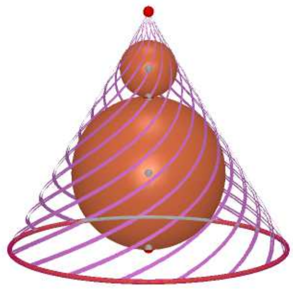
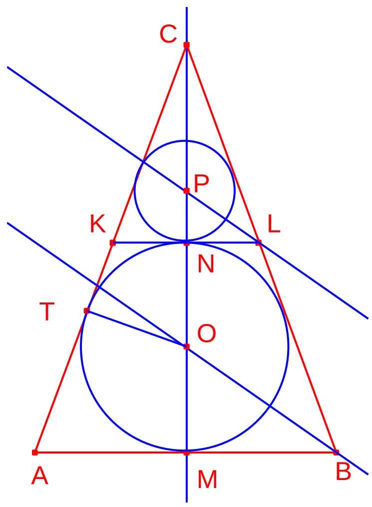
Problemes de Geometria per a l'ESO 175

1741.- En un con estan disposades dues esferes tangents entre si i tangents a la superfície del con.
La proporció entre els radis de les esferes és igual a $m:n$, $m>n$.
Determineu l'angle en el vèrtex de la secció axial del con.
Gúsiev. Problema 863.



Solució:



Considerem la secció axial del con $\overset{\Delta}{ABC}$ (triangle isòsceles $\overline{AC}=\overline{BC}$).
Siga M el punt mig del diàmetre $\overline{AB}$ de la base.
Siga O el centre de l'esfera inscrita al con i a la base del con de radi m.
Siga $h=\overline{CM}$, l'altura del con.
Siga P el centre de l'esfera superior tangent a l'anterior i la superfície lateral del con de radi n.
El plànol tangent a les dues esferes talla les generatrius $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ en els punts K, L, respectivament.
Siga N la intersecció de l'altura $\overline{CM}$ i $\overline{KL}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{KLC}$ i la raó de semblança és $m:n$.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{h}{h-2m}=\frac{m}{n}$, Resolent l'equació:

$$h=\frac{2m^2}{m-n}.$$

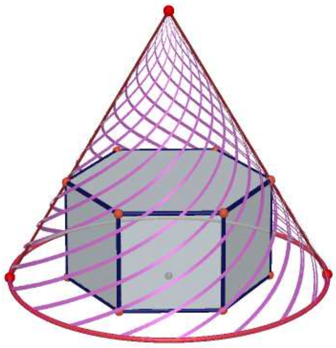
Siga $\alpha=\angle ACM$. L'angle en el vèrtex de la secció axial és, $\angle ACB=2\alpha$.
Siga T el punt de tangència de l'esfera de centre O i la generatriu $\overline{AC}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:

$$\sin\alpha=\frac{m}{h-m}=\frac{m}{\frac{2m^2}{m-n}-m}=\frac{m-n}{m+n}.$$

$$\alpha=\arcsin\frac{m-n}{m+n}.$$

$$\angle ACB=2\alpha=2\cdot\arcsin\frac{m-n}{m+n}.$$

1742.- En un con equilàter (con en què el diàmetre és igual a la generatriu) hi ha inscrit un prisma regular hexagonal que té totes les arestes iguals.



Determineu la proporció entre els volums del prisma i del con.

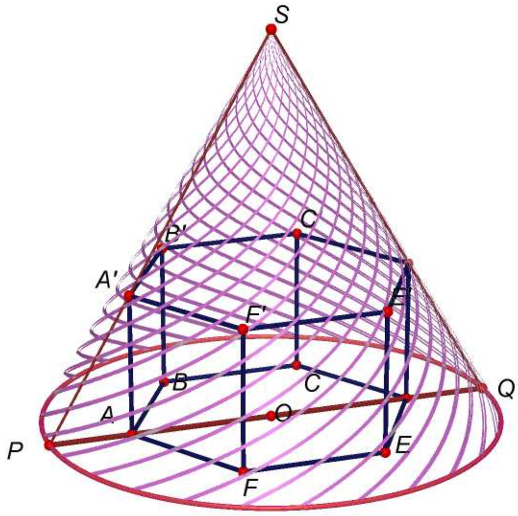
Solució:

Siga O el centre de la base del con, de vèrtex S.

Siga ABCDEFA’B’C’D’E’F’ el prisma regular hexagonal tal que $\overline{AB} = \overline{AA'} = x$.

$\overline{OA} = x$.

$\overline{AD} = \overline{A'D'} = 2x$.



Siga $\overline{PQ} = 2R$ el diàmetre que passa pels punts A, D.

$\overline{AS} = 2R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POS}$:

$\overline{OS} = R\sqrt{3}$, altura del con.

$\overline{PA} = R - x$.

$\angle SPO = 60^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAA'}$:

$\overline{AA'} = \sqrt{3} \cdot \overline{PA}$.

$x = \sqrt{3}(R - x)$. Resolent l’equació:

$x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2} R$.

El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \cdot x = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}R\right)^3 = \frac{81\sqrt{3}-135}{8}R^3.$$

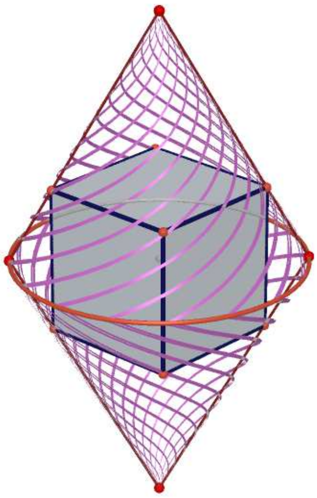
El volum del con equilàter és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3.$$

proporció entre els volums del prisma i del con

$$\frac{V_{prisma}}{V_{con}} = \frac{\frac{81\sqrt{3}-135}{8}R^3}{\frac{\pi\sqrt{3}}{3}R^3} = \frac{243\sqrt{3}-405}{8\pi\sqrt{3}} \approx 0.3650.$$

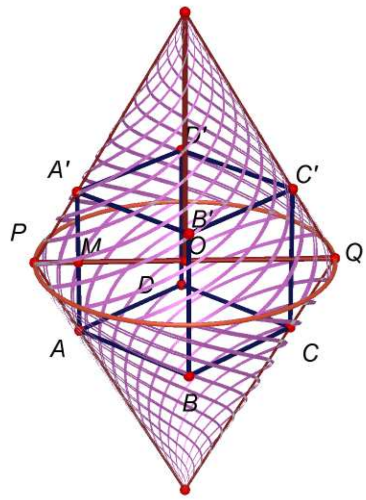
1743.- En la figura, hi ha un doble con i un cub.



Cadascun dels dos cons és equilàter (el diàmetre és igual a la generatriu).
El cub la cara inferior és tangent a la cara lateral del con inferior i la cara superior tangent a la cara lateral del con superior.
Determineu la proporció entre els volums del cub i del doble con.

Solució:

Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB} = x$.
Siga O el centre del cub i del doble con.
Siga $\overline{PQ} = 2R$ diàmetre del cada con.
Siga M la intersecció del diàmetre $\overline{PQ}$ i l'aresta $\overline{AA'}$.



$\overline{AC} = x\sqrt{2}$.

$$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\overline{PM} = R - \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

$$\overline{A'M} = \frac{1}{2}x$$

$\angle A'PO = 60^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PAA'}$:

$\overline{A'M} = \sqrt{3} \cdot \overline{PM}$.

$\frac{1}{2}x = \sqrt{3}\left(R - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1}R = \frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}R.$$

El volum del cub és:

$$V_{cub} = x^3 = \left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{5}\right)^3 R^3 = \frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}R^3.$$

El volum del doble con és:

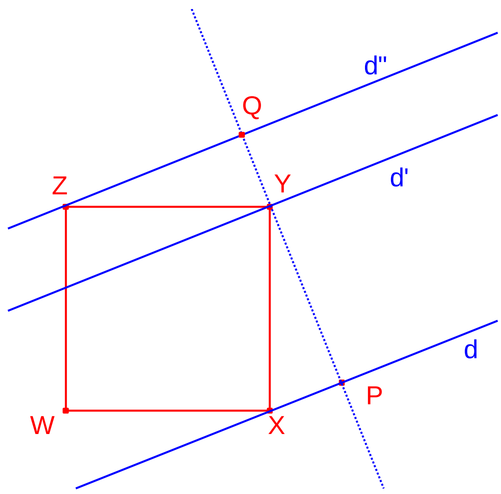
$$V_{2con} = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\sqrt{3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}R^3.$$

La proporció entre els volums del cub i del doble con és:

$$\frac{V_{cub}}{V_{2con}} = \frac{\frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}R^3}{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}R^3} = \frac{\frac{648\sqrt{2}-456\sqrt{3}}{125}}{\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}} = 0.2792.$$

1744.- Siga el quadrat WXYZ.

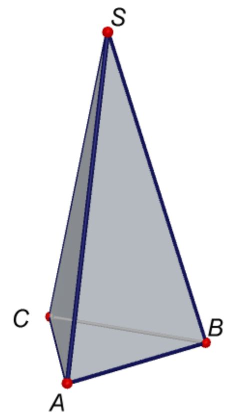
Tres rectes paral·leles d, d' i d" passen respectivament, pels punts X, Y, Z.
La distància entre d i d' és 5 i la distància entre d i d" és 7.
Calculeu la mesura de l'àrea del quadrat.
Crux Mathematicorum CC166.



Solució:
Siga $\overline{XY} = c$ costat del quadrat WXYZ.
Siga P la projecció de Y sobre la recta d.
Siga Q la projecció de Y sobre la recta d".
$\overline{YP} = 5$, $\overline{PQ} = 7$, $\overline{YQ} = 2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle
$\overset{\Delta}{YQZ}$:
$\overline{QZ} = \sqrt{c^2 + 2^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{YQZ}$, $\overset{\Delta}{XPY}$ són iguals.
$5 = \sqrt{c^2 + 4}$.
Elevant al quadrat, $c^2 = 29$.
L'àrea del quadrat WXYZ és:
$S_{WXYZ} = c^2 = 29$.

1745.- L'aresta de la base d'una piràmide regular triangular és 1 i les arestes laterals 2.



Determineu la distància entre dues arestes que es creuen.
KöMaL, C1335.

Solució:

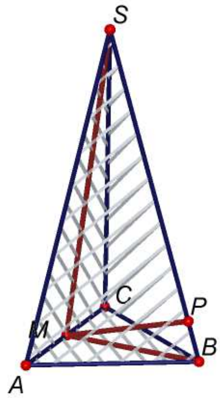
Siga ABCS la piràmide recta de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ d'aresta $\overline{AB} = 1$.

Siga $\overline{AS} = 2$ aresta lateral.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.

Siga P la projecció de M sobre l'aresta $\overline{BS}$.

La distància que cerquem és la mesura del segment $\overline{MP}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{MB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Siga $x = \overline{MP}$, $y = \overline{BP}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPM}$:

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SPM}$:

$$x^2 + (2-y)^2 = \frac{15}{4}.$$

Considerem el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ x^2 + (2-y)^2 = \frac{15}{4} \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x = \overline{MP} = \frac{\sqrt{11}}{4} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

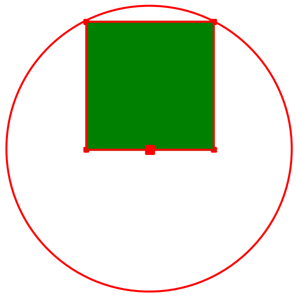
Generalització:

L'aresta de la base d'una piràmide regular triangular és a i les arestes laterals b.
Determineu la distància entre dues arestes que es creuen.

Solució:

La distància entre les dues arestes que es creuen és: $x = \overline{MP} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

1746.- La circumferència de la figura, té radi 1.



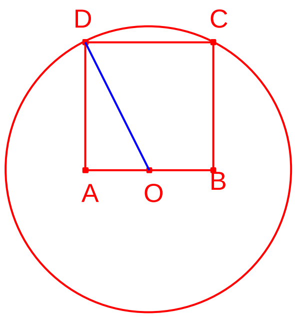
Dos vèrtex que formen un costat del quadrat es troben en la circumferència el costat oposat passa pel centre de la circumferència. Determineu l'àrea del quadrat.

UKMT 2016 Intermediate

Solució:

Siga O el centre de la circumferència de radi 1.

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.



$\overline{AO} = \frac{1}{2}c$, $\overline{OD} = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAO}$:

$1^2 = c^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2$. Resolent l'equació:

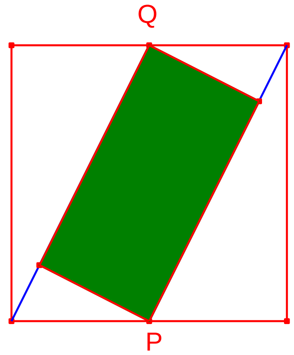
$c^2 = \frac{4}{5}$.

L'àrea del quadrat és:

$S_{ABCD} = c^2 = \frac{4}{5}$.

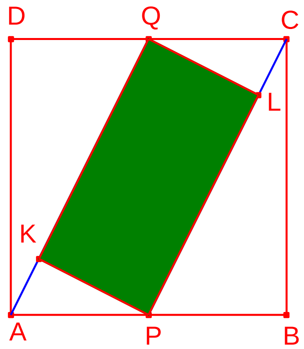
1747.- En La figura, els punts P i Q són els punts del quadrat de costat 1.

Determineu l'àrea del rectangle construït en l'interior.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat 1.
Siga el rectangle KPLQ.

$$S_{ADQ} = S_{PBC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4}.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADQ}$:

$$\overline{AQ} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Els triangle rectangles $\overset{\Delta}{ADQ}$, $\overset{\Delta}{PKA}$ són semblants. Les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de proporcionalitat:

$$\frac{S_{PKA}}{S_{ADQ}} = \left(\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}.$$

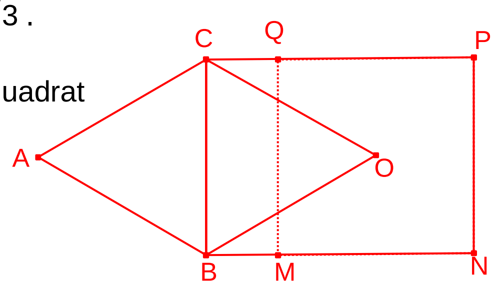
$$S_{PKA} = \frac{1}{5} S_{ADQ} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}.$$

L'àrea del rectangle KPLQ és:

$$S_{KPLQ} = S_{ABCD} - 2 \cdot S_{ADQ} - 2 \cdot S_{PKA} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{2}{5}.$$

1748.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter d'àrea $\sqrt{3}$.

El simètric de A respecte del costat $\overline{BC}$ és O, centre del quadrat MNPQ.
Determineu l'àrea del rectangle BNPQ.



Solució:

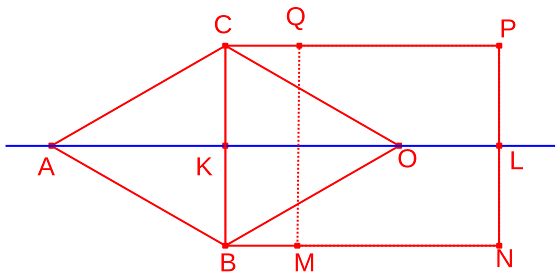
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\sqrt{3}$:

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BC}^2 = \sqrt{3}$.

Aleshores, $\overline{BC} = 2$.

Aleshores, $\overline{MN} = \overline{NP} = \overline{BC} = 2$.

Siga K el punt mig del costat $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKC}$:

$\overline{AK} = \overline{KO} = \sqrt{3}$.

Siga L el punt mig del costat $\overline{NP}$.

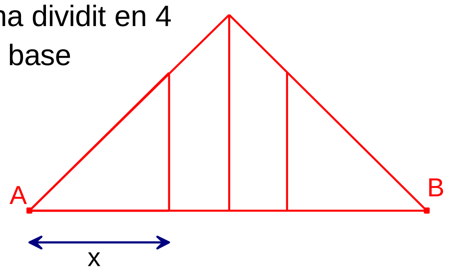
$\overline{OL} = \frac{1}{2}\overline{MN} = 1$.

$\overline{BN} = \overline{OL} + \overline{KO} = 1 + \sqrt{3}$.

L'àrea del rectangle BNPQ és:

$S_{BNPQ} = \overline{BN} \cdot \overline{NP} = \left(1+\sqrt{3}\right)2$.

1749.- En la figura, el triangle isòsceles de base $\overline{AB} = 12$ s'ha dividit en 4 polígons d'igual base utilitzant segments perpendiculars a la base $\overline{AB}$.

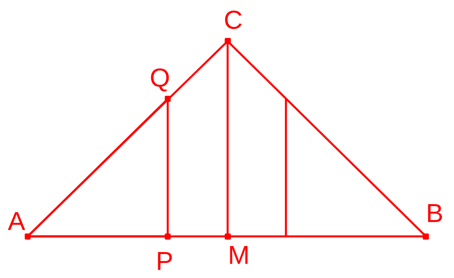


Calculeu la longitud de x.
Crux Mathematicorum CC173.

Solució:

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 6$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APQ}$, $\overset{\Delta}{AMC}$ són semblants.
La proporció de les àrees és igual al quadrat de la raó de semblança dels triangles:

$\left(\frac{6}{x}\right)^2 = \frac{S_{AMC}}{S_{APQ}} = 2$.

Resolent l'equació:

$x = 3\sqrt{2}$.

1750.- Determineu l'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF amb $A(0,0)$, $C(7,1)$.

Crux Mathematicorum CC172.

Solució:

$\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$.

$\overset{\Delta}{ACE}$ és un triangle equilàter.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual al doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACE}$.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ACE}$ és:

$$S_{ACE} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AC}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{50}\right)^2 = \frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 2 \cdot S_{ACE} = 25\sqrt{3}.$$