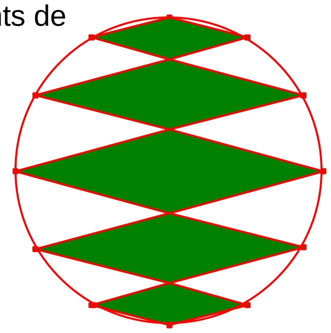
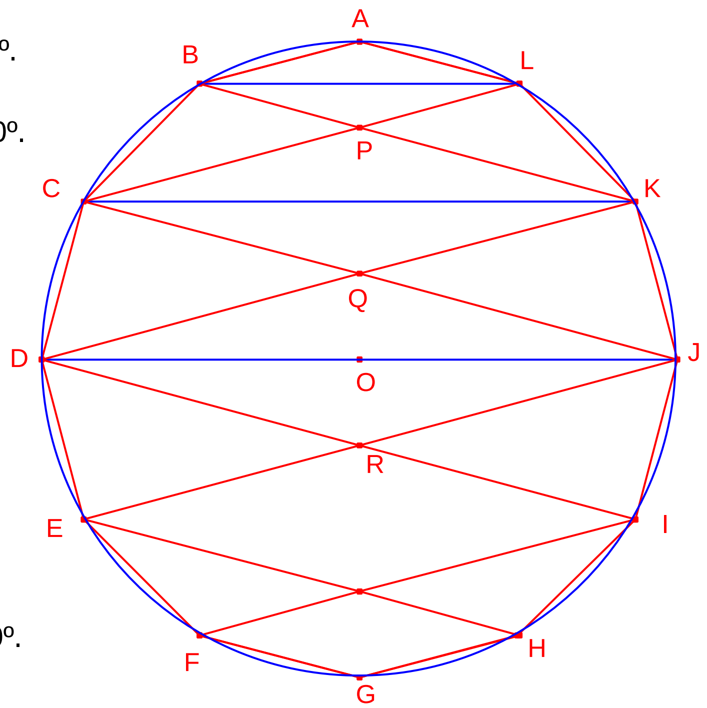
Problemes de Geometria per a l'ESO 176

1751.- Una circumferència està dividida en dotze arcs iguals i els punts de la divisió s'uneixen com mostra la figura.
Determineu la proporció dels les àrees dels rombes formats.
KöMaL, 498.



Solució:
Les parts iguals en què està dividida la circumferència formen el dodecàgon regular ABCDEFGHIJKL.
Siga $\overline{AB} = c$, costat del dodecàgon regular:



$\angle ABK = \angle ALC = 30^o$.
ABPL és un rombe de costat a i angles 30º, 150º.
$\angle LCJ = \angle BKD = 30^o$.
PCQK és un rombe de costat a i angles 30º, 150º.
Els rombes ABPL, PCQK són semblants.
El triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ és isòsceles $\overline{BC} = \overline{BP} = c$,
$\angle BCL = 30^o$.
Aleshores, $\overline{CP} = c\sqrt{3}$.
Dos figures semblants les seues àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:

$$\frac{S_{PCQK}}{S_{ABPL}} = \left(\frac{\overline{CP}}{\overline{AB}}\right)^2 = 3 .$$

$\angle KDI = \angle CJE = 30^o$.
QDRJ és un rombe de costat a i angles 30º, 150º.
Els rombes ABPL, QDRJ són semblants.
El triangle $\overset{\Delta}{CDQ}$ és rectangle $\angle DCJ = 90^o$, $\angle CDK = 60^o$, $\overline{CD} = c$.
Aleshores, $\overline{DQ} = 2c$.

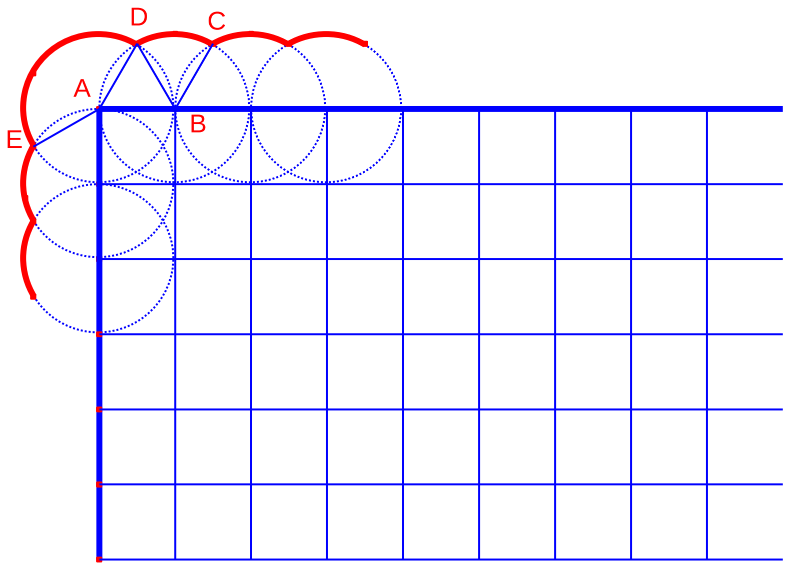
$$\frac{S_{QDRJ}}{S_{ABPL}} = \left(\frac{\overline{DQ}}{\overline{AB}}\right)^2 = 4 .$$

Aleshores, la proporció dels rombes és:
$S_{ABPL} : S_{PCQK} : S_{QDRJ} = 1:3:4$.

1752.- En un viver es planten arbres en els punts d'una quadrícula quadrada de $30\,\text{m}\times 40\,\text{m}$.

La distància entre els arbres al llarg i ample de la quadrícula és 1 m.
Un ratolí va de passeig per fora del viver.
Durant la passejada la distància del ratolí a l'arbre més proper és 1 m en cada moment.
Quina és la distància total que recorre el ratolí per fer tot el viver sense marxa enrere?.
KöMaL, C1339.

Solució:



Siga A un dels cantons del viver.
El ratolí recorre un arc de $\angle DAE = 150^{\circ}$ i radi 1.
Siga 30 m la llargària del viver.
Siga B el punt més proper a A en horitzontal.
Al voltant de B recorre un arc $\angle CBD = 60^{\circ}$.
El ratolí recorre en horitzontal i vertical del rectangle $2\cdot 29+2\cdot 39$ arcs de 60º.
Aleshores el ratolí recorre:
$4\cdot\angle DAE + 2\cdot 29\cdot 39\cdot\angle CBD$ arc de circumferència de radi 1:

$$4\cdot 60^{\circ}+2\cdot 29\cdot 39\cdot 150^{\circ} = 136032^{\circ} = \left(378+\frac{2}{3}\right)360^{\circ}.$$

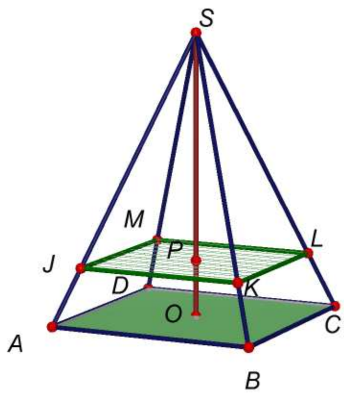
La longitud que recorre el ratolí és:

$$\left(378+\frac{2}{3}\right)2\pi\cdot 1 = \frac{2272\pi}{9} \approx 793.08\,\text{m}.$$

1753.- Una piràmide té 20 m d'altura i l'àrea de la base és $225m^2$.

Determineu a quina distància del vèrtex s'haurà de traçar un plànol paral·lel a la base a fi que la secció produïda tinga $144m^2$ d'àrea.
Determineu la proporció entre els volums de les dues piràmides resultats de la secció.

Solució:
La secció i el vèrtex de la piràmide formen una piràmide semblant a la inicial.
Siga $\overline{OS}=20$ altura de la piràmide inicial.
Siga $\overline{PS}=h$ altura de la piràmide que forma la secció i el vèrtex.
Si dos cossos són semblants les seues àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança.
Siguen $B=225$ base de la piràmide inicial i $b=144$ àrea de la secció.



$$\frac{b}{B}=\left(\frac{\overline{OS}}{\overline{PS}}\right)^2.$$

$$\frac{144}{225}=\left(\frac{h}{20}\right)^2$$. Resolent l'equació:

$h=16m$.

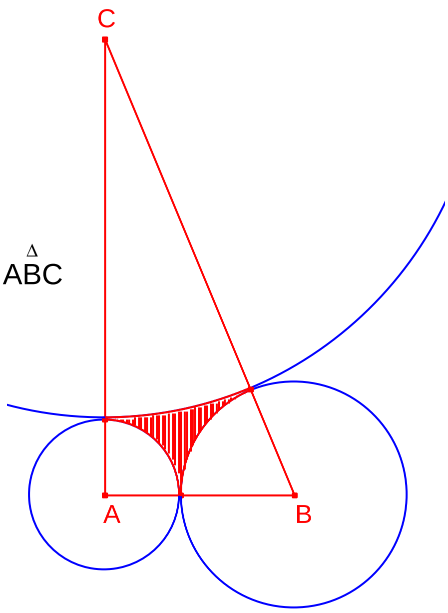
La raó de semblança de les dues piràmides és $\frac{h}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$.

Si dos cossos són semblants els seus volums són proporcionals al cub de la raó de semblança.
La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{menuda}}{V_{gran}}=\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}.$$

1754.- Siguen A, B, C els centres de les circumferències tangents dos a dos de radis 2, 3, 10, respectivament.

Determineu l'àrea del triangle curvilini format per la intersecció de les tres circumferències.



Solució:
Els costats del triangle format pels tres centres mesuren:

$a = 3 + 10 = 13$

$b = 2 + 10 = 12$.

$c = 2 + 3 = 5$

Notem que $a^2 = b^2 + c^2$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $A = 90^o$.

L'àrea del triangle curvilini és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de tres sectors.
Calculem l'angle dels sectors:

$A = 90^o$.

$B = \arcsin\frac{12}{13} \approx 67^o22'48.5''$.

$C = 90^o – B = 22^o37'11.5''$.

L'àrea del triangle curvilini és:

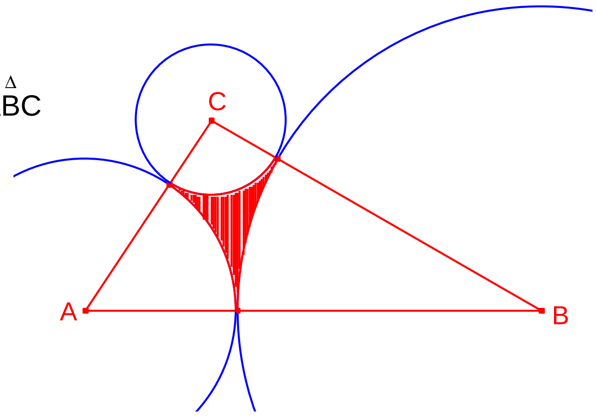
$$S = \frac{1}{2}12 \cdot 5 - \left(\frac{1}{4}\pi 2^2 + \pi 3^2 \frac{67^o22'48.5''}{360^o} + \pi 10^2 \frac{22^o37'11.5''}{360^o}\right) \approx 1.8268 .$$

1755.- Siguen A, B, C els centres de les circumferències tangents dos a dos de radis 4, 8, 2, respectivament.

Determineu l'àrea del triangle curvilini format per la intersecció de les tres circumferències.

Solució:
Els costats del triangle format pels tres centres mesuren:

$$a = 8 + 2 = 10$$
$$b = 2 + 4 = 6 \quad .$$
$$c = 4 + 8 = 12$$



Notem que $c^2 > a^2 + b^2$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és obtusangle.
L'àrea del triangle curvilini és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de tres sectors.
Calculem l'angle dels sectors:
Aplicant el teorema del cosinus:

$$10^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot \cos A .$$

$$\cos A = \frac{5}{9}, \quad A = \arccos\frac{5}{9} \approx 56º15'3.6'' .$$

$$6^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos B .$$

$$\cos B = \frac{13}{15}, \quad B = \arccos\frac{13}{15} \approx 29º55'35.2'' .$$

$$B = \arcsin\frac{12}{13} \approx 67º22'48.5'' .$$

$$C = 180º - (A + B) = 93º49'21.2'' .$$

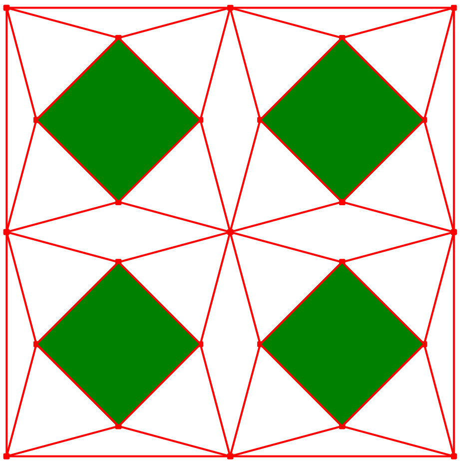
Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{28 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 4}}{4} = 8\sqrt{14} .$$

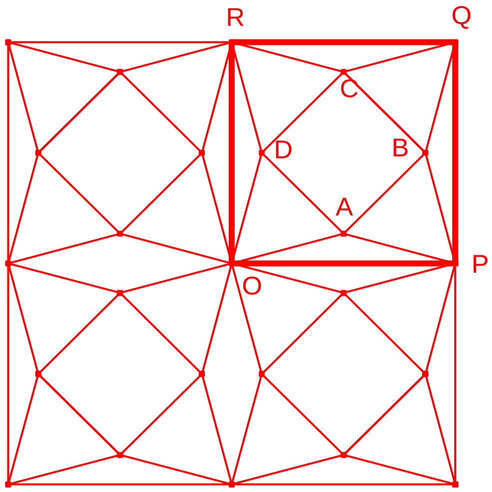
L'àrea del triangle curvilini és:

$$S = 8\sqrt{14} - \left(\pi 4^2 \frac{56º15'3.6''}{360º} + \pi 8^2 \frac{29º55'35.2''}{360º} + \pi 2^2 \frac{93º49'21.2''}{360º} \right) \approx 2.09 .$$

1756.- En el següent disseny de taulell quina proporció ocupa la zona acolorida del total.



Solució:



Considerem els quadrats OPQR, ABCD.

El triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és equilàter.

La proporció que ocupen els quatre quadrats acolorits del quadrat exterior és igual a la proporció de les àrees dels quadrats ABCD i OPQR.

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

$\angle OAP = 150^{\circ}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OAP}$:

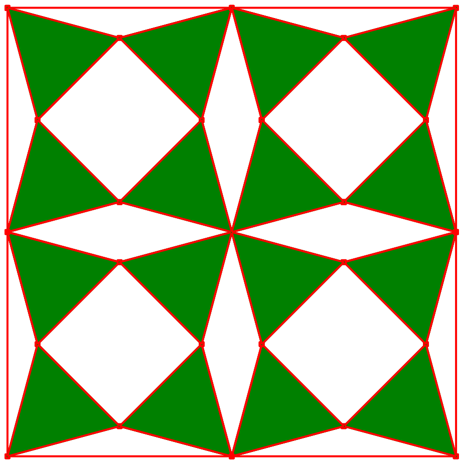
$\overline{OP}^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cdot \cos 150^{\circ}$.

$\overline{OP}^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)c^2$.

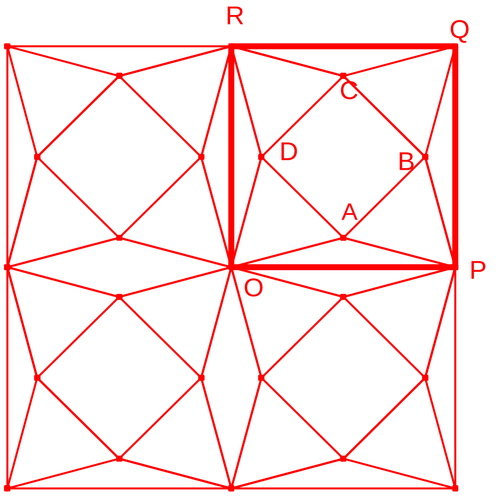
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{OPQR}} = \frac{c^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)c^2} = 2-\sqrt{3}.$$

1757.- En el següent disseny de taulell quina proporció ocupa la zona acolorida del total.



Solució:



Considerem els quadrats OPQR, ABCD i el triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és equilàter.

La proporció que ocupen els setze triangles equilàters acolorits del quadrat exterior és igual a la proporció de les àrees del quatre triangles equilàter de costat $\overline{AB}$ i l'àrea del quadrat OPQR.

Siga $\overline{AB} = c$.

$\angle OAP = 150^{\circ}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OAP}$:

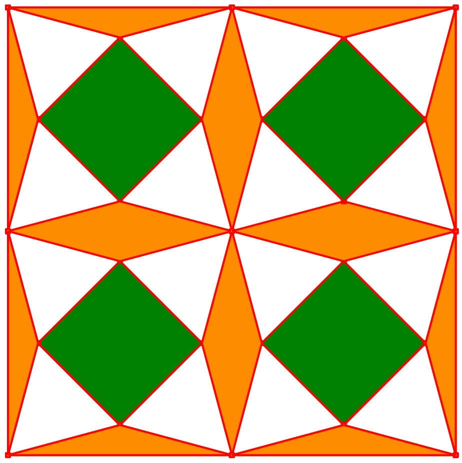
$$\overline{OP}^2 = c^2 + c^2 - 2c^2 \cdot \cos 150^{\circ}.$$

$$\overline{OP}^2 = \left(2+\sqrt{3}\right)c^2.$$

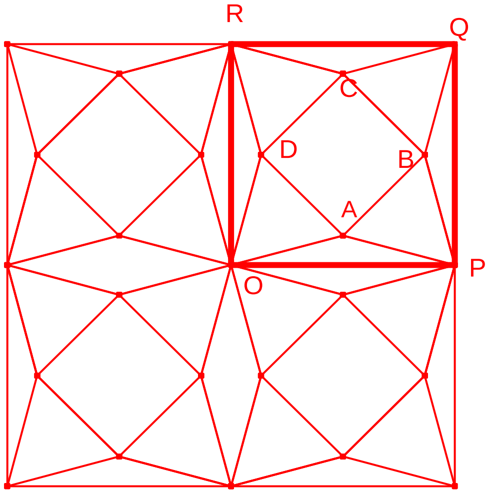
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{4S_{ABP}}{S_{OPQR}} = \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right)c^2} = 2\sqrt{3}-3.$$

1758.- En el següent disseny de taulell quina proporció ocupa la zona acolorida de verd i la zona acolorida de groc.



Solució:



Considerem els quadrats OPQR, ABCD i el triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és equilàter.

La proporció que ocupen els quatre quadrats verds i la zona groga és igual a la proporció entre un quadrat verd i quatre triangles $\overset{\Delta}{ABP}$

Siga $\overline{AB} = c$.

$\angle OAP = 150^{o}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}c^2 \cdot \sin 150^{o} = \frac{1}{4}c^2 .$$

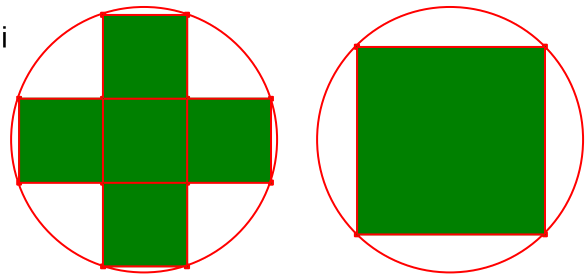
La proporció entre dels àrees pintades de verd i les pintades de groc és:

$$\frac{S_{ABCD}}{4 \cdot S_{ABP}} = \frac{c^2}{4 \cdot \frac{1}{4}c^2} = 1 .$$

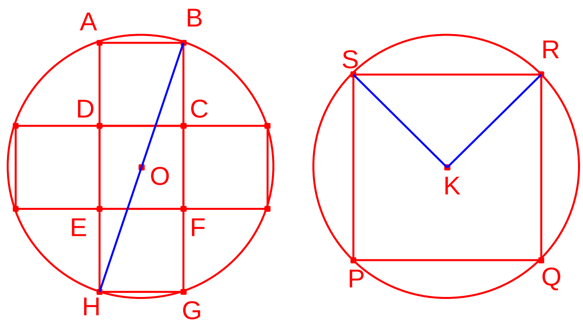
L'àrea pintada de verd és la mateixa que la pintada de groc.

1759.- En la figura les dues circumferències són iguals.

En la primera circumferència hi ha 5 quadrats iguals i en la segona 1 quadrat inscrit.
Calculeu la proporció de la suma de les àrees dels 5 quadrats i l'àrea del quadrat de la segona circumferència.



Solució:



Siguen ABCD, EFGH els quadrats superior i inferior de la circumferència de centre O.
Siga $\overline{AB} = c$. Siga $\overline{OB} = r$, radi de la circumferència.
$\overline{GH} = c$, $\overline{GB} = 3c$, $\overline{HB} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HGB}$:

$4r^2 = 10c^2$.

$r^2 = \frac{5}{2}c^2$.

Siga $\overline{SR} = d$ costat del quadrat PQRS inscrit en la circumferència de centre K i radi r:
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles:

$d^2 = 2r^2$.

L'àrea dels 5 quadrats de costat c és:

$S_{creu} = 5c^2$.

L'àrea del quadrat PQRS és:

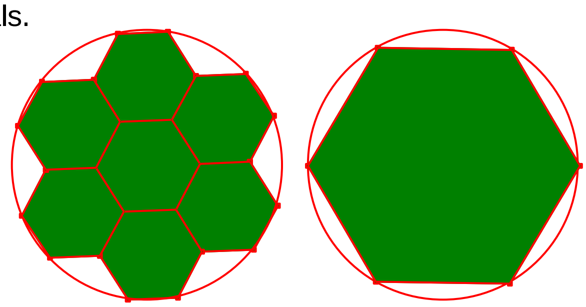
$S_{PQRS} = d^2 = 2r^2 = 5c^2$.

La proporció entre les àrees es:

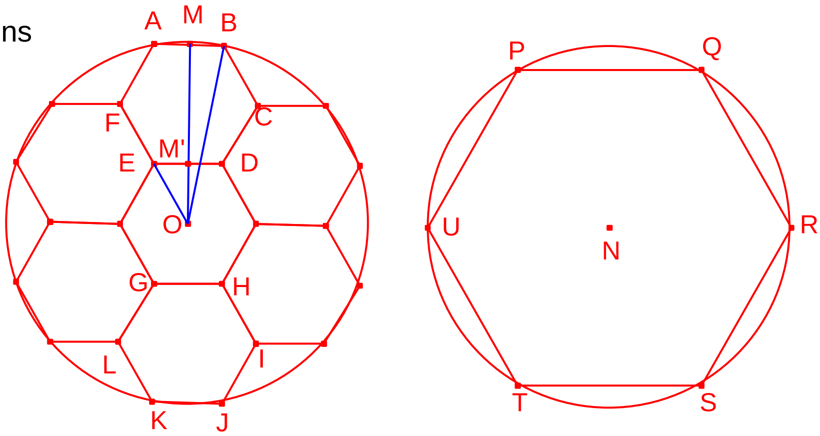
$\frac{S_{creu}}{S_{PQRS}} = 1$.

1760.- En la figura les dues circumferències són iguals.

En la primera circumferència hi ha 7 hexàgons regulars iguals i en la segona 1 hexàgon regular inscrit.
Calculeu la proporció de la suma de les àrees dels 7 hexàgons i l'àrea de l'hexàgon de la segona circumferència.



Solució:
Siguen ABCDEF, GHIJKL els hexàgons regulars superior i inferior de la circumferència de centre O.



Siga $\overline{AB} = c$. Siga $\overline{OB} = r$, radi de la circumferència.

$\overline{GH} = c$, $\overline{GB} = 3c$, $\overline{HB} = r$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga M' el punt mig del costat $\overline{DE}$.

$\overline{OE} = \overline{AB} = c$, $\overline{EM'} = \frac{1}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OM'E}$:

$\overline{OM'} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$\overline{OM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}c$. $\overline{MB} = \frac{1}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{HGB}$:

$r^2 = 7c^2$.

Siga $\overline{PQ} = r = \overline{NP}$ costat del quadrat PQRS inscrit en la circumferència de centre N i radi r:

L'àrea d'un hexàgon regular és igual a l'àrea de 6 triangles equilàter de costat igual al costat de l'hexàgon.

L'àrea dels 7 hexàgons de costat c és:

$$S_{7h} = 7\left(6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{21\sqrt{3}}{2}c^2.$$

L'àrea de l'hexàgon regular PQRSTU és:

$$S_{PQRSTU} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}7c^2 = \frac{21\sqrt{3}}{2}c^2.$$

La proporció entre les àrees es:

$$\frac{S_{7h}}{S_{PQRSTU}} = 1.$$