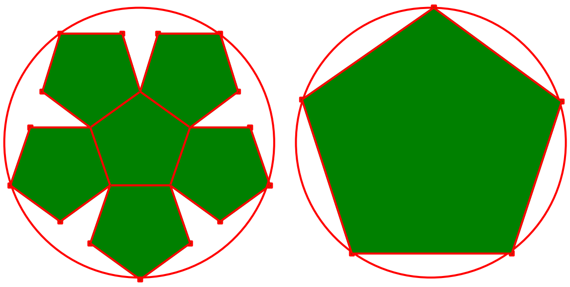
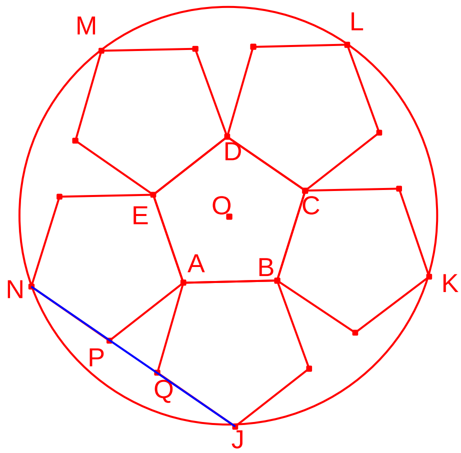
Problemes de Geometria per a l'ESO 177

1761.- En la figura les dues circumferències són iguals.
En la primera circumferència hi ha 6 pentàgons regulars iguals i en la segona 1 pentàgon regular inscrit.
Calculeu la proporció de la suma de les àrees dels 6 pentàgons i l'àrea del pentàgon de la segona circumferència.



Solució:

Siga ABCDE el pentàgon central de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen J, K, L, M, N els vèrtex dels 5 pentàgons que estan en la circumferència.
JKLMN formen un pentàgon regular inscrit en la circumferència.
Siguen P i Q els vèrtexs del pentàgons alineats amb NJ.



$\overline{AP} = \overline{AQ} = c$, $\angle APQ = \angle PQA = 72^o$.

El triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQA}$ és auri, aleshores:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Per tant, $\overline{PQ} = \frac{1}{\Phi} c$.

$$\overline{NJ} = 2c + \frac{1}{\Phi} c = (2+\Phi-1)c = (1+\Phi)c = \Phi^2 \cdot c.$$

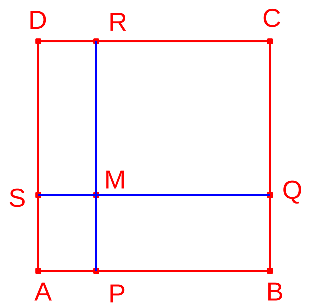
Els pentàgons regulars són semblants.
La proporció de les seues àrees és igual a la raó de semblança:

$$\frac{S_{JKLMN}}{S_{ABCDE}} = \left(\frac{\overline{NJ}}{\overline{AB}}\right)^2 = \Phi^4.$$

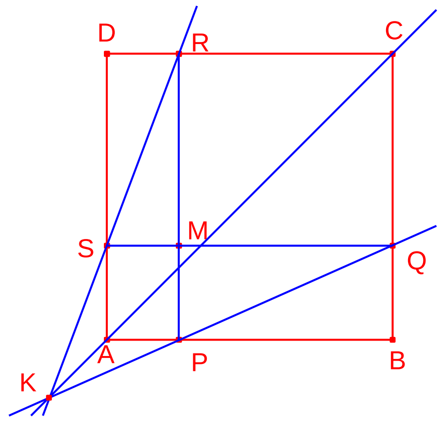
La proporció entre de la suma de les àrees dels 6 pentàgons i l'àrea del pentàgon de la segona circumferència és:

$$\frac{S_{JKLMN}}{6 \cdot S_{ABCDE}} = \frac{\Phi^4}{6} = \frac{7+3\sqrt{5}}{12} \approx 1.14235.$$

1762.- En la figura ABCD és un quadrat de costat 1, M és un punt interior al quadrat i els quadrilàters APMS i MQCR són rectangles.



Si $\overline{AP}=\frac{1}{4}$ i $\overline{AS}=\frac{1}{3}$ proveu que les rectes AC, PQ i RS són concurrents.



Solució 1:
Siga K la intersecció de les rectes AC i RS.
Siga K' la intersecció de les rectes AC i PQ.
Provarem que els $\overline{AK}=\overline{AK'}$.
Siga $\alpha=\angle DSR=\angle KSA$.

$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\overline{DR}}{\overline{DS}}=\frac{3}{8}$, $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{73}}$, $\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{73}}$.

$\angle KAS=135^{\circ}$, $\angle SKA=45^{\circ}-\alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{KAS}$:

$$\frac{\overline{AK}}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{\sin(45^{\circ}-\alpha)}.\quad \overline{AK}=\frac{1}{3}\frac{\sin\alpha}{\sin 45^{\circ}\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos 45^{\circ}}=\frac{1}{3}\frac{\frac{3}{\sqrt{73}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{8}{\sqrt{73}}-\frac{3}{\sqrt{73}}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Siga $\beta=\angle BPQ=\angle K'PA$.

$\mathrm{tg}\beta=\frac{\overline{BQ}}{\overline{PB}}=\frac{4}{9}$, $\sin\beta=\frac{4}{\sqrt{97}}$, $\cos\beta=\frac{9}{\sqrt{97}}$.

$\angle K'AS=135^{\circ}$, $\angle SK'A=45^{\circ}-\beta$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{K'AS}$:

$$\frac{\overline{AK'}}{\sin\beta}=\frac{\frac{1}{4}}{\sin(45^{\circ}-\alpha)}.\quad \overline{AK'}=\frac{1}{4}\frac{\sin\beta}{\sin 45^{\circ}-\beta}=\frac{1}{4}\frac{\frac{4}{\sqrt{97}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{9}{\sqrt{97}}-\frac{4}{\sqrt{97}}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Aleshores, les rectes AC, PQ i RS són concurrents.

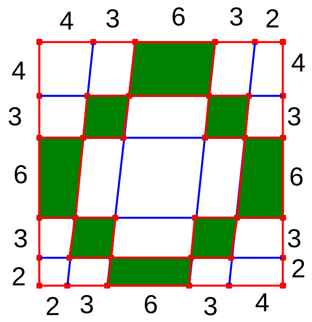
Solució 2:

Considerem $A(0,0)$, $P\left(\frac{1}{4},0\right)$, $Q\left(1,\frac{1}{3}\right)$, $R\left(\frac{1}{4},1\right)$, $S\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

Les equacions de les rectes AC, PQ i RS són:

$r_{AC}\equiv y=x$, $r_{PQ}\equiv y=\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}$, $r_{RS}\equiv y=\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}$.El sistema format per les equacions de les tres rectes té solució única, el punt $K\left(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right)$.

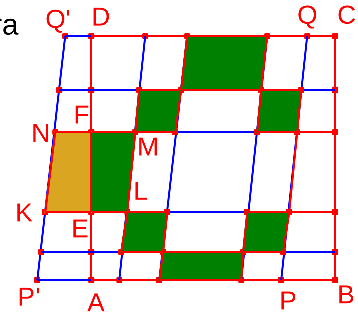
1763.- Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

L'àrea ombrejada està formada per 6 paral·lelograms de base i altura coneguts i dos trapezis.

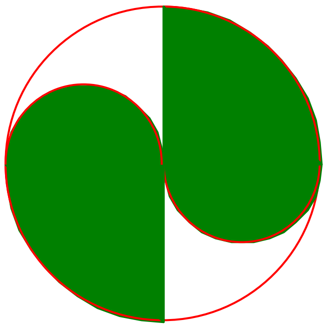
Amb un trasllat del trapezi PBCQ en la direcció $\overrightarrow{CD}$ els dos trapezis formen un paral·lelogram KLMN de base $\overline{KL} = 2 + 4 = 6$ i altura $\overline{EF} = 6$.



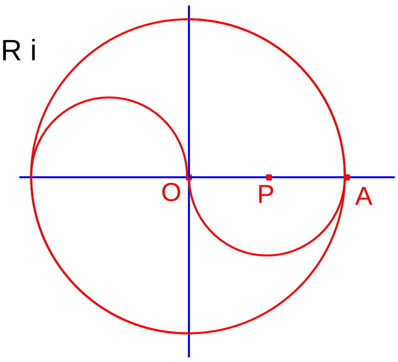
L'àrea ombrejada és:

$S = 6 \cdot 2 + 4(3 \cdot 3) + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 108$.

1764.- Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del cercle exterior.



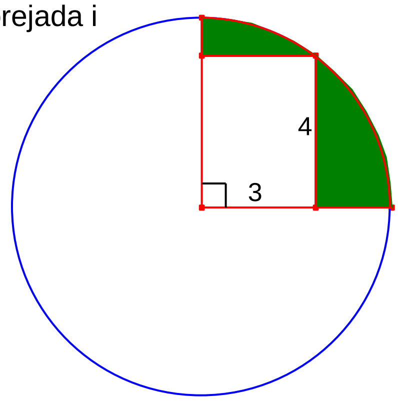
Solució:
Siga R el radi de la circumferència exterior.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea de dos sectors circulars de radi R i de 90º i dos semicercles de radi $\frac{R}{2}$.



L'àrea d'un cercle de radi $\frac{R}{2}$ és la quarta part de l'àrea del cercle de radi R.

Aleshores l'àrea total ombrejada és $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ de l'àrea del cercle exterior.

1765.- En la figura, calculeu la proporció entre l'àrea la zona ombrejada i l'àrea del cercle.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$, el radi del cercle és:

$\overline{OQ} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

L'àrea del cercle és:

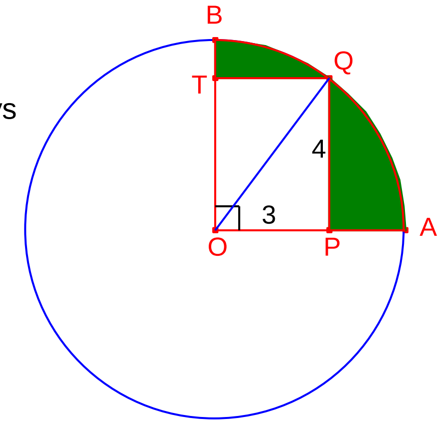
$S_{Cercle} = \pi 5^2 = 25\pi$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un quadrant de radi 5 menys l'àrea del rectangle OPQT:

$S_{ombrejada} = \frac{1}{4}\pi 5^2 - 3 \cdot 4 = \frac{25\pi}{4} - 12$.

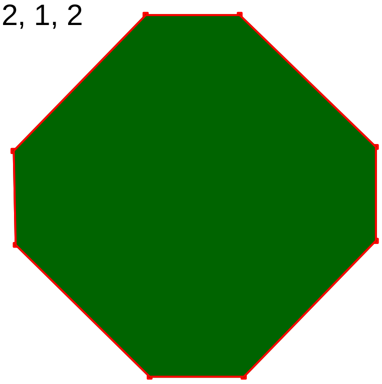
La proporció que cerquem és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{cercle}} = \frac{\frac{25\pi}{4} - 12}{25\pi} = \frac{25\pi - 48}{100\pi} \approx 0.0972.$$



1766.- Els costats d'un octògon equiangular mesuren 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 (en aquest ordre).

Calculeu la suea àrea.



Solució:

Siga l'octògon ABCDEFGH de costats $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} = x$,

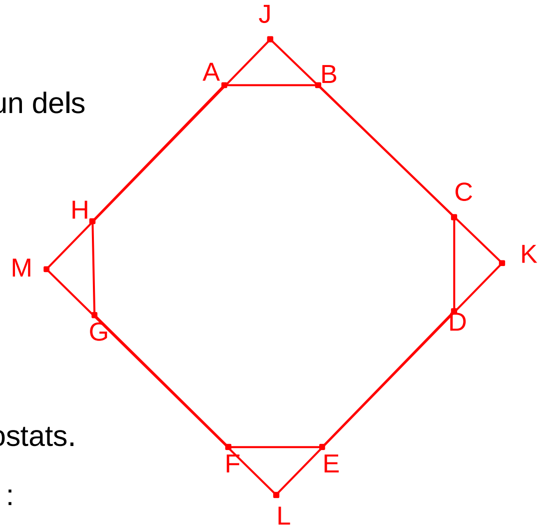
$\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{FG} = \overline{HA} = 2x$.

La suma dels angles d'un octògon convex és:

$180^o(8-2) = 1080^o$.

Si tots els angles de l'octògon mesuren el mateix, cadascun dels mesura:

$$A = \frac{1080^o}{8} = 135^o.$$



Les prolongacions dels costats $\overline{AH}$, $\overline{BC}$ és tallen en el punt J.

$\angle JAB = \angle JBA = 180^o - 135^o = 45^o$.

$\angle AJB = 90^o$.

Siga el quadrat JKLM format per les prolongacions dels costats.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJB}$:

$$\overline{AJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

$$\overline{JM} = \overline{HA} + 2\overline{AJ} = \left(2+\sqrt{2}\right)x.$$

L'àrea de quatre triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJB}$ és equivalent a l'àrea d'un quadrat de costat x.

L'àrea de l'octògon ABCDEFGH és igual a l'àrea del quadrat de costat $\overline{JM} = \left(2+\sqrt{2}\right)x$ menys l'àrea del quadrat de costat x.

$$S_{ABCDEFGH} = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 x^2 - x^2 = \left(5+4\sqrt{2}\right)x^2.$$

Generalització:

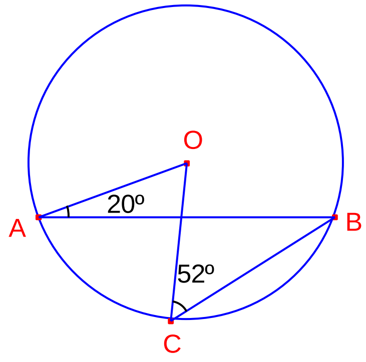
Els costats d'un octògon equiangular mesuren 1, k, 1, k, 1, k, 1, k (en aquest ordre).

Calculeu la suea àrea.

Solució:

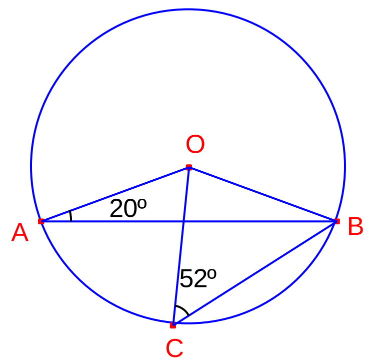
$$S_{ABCDEFGH} = k^2 + 2\sqrt{2}k + 1.$$

1767.- Siga la circumferència de centre O.



Siguen A, B, C punts de la circumferència tal que
$\angle OAB = 20^\circ$, $\angle OCB = 52^\circ$
Calculeu la mesura de l'angle $\angle ABC$.

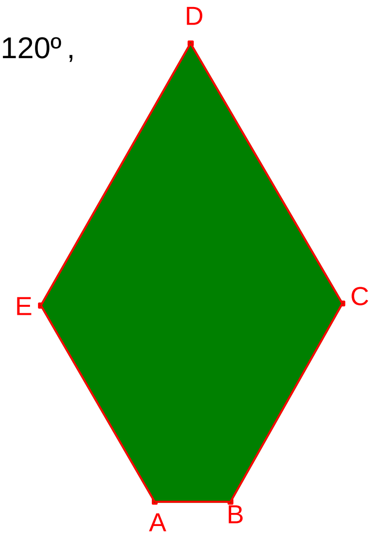
Solució:
Siga R el radi de la circumferència:
$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$.



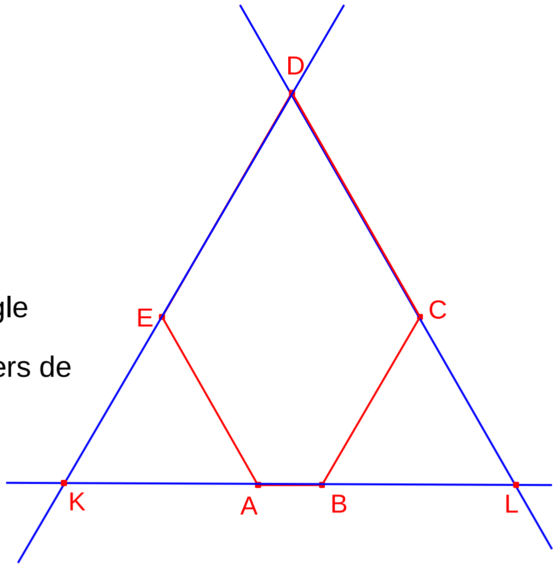
El triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle OBA = 20^\circ$.
El triangle $\overset{\Delta}{COB}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle OBC = 52^\circ$.
$\angle ABC = \angle OBC - \angle OBA = 52^\circ - 20^\circ = 32^\circ$.

1768.- En el pentàgon ABCDE de la figura, $A = B = C = E = 120^{\circ}$,

$\overline{AB} = 1$, $\overline{BC} = \overline{AE} = 3$, $\overline{CD} = \overline{DE}$, calculeu la seua àrea.



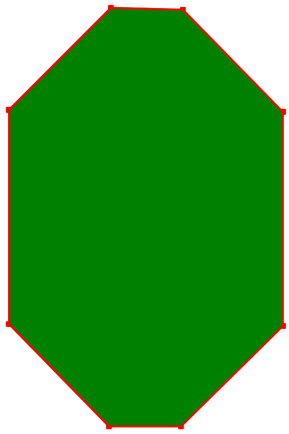
Solució:
La suma dels angles d'un pentàgon convex és:
$180^{\circ}(5-2) = 540$.
$D = 540^{\circ} - 4 \cdot 120^{\circ} = 60^{\circ}$.
La recta DE talla la recta AB en el punt K.
La recta CD talla la recta AB en L.
El triangle $\overset{\Delta}{KLD}$ és equilàter.
$\overline{AK} = \overline{AE} = 3$, $\overline{BL} = \overline{BC} = 3$.
$\overline{KL} = 7$.
L'àrea del pentàgon ABCDE és igual l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLD}$ menys l'àrea de dos triangles equilàters de costat 3:



$$S_{ABCDE} = \frac{\sqrt{3}}{4}7^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{4}3^2 = \frac{31\sqrt{3}}{4}.$$

1769.- Els costats d'un octògon equiangular mesuren 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2 (en aquest ordre).

Calculeu la suea àrea.



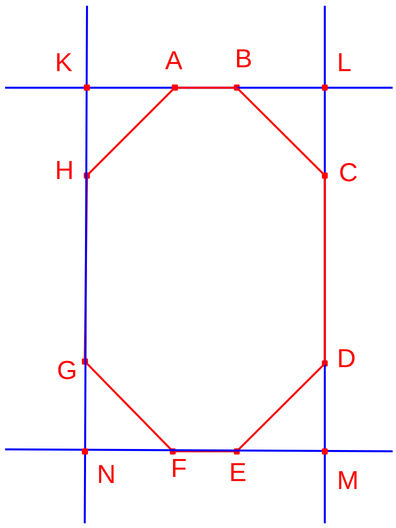
Solució:

Siga l'octògon ABCDEFGH de costats $\overline{AB}=\overline{EF}=1$,
$\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{FG}=\overline{HA}=2$. $\overline{CD}=\overline{GHF}=3$

La suma dels angles d'un octògon convex és:
$180^o(8-2)=1080^o$.

Si tots els angles de l'octògon mesuren el mateix, cadascun dels mesura:

$A=\dfrac{1080^o}{8}=135^o$.



Les prolongacions dels costats $\overline{Ab}$, $\overline{GH}$ és tallen en el punt K.
$\angle KAH=\angle KHA=180^o-135^o=45^o$.
$\angle AKH=90^o$.

Siga el rectangle KLMN format per les prolongacions dels costats.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKH}$:

$\overline{AK}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}2=\sqrt{2}$.

$\overline{KL}=\overline{AB}+2\overline{AK}=1+2\sqrt{2}$

$\overline{KN}=\overline{GH}+2\overline{AK}=3+2\sqrt{2}$.

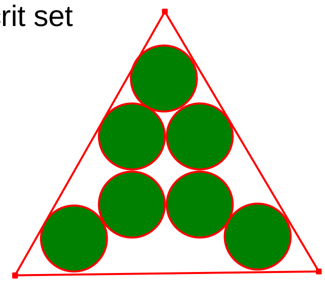
L'àrea de quatre triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKH}$ és equivalent a l'àrea d'un quadrat de costat 2.

L'àrea de l'octògon ABCDEFGH és igual a l'àrea del rectangle KLMN menys l'àrea del quadrat de costat 2.

$S_{ABCDEFGH}=\left(1+2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)-2^2=7+8\sqrt{2}$.

1770.- En el triangle equilàter de costat 1 de la figura s'han inscrit set circumferències d'igual radi i tangents dos a dos.

Determineu el radi de les circumferències.



Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat 1.
Siga r el radi de les set circumferències.
Siguen D, E, F, G centres de tres circumferències.
Siguen H, J i K punts de tangència.

$\angle GFE = \angle HDE = 120^o$.

$\angle HGF = \angle GHD = 90^o$.

$\overline{FG} = \overline{FE} = \overline{DE} = 2r$.

$\overline{AK} = \overline{CH} = \overline{PJ} = \overline{PK} = r\sqrt{3}$.

$\overline{HJ} = \overline{FE} = 2r$.

$\overline{AC} = 4\overline{AK} + \overline{HJ}$.

$1 = 4r\sqrt{3} + 2r$.

Resolent l'equació:

$$r = \frac{1}{4\sqrt{3}+2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{22} \approx 0.112005 .$$