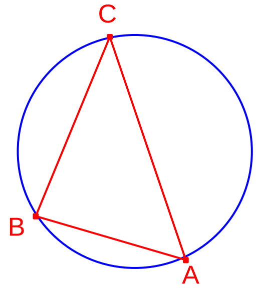
Problemes de Geometria per a l'ESO 174

1731.- Per un punt d'una circumferència es tracen dues cordes de longituds a i b.
L'àrea del triangle format a l'unir els extrems és S.
Determineu el radi de la circumferència.
1000 problemes russos. Problema 556.

Solució:



Siguen les cordes $\overline{CB} = a$, $\overline{CA} = b$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$. Aleshores:

$$\sin C = \frac{2S}{ab}, \quad \cos C = \sqrt{1 - \frac{4S^2}{a^2b^2}}.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{c}{\sin C} = 2R. \quad R = \frac{c}{2\sin C}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C = a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}.$$

$$R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}}}{\frac{4S}{ab}} = \frac{ab}{4S}\sqrt{a^2 + b^2 - 2\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}}.$$

1732.- La base major d'un trapezi mesura a i la menor b.

Els angles en la base major 60º i 45º.
Determineu l'àrea del trapezi.

Solució:

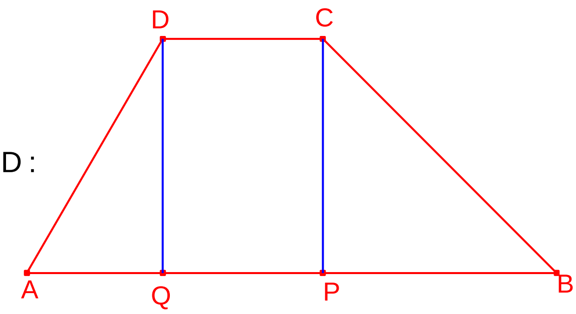
Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$.

Siguen $A = 60^{o}$, $B = 45^{o}$.

Siga P la projecció de C sobre la base $\overline{AB}$.

Siga Q la projecció de B sobre la base $\overline{AB}$.

Siga $h = \overline{CP} = \overline{DQ}$ altura del trapezi.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQD}$:

$\overline{AQ} = \frac{\sqrt{3}}{3}h$.

El triangle $\overset{\Delta}{CPB}$ és isòsceles, aleshores:

$\overline{BP} = \overline{CP} = h$.

$\overline{PQ} = \overline{CD} = b$.

$\overline{AB} = \overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{BP}$.

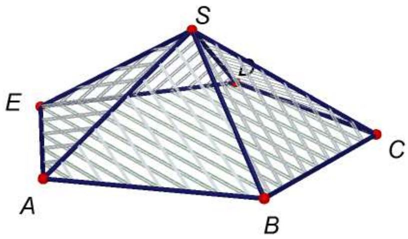
$a = \frac{\sqrt{3}}{3}h + b + h$. Resolent l'equació:

$h = \frac{3-\sqrt{3}}{2}(a-b)$.

L'àrea del trapezi és:

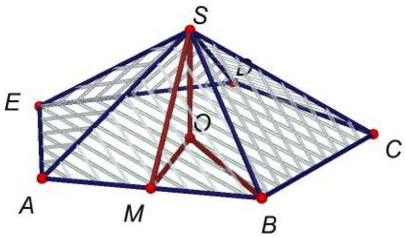
$$S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}h = \frac{a+b}{2}\frac{3-\sqrt{3}}{2}(a-b) = \frac{3-\sqrt{3}}{4}\left(a^2 - b^2\right).$$

1733.- Siga una piràmide regular pentagonal tal que les cares laterals són triangles equilàters.



a) Determineu l'angle que forma una aresta lateral i la base.
b) Determineu l'angle que forma una cara lateral i la base.
1000 problemes russos. Problema 609.

Solució:
Siga ABCDES la piràmide de base el pentàgon regular ABCDE i que té totes les arestes iguals, $\overline{AB} = a$.
Siga O el centre del pentàgon regular.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
$\angle MBO = 54^o$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

$$\frac{a}{2 \cdot \overline{OB}} = \cos 54^o. \ \overline{OB} = \frac{a}{2\cos 54^o}.$$

$$\frac{2 \cdot \overline{OM}}{a} = tg54^o. \ \overline{OM} = 2a \cdot tg54^o.$$

a)
L'angle que forma una aresta lateral i la base és igual a l'angle $\alpha = \angle OBS$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOB}$:

$$\alpha = \arccos\frac{\overline{OB}}{\overline{BS}} = \arccos\frac{1}{2\cos 54^o} \approx 31^o 43' 3''.$$

b)
L'angle que forma una cara lateral i la base és igual a l'angle $\beta = \angle OMS$.

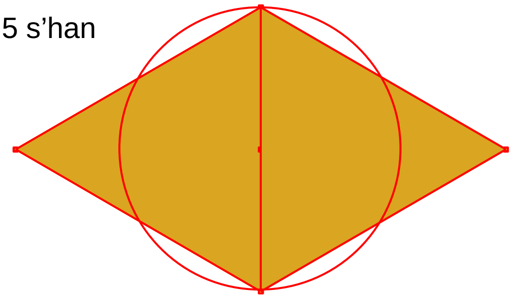
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SMB}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOM}$:

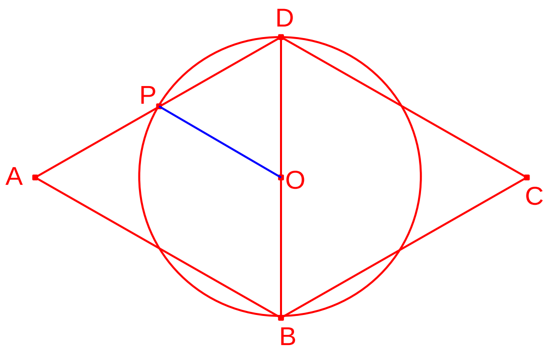
$$\alpha = \arccos\frac{\overline{OM}}{\overline{MS}} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}tg54^o \approx 37^o 22' 39''.$$

1734.- Sobre el diàmetre d'una circumferència de radi 5 s'han construït dos triangles equilàters.



Determineu l'àrea total del cercle que es troba fora dels triangles equilàters.
Crux Mathematicorum. CC164.

Solució:



Siga ABCD el rombe que formen els dos triangles equilàters.

Siga O el punt mig del costat $\overline{BD}$, centre de la circumferència.

$\overline{OP} = \overline{OD} = 5$.

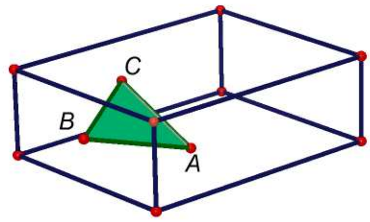
El triangle $\overset{\Delta}{OPD}$ és equilàter ja que $\overline{OP} = \overline{OD} = 5$ i $\angle DPO = \angle PDO = 60^{o}$.

Per tant, $\angle POD = 60^{o}$.

Aleshores, l'àrea total del cercle que es troba fora dels triangles equilàters és igual a l'àrea de quatre segments circulars de radi 5 de 60º:

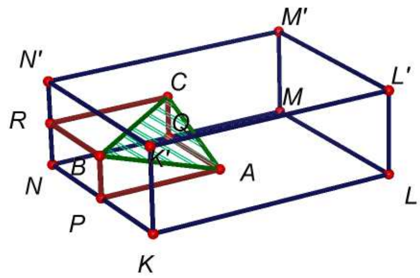
$$S = 4\left(\frac{1}{6}\pi 5^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}5^2\right) = \frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3} \approx 9.0586\,.$$

1735.- Siguen A, B i C els centres de tres cares d'un ortoedre, les quals es tallen en un vèrtex.



Si els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són 4, 5 i 6, determineu el volum de l'ortoedre.
UKMT Hamilton 2015.

Solució:
Siga KLMNK'L'M'N' l'ortoedre.
Siga $\overline{KL} = x$, $\overline{KN} = y$, $\overline{KK'} = z$ arestes de l'ortoedre.
Siga A el centre de la cara KLMN.
Siga B el centre de la cara KNN'K'.
Siga C el centre de la cara NMM'N'.
Les tres cares s'intersecten en el vèrtex N.



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AC} = 5$, $\overline{AB} = 6$.
Siga P la projecció de A sobre l'aresta $\overline{KN}$.
Siga Q la projecció de C sobre l'aresta $\overline{MN}$.
Siga R la projecció de B sobre l'aresta $\overline{NN'}$.

$\overline{BN} = \frac{1}{2}y$, $\overline{CR} = \frac{1}{2}x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BRC}$:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 4^2$$

$\overline{AQ} = \frac{1}{2}y$, $\overline{CQ} = \frac{1}{2}z$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQC}$:

$$\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 5^2.$$

$\overline{BP} = \frac{1}{2}z$, $\overline{AP} = \frac{1}{2}x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}z^2 = 6^2.$$

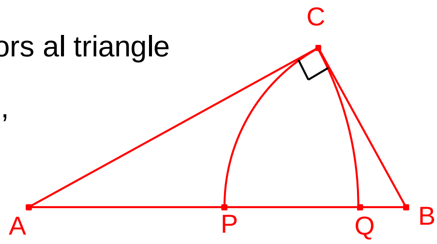
Considerem el sistema format per les tres expressions anteriors:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ y^2 + z^2 = 100 \\ x^2 + z^2 = 144 \end{cases}. \text{ Resolent el sistema: } \begin{cases} x^2 = 54 \\ y^2 = 90 \\ z^2 = 10 \end{cases}.$$

Aleshores, el volum de l'ortoedre és:

$$V = xyz = \sqrt{54 \cdot 90 \cdot 10} = 90\sqrt{6}.$$

1736.- En la figura, dos arcs circulars $\overset{\frown}{CQ}$ i $\overset{\frown}{CP}$ són interiors al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^o$ i els centres respectius són A i B, respectivament.



Proveu que $\frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{BQ}$.

UKMT Hamilton 2015.

Solució:

$\overline{AQ} = b$. Elevant al quadrat:

$$\left(\overline{AP} + \overline{PQ}\right)^2 = b^2 \qquad (1)$$

$\overline{PB} = a$. Elevant al quadrat:

$$\left(\overline{BQ} + \overline{PQ}\right)^2 = a^2 \qquad (2)$$

Sumant ambdues expressions:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BQ}^2 + 2 \cdot \overline{PQ} + 2\left(\overline{AP} \cdot \overline{PQ} + \overline{BQ} \cdot \overline{PQ}\right) = b^2 + a^2 = c^2 \qquad (3)$$

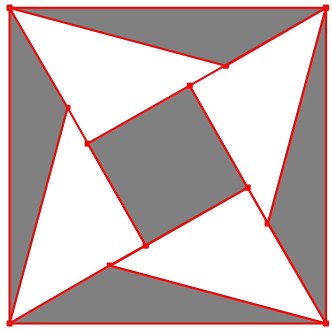
$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{BQ} = c$. Elevant al quadrat:

$$\overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{BQ}^2 + 2 \cdot \overline{PQ} + 2\left(\overline{AP} \cdot \overline{PQ} + \overline{BQ} \cdot \overline{PQ} + \overline{AP} \cdot \overline{BQ}\right) = c^2 \qquad (4)$$

Igualant les expressions (3) i (4) i simplificant:

$\overline{PQ}^2 = 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{BQ}$.

1737.- En la figura, quatre triangles blancs estan situats simètricament sobre un quadrat gris.



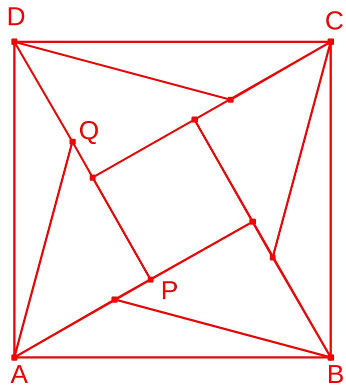
Aquests 4 triangles blancs són rectangles i isòsceles.
La suma de les àrees pintades de gris és igual a la suma de les àrees dels triangles blancs.
Determineu els angles dels triangles grisos.
UKMT Hamilton 2015.

Solució:

Siiga ABCD el quadrat exterior d'àrea 1, $\overline{AB}=1$.

Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overline{AP}=\overline{PQ}=x$.

L'àrea dels quatre triangles rectangles blancs és igual a la meitat de l'àrea del triangle ABCD:



$$4\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}.$$

Resolent l'equació:

$$x=\overline{AP}=\frac{1}{2}.$$

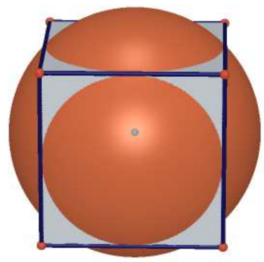
Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$, $\overline{AP}=\frac{1}{2}$, $\overline{AD}=1$.

Aleshores, $\angle PAD=60^o$, $\angle ADP=30^o$.
$\angle PAQ=45^o$.
Aleshores, $\angle QAD=60^o – 45^o=15^o$.
$\angle AQD=180^o – (\angle QAD+\angle ADQ)=180^o – (15^o+30^o)=135^o$.

Aleshores, els angles del triangle gris $\overset{\Delta}{AQD}$ són:
$\angle ADQ=30^o$, $\angle QAD=15^o$, $\angle AQD=135^o$.

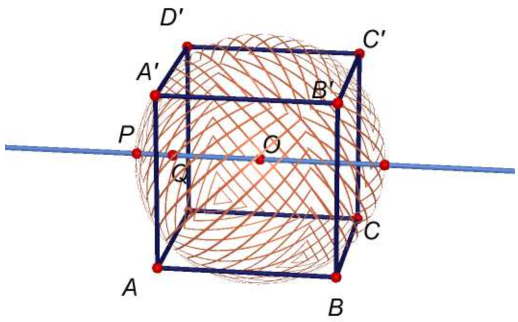
1738.- Una esfera és tangent als punts migs de les arestes d'un cub.

Quina part del volum del cub ocupa la part de l'esfera interior al cub?.



Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el cub d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga O el centre del cub, centre a la vegada de l'esfera.
Siga Q el centre de la cara ADD'A'.
La recta OQ talla l'esfera en el punt P



El radi de l'esfera és $\overline{OP} = \frac{1}{2}\overline{AC'} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

La part de l'esfera exterior està formada per 6 casquets esfèrics de radi $r = \overline{OP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ i altura $h = \overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a$.

El volum del casquet és:

$$V_{casquet} = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h) = \frac{\pi}{3}\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+\frac{1}{3}\right)a^3 = \frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)a^3.$$

El volum de la part de l'esfera interior al cub és:

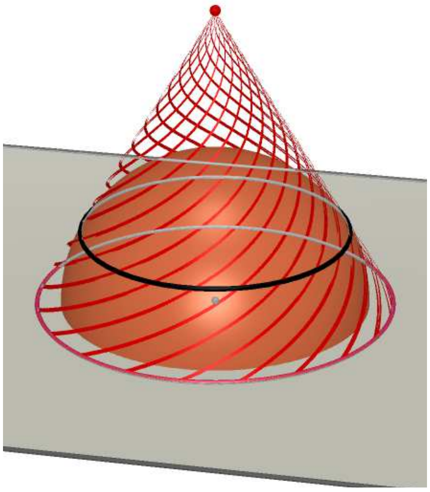
$$V_{esfera} - 6V_{casquet} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^3 - 6\left(\frac{\pi}{12}\left(2\sqrt{2}-\frac{5}{2}\right)a^3\right) = \pi\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{4}\right)a^3.$$

La part del volum del cub que ocupa la part de l'esfera interior al cub és:

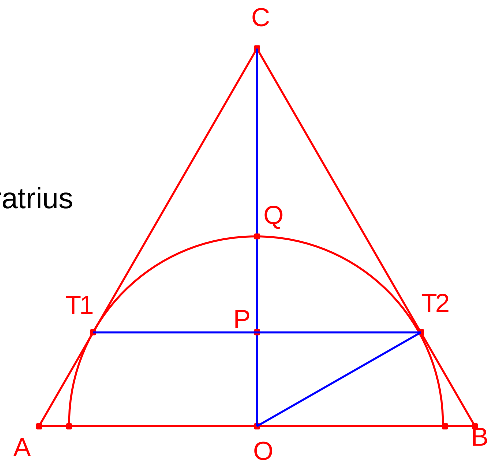
$$\frac{V_{interior}}{V_{cub}} = \frac{\pi\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{4}\right)a^3}{a^3} = \pi\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}+\frac{5}{4}\right).$$

1739.- En un con equilàter està inscrita una semiesfera tal que el seu cercle major està en la base del con.

a) Determineu la raó entre les àrees en què la circumferència tangent de la semiesfera i el con divideix la superfície lateral del con.
b) Determineu la raó entre les àrees en què la circumferència tangent de la semiesfera i el con divideix la superfície de la semiesfera.
Gúsiev. Problema 862.



Solució:
Un con equilàter és el que la generatriu mesura el mateix que el diàmetre de la base.
Siga R el radi de la base del con.
La generatriu és 2R.
Siga O el centre de la base.



Considerem la secció axial del con $\overset{\Delta}{ABC}$ (triangle equilàter).
Siguen T_1, T_2 punts de tangència de la semiesfera i les generatrius $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, respectivament.
Siga P la intersecció de $\overline{T_1T_2}$ i l'altura $\overline{OC}$.
El radi de la semiesfera és:
$r = \overline{OT_2}$.
$\angle T_2OB = 30^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $T_2\overset{\Delta}{O}B$:

$r = \overline{OT_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$. $\overline{OP} = \frac{1}{2}r$.

El radi de la circumferència tangent del con i l'esfera és $s = \overline{PT_2}$.
$\angle T_2OP = 60^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $T_2\overset{\Delta}{O}P$:

$s = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{OT_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}r = \frac{3}{4}R$.

L'àrea lateral del con és:
$S_{conABC} = \pi R \cdot 2R = 2\pi R^2$.
L'àrea de la semiesfera és:
$S_{S.esfera} = 2\pi R^2$.

a)

La circumferència de centre P i radi $s=\overline{PT_2}$ divideix el con inicial en un con i un con truncat:

L'àrea lateral del con superior és:

$$S_{conT_1T_2C}=\pi s\cdot 2s=2\pi s^2=2\pi\frac{9}{16}R^2=\pi\frac{9}{8}R^2.$$

L'àrea lateral del con truncat interior és:

$$S_{contruncat}=S_{conABC}-S_{conT_1T_2C}=2\pi R^2-\pi\frac{9}{8}R^2=\pi\frac{7}{8}R^2.$$

La raó en què la circumferència tangent de la semiesfera i el con divideix la superfície lateral del con és:

$$\frac{S_{conT_1T_2C}}{S_{contruncat}}=\frac{9}{7}.$$

b)

La circumferència de centre P i radi $s=\overline{PT_2}$ divideix la semiesfera inicial en un casquet esfèric i una zona esfèrica.

L'altura del casquet esfèric és $h=\overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP}=r-\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}r$.

L'àrea del casquet esfèric és:

$$S_{casquet}=2\pi rh=\pi r^2.$$

L'àrea de la zona esfèrica és:

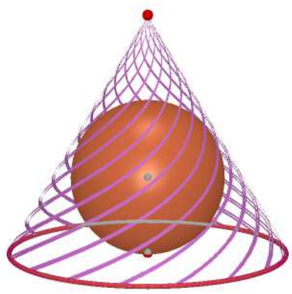
$$S_{zona}=S_{S.esfera}-S_{casquet}=2\pi r^2-\pi r^2=\pi r^2$$

La raó en què la circumferència tangent de la semiesfera i el con divideix la superfície de la semiesfera.

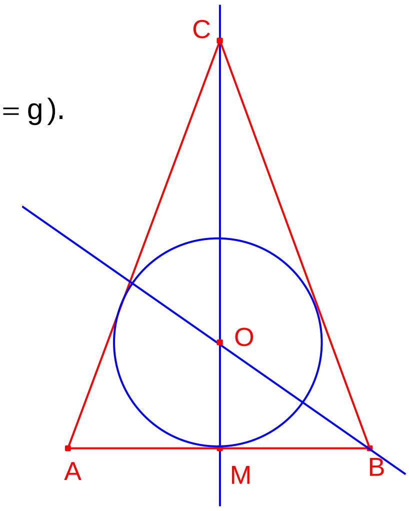
$$\frac{S_{casquet}}{S_{zona}}=1.$$

1740.- En un con l'àrea de la base és S_1 i l'àrea lateral és S_2.

Determineu el radi de l'esfera inscrita en el con.
Gúsiev. Problema 857.



Solució:



Considerem la secció axial del con $\overset{\Delta}{ABC}$ (triangle isòsceles $\overline{AC}=\overline{BC}=g$).

Siga M el punt mig del diàmetre $\overline{AB}=2R$ de la base.
Siga O el centre de l'esfera inscrita al con.

Siga $r=\overline{OM}$ el radi de l'esfera.

$S_1=\pi R^2$, $S_2=\pi Rg$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{MC}}{2}=\frac{\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}}{2}r\,.$$

$$R\sqrt{g^2-R^2}=(g+R)r\,.$$

$$r=R\sqrt{\frac{g^2-R^2}{(g+R)^2}}=R\sqrt{\frac{g-R}{g+R}}=\sqrt{R^2\frac{\frac{S_2}{\pi R}-R}{\frac{S_2}{\pi R}+R}}=\sqrt{R^2\frac{S_2-\pi R^2}{S_2+\pi R^2}}=\sqrt{\frac{S_1}{\pi}\cdot\frac{S_2-S_1}{S_2+S_1}}\,.$$