 problemas. N. Antonov.

Solució:

El centre O de la circumferència pertany a la bisectriu de l'angle C del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga R el radi de la circumferència de centre O tangent als costats a, b.
Siguen P i Q els punts de tangència.
Siga $\overline{AO} = x$, $\overline{BO} = 15 - x$.
Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\frac{x}{14} = \frac{15 - x}{13}$. Resolent l'equació:

$x = \overline{AO} = \frac{70}{9}$. $\overline{OB} = 15 - x = \frac{65}{9}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:

$R = \frac{70}{9}\sin A.$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$13^2 = 15^2 + 14^2 - 2 \cdot 15 \cdot 14 \cos A$. Resolent l'equació:

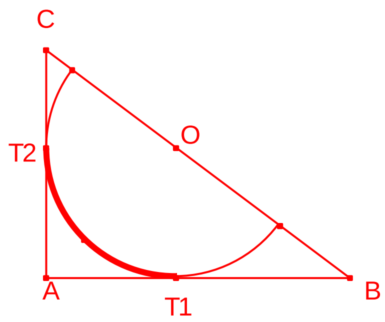
$\cos A = \frac{3}{5}$. Aleshores, $\sin A = \frac{4}{5}$.

$R = \frac{70}{9}\sin A. = \frac{70}{9}\frac{4}{5} = \frac{56}{9}$.

1726.- Un triangle rectangle té inscrit una semicircumferència tal que el seu diàmetre pertany a la hipotenusa i el seu centre divideix aquesta en dos segments de dimensions 15 i 20. Determineu la mesura de l'arc de la semicircumferència compresa entre els punts en què els catets toquen la semicircumferència.

1000 problemas. N. Antonov.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$, $\overline{BC} = 35$.

Siga O en centre de la semicircumferència tal que $\overline{OB} = 20$, $\overline{OC} = 15$.

Siguen T_1, T_2 els punts de tangència.

$\angle T_1OT_2 = 90^{o}$. Aleshores, l'arc és un quadrant de radi $r = \overline{OT_1} = \overline{OT_2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CT_2O}$:

$\overline{CT_2} = \sqrt{15^2 - r^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CT_2O}$, $\overset{\Delta}{OT_1B}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\sqrt{225 - r^2}}{15} = \frac{r}{20}$. Resolent l'equació:

$r = 12$.

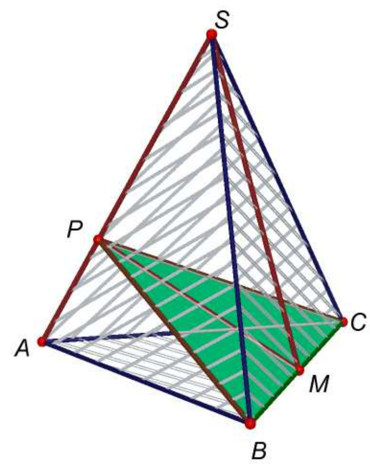
El quadrant de circumferència mesura:

$L = \frac{1}{4}(2\pi \cdot 12) = 6\pi$.

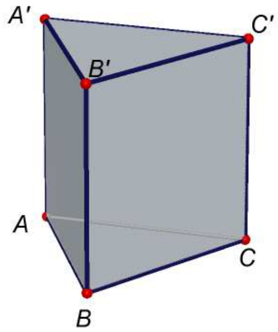
1727.- Siga la piràmide regular ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.

Pel costat $\overline{BC}$ és traça un plànol perpendicular a l'aresta oposada $\overline{AS}$ que la talla en el punt P tal que $\overline{PS}:\overline{PA}=m:n$. Determineu la superfície total de la piràmide.
1000 problemas. N. Antonov.

Solució:
Siga $\overline{PS}=mx, \quad \overline{PA}=nx$.
$\overline{AS}=(m+n)x$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:
$\overline{PB}^2=a^2-n^2x^2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMP}$:
$\overline{PM}^2=\frac{3}{4}a^2-n^2x^2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMS}$:
$\overline{MS}^2=(m+n)^2x^2-\frac{1}{4}a^2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SPM}$:
$(m+n)^2x^2-\frac{1}{4}a^2=m^2x^2+\frac{3}{4}a^2-n^2x^2$.
Resolent l'equació:
$x^2=\frac{a^2}{2(n^2+mn)}$.
$\overline{MS}^2=(m+n)^2\frac{a^2}{2(n^2+mx)}-\frac{1}{4}a^2$.
$\overline{MS}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2m^2+n^2+3mn}{n(m+n)}}$.
L'àrea total de la piràmide ABCS és:
$S_{ABCS}=S_{ABC}+3\cdot S_{BCS}$.
$S_{ABCS}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+3\left(\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2m^2+n^2+3mn}{n(m+n)}}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2m^2+n^2+3mn}{n(m+n)}}\right)a^2$.



1728.- Un prisma regular triangular l'aresta de la base és igual a l'altura.

Si el valor numèric de la superfície total és igual al valor numèric del volum, determineu la mesura de l'aresta de la base.

Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ aresta de la base.

L'àrea total del prisma és igual a l'àrea de dos triangles equilàters de costat a i tres quadrats de costat a:

$$S = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3\cdot a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)a^2 .$$

El volum del prisma és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3 .$$

El valor numèric de la superfície total és igual al valor numèric del volum:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\right)a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. Resolent l'equació:

$$a = 2+4\sqrt{3} \approx 8.93 .$$

1729.- Donat un triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$ tal que $\overline{OA}=\overline{OB}=7a$, en O s'alça una perpendicular al plànol $\overset{\Delta}{AOB}$. En la perpendicular es troba el punt M tal que $\overline{OM}=\frac{7\sqrt{6}}{6}a$. Construïm el tetraedre AOBM.

Determineu la mesura de l'angle díedre format per l'aresta $\overline{AB}$.

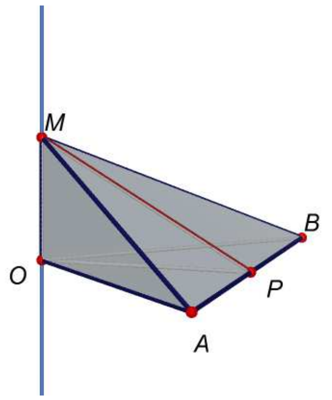
Solució:

$\angle AOB=90^{o}$, $\angle OAB=\angle ABO=45^{o}$.

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

El triangle $\overset{\Delta}{OPA}$ és rectangle i isòsceles $\overline{AP}=\overline{OP}$.

L'angle díedre format per l'aresta $\overline{AB}$ és $\alpha=\angle OPM$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$\overline{AB}=7a\sqrt{2}$.

$\overline{OP}=\overline{AP}=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POM}$:

$$tg\alpha=\frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}=\frac{\frac{7\sqrt{6}}{6}a}{\frac{7\sqrt{2}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

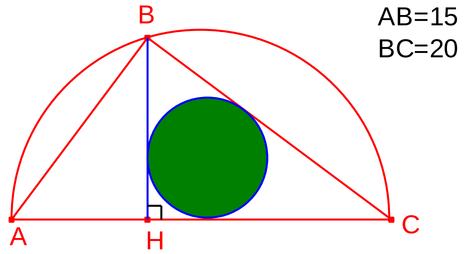
Aleshores, $\alpha=30^{o}$.

1730.- En la figura, $\overline{AC}$ és el diàmetre de la semicircumferència.

$\overline{AB} = 15$, $\overline{BC} = 20$.

$\overline{BH}$ és altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Calculeu el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHC}$.



Solució:

$\angle ABC = 90^{\circ}$, per ser angle inscrit en la semicircumferència i abraçar un diàmetre.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

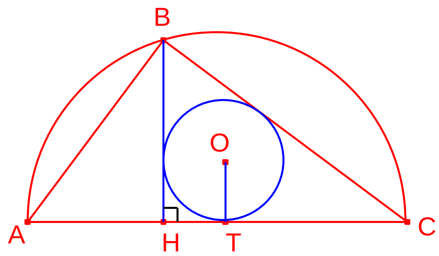
$\overline{AC} = 25$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{BHC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{CH}}{20} = \frac{20}{25}$. Resolent l'equació:

$\overline{CH} = 16$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHC}$:

$\overline{BH} = 12$.

Siga O el centre de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHC}$.

Siga T el punt de tangència amb el triangle $\overset{\Delta}{BHC}$:

$$r = \overline{OT} = \overline{HT} = \frac{\overline{HC} + \overline{HB} - \overline{BC}}{2} = \frac{16 + 12 - 20}{2} = 4.$$