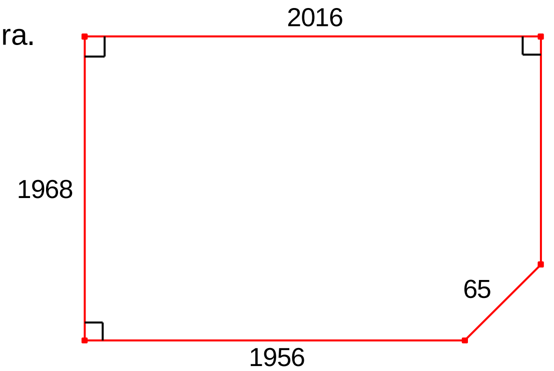
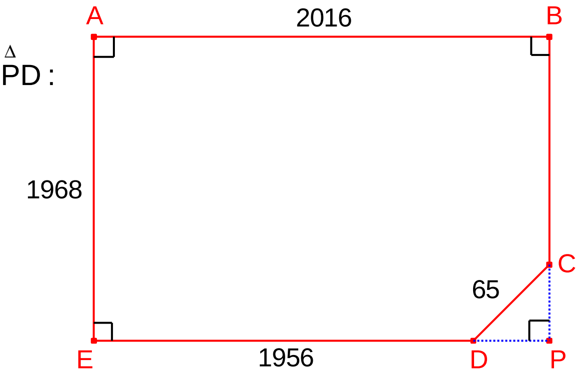
Problemes de Geometria per a l'ESO 178

1771.- Calculeu el perímetre de la figura.
KöMaL, K504.



Solució:
Considerem el pentàgon ABCDE.
Les rectes BC i DE s'intersecten en el punt P. $\angle CPD = 90^{\circ}$.
$\overline{PD} = \overline{AB} - \overline{DE} = 2016 - 1956 = 60$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CPD}$:
$\overline{CP} = \sqrt{65^2 - 60^2} = 25$.
$\overline{BC} = \overline{AE} - \overline{CP} = 1968 - 25 = 1943$.
El perímetre del pentàgon ABCDE és:
$P_{ABCDE} = 2016 + 1968 + 1956 + 65 + 1943 = 7948$.



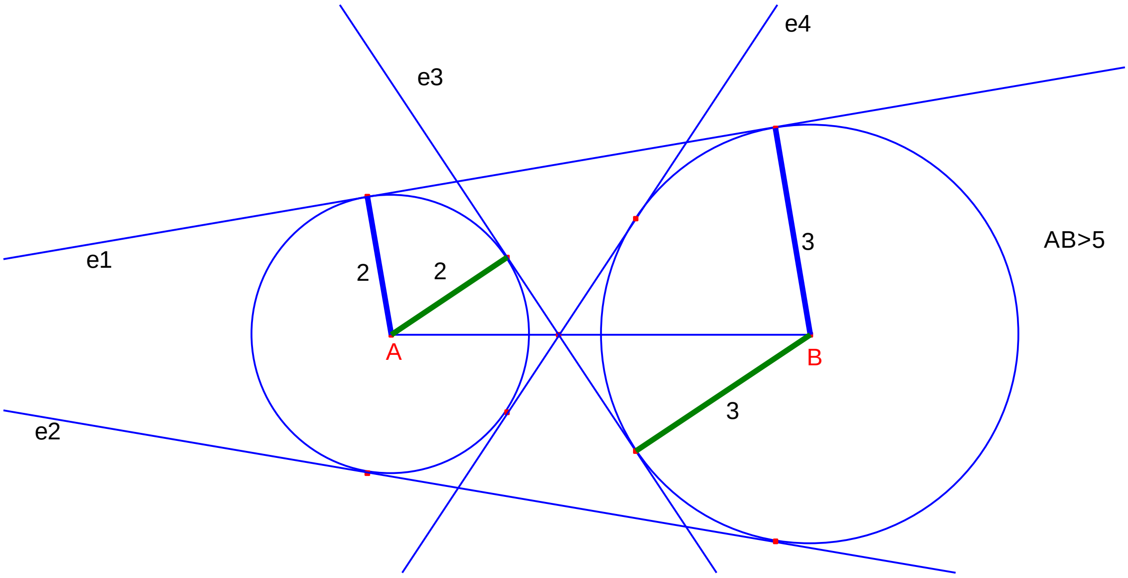
1772.- Donats dos punts A, B del plànol dibuixeu les rectes que estan a una distància 2 de A i 3 de B.

KöMaL, K501.

Solució:

Dibuixem la circumferència de centre A i radi 2. Dibuixem la circumferència de centre B i radi 3. Distingirem cinc casos, depenent de la posició relativa de les dues circumferències.

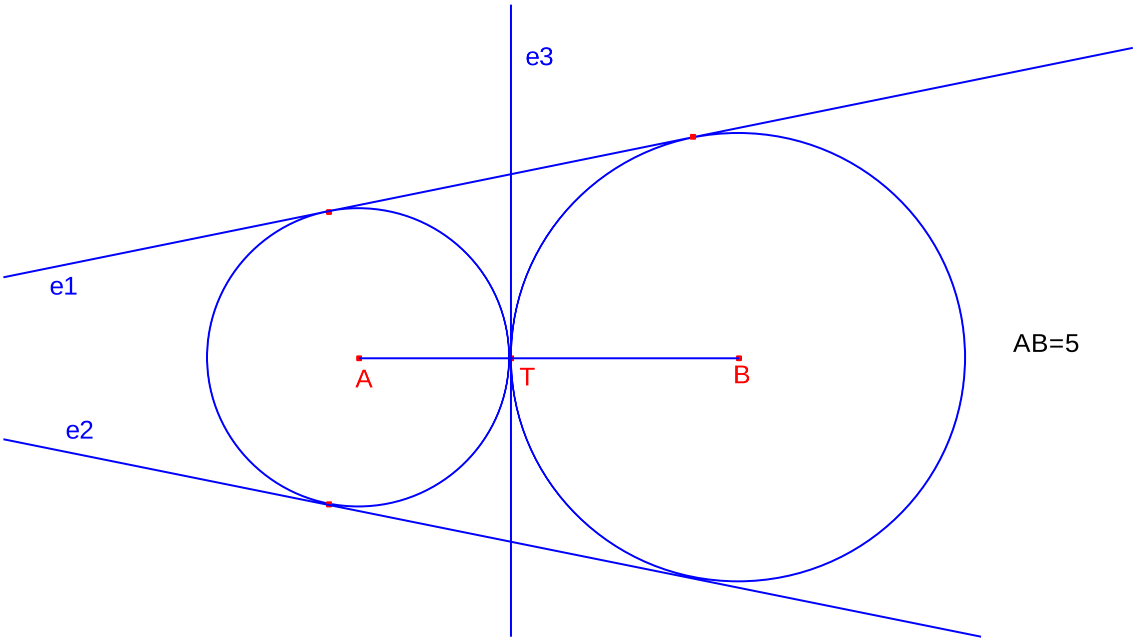
a) Suposem que $\overline{AB} > 5$, circumferències exteriors.



Dibuixem les rectes tangents a les dues circumferències.

El problema té 4 solucions: dues tangents exteriors i dues interiors.

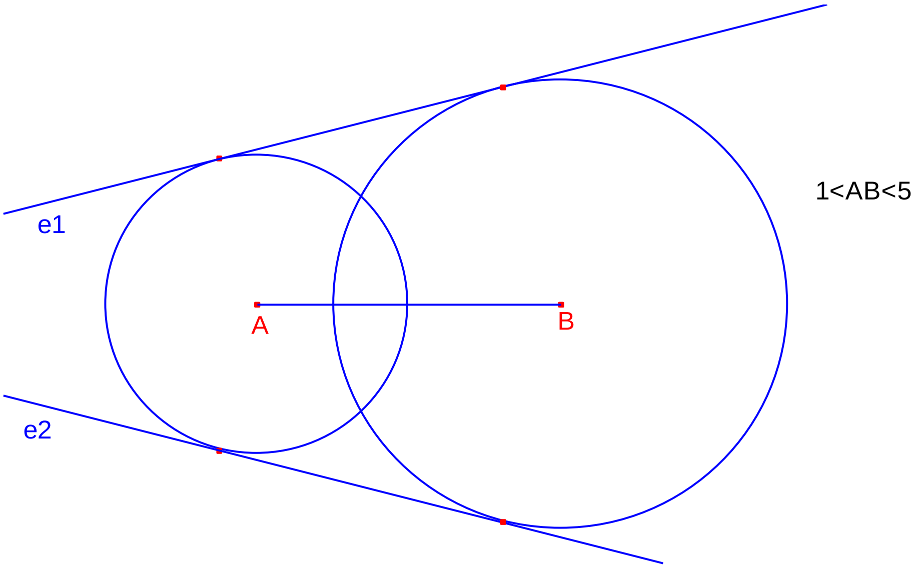
b) Suposem que $\overline{AB} = 5$, circumferències tangents exteriors.



Dibuixem les rectes tangents a les dues circumferències.

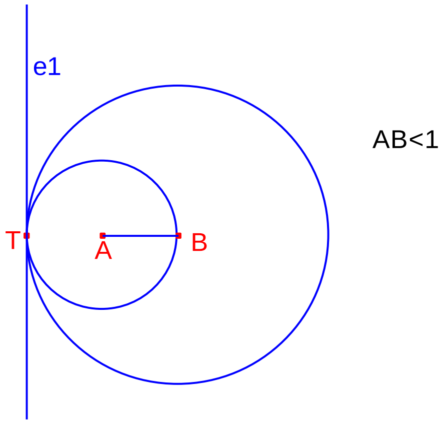
El problema té 3 solucions: dues tangents exteriors i la recta perpendicular $\overline{AB}$ que passa pel punt comú a les dues circumferències.

c) Suposem que $1 < \overline{AB} < 5$, circumferències secants.



Dibuixem les rectes tangents a les dues circumferències.
El problema té 2 solucions: dues tangents exteriors.

d) Suposem que $\overline{AB} = 1$, circumferències tangents interiors.

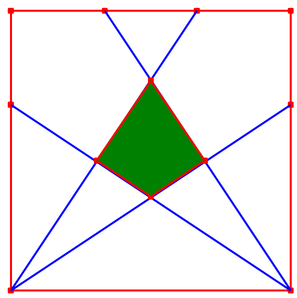


Dibuixem la recta tangent a les dues circumferències.
El problema té 1 solucions.

e)

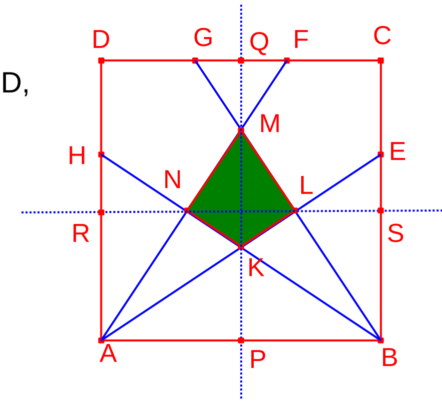
Suposem que $\overline{AB} < 1$, circumferències interiors.
El problema no té solució.

1773.- Des d'un vèrtexs d'un quadrat de costat 1 s'han dibuixat dos segments que divideixen el quadrat en tres parts d'igual àrea (dos triangles i un estel).



El procediment es repeteix amb un vèrtex adjacent. Quin és l'àrea de la intersecció dels dos cometes?
KöMaL, C1346.

Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.
Siguen els segments $\overline{AE}$, $\overline{AF}$ que divideixen el quadrat en tres parts d'igual àrea.
Siguen els segments $\overline{BG}$, $\overline{BH}$ que divideixen el quadrat en tres parts d'igual àrea.
Siga KLMN el cometa intersecció de dels cometes AECF, BGDH.
K, M pertanyen a la mediatriu del costat $\overline{AB}$.
Siguen P, Q els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.
Siguen R, S les projeccions de N sobre els costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivament.
$\angle ANH = 90^{\circ}$.



L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és la tercera part del quadrat ABCD, aleshores:
$\frac{1}{2}1\cdot\overline{DF}=\frac{1}{3}$. Per tant:
$\overline{DF}=\overline{AH}=\overline{CG}=\frac{2}{3}$. $\overline{DG}=\overline{GF}=\overline{CF}=\frac{1}{3}$. $\overline{QF}=\frac{1}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{HAB}$, $\overset{\Delta}{KPB}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales: $\overline{PK}=\frac{1}{2}\overline{AH}=\frac{1}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADF}$, $\overset{\Delta}{MQF}$ són semblants i de raó 4:1. Aplicant el teorema de Tales: $\overline{QM}=\frac{1}{4}\overline{AD}=\frac{1}{4}$.

$\overline{KM}=\overline{AD}-\left(\overline{PK}+\overline{QM}\right)=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{12}$.

Siga $\overline{RH}=\overline{LS}=a$, $\overline{RH}=b$, $\overline{AR}=c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADF}$, $\overset{\Delta}{ARN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$c=\frac{3}{2}a$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADF}$, $\overset{\Delta}{NRH}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$b=\frac{2}{3}a$.

$b+c=\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}a=\frac{2}{3}$. Resolent l'equació:

$a=\frac{4}{13}$.

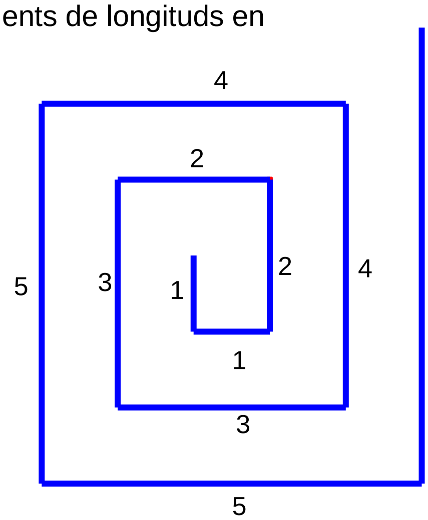
$\overline{NL}=\overline{AB}-2a=1-2\frac{4}{13}=\frac{5}{13}$.

L'àrea del cometa KLMN és: $S_{KLMN}=\frac{1}{2}\overline{KM}\cdot\overline{ML}=\frac{1}{2}\frac{5}{12}\frac{5}{13}=\frac{25}{312}$.

1774.- L'espiral de la figura està formada per trossos de segments de longituds en centímetres 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4,....

a) Si hi ha n trossos de corda quina és la longitud de l'espiral.

b) Si tinc 3 metres de corda quants segments màxims de l'espiral puc construir?. Quanta corda sobra?.



Solució:

a)

Si el nombre de segments n és parell la longitud de l'espiral és:

$$L_n = 2\left(1+2+3+......+\frac{n}{2}\right).$$

$$L_n = 2\left(\frac{1+\frac{n}{2}}{2}\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Si el nombre de segments n és imparell la longitud de l'espiral és:

$$L_n = 2\left(1+2+3+......+\frac{n-1}{2}\right) + \frac{n-1}{2} + 1.$$

$$L_n = 2\left(\frac{1+\frac{n-1}{2}}{2}\frac{n-1}{2}\right) + \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+2n+1}{4} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

b)

Suposem que el nombre de trossos n és imparell:

$L_n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \leq 300$. Resolem la inequació:

$n^2 + 2n + 1 \leq 1200$.

$n^2 + 2n - 1199 \leq 0$.

$1 \leq n \leq -1 + 20\sqrt{3} \approx 33.66$.

$1 \leq n \leq 33$.

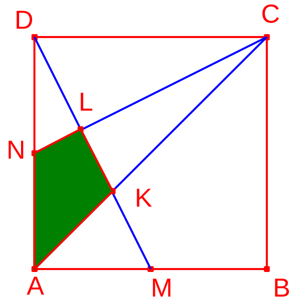
El nombre de trossos de l'espiral és $n = 33$.

La longitud de l'espiral es de $L_{33} = \left(\frac{33+1}{2}\right)^2 = 17^2 = 289\text{cm}$.

Sobren $300 - 289 = 11\text{cm}$.

L'últim segment de la corda mesura $\frac{33-1}{2} + 1 = 17\text{cm}$.

En el que resta no puc fer un altre segment.



1775.- En la figura, ABCD és un quadrat. M, N són els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, respectivament.

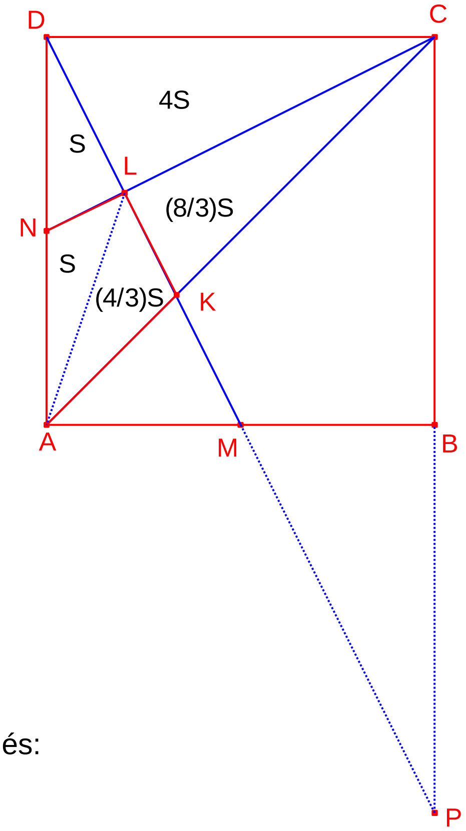
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter AKLN i del quadrat ABCD.

Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{CLD}$, $\overset{\Delta}{DLN}$ són semblants i de raó 2:1.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DLN}$, aleshores, $S_{CLD} = 4S$.

L'àrea del quadrat ABCD és $S_{ABCD} = 4 \cdot S_{CDN} = 4 \cdot 5S = 20S$.



Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$S_{ALN} = S_{DLN} = S$.

$S_{ANC} = S_{DNS} = 5S$.

$S_{ALC} = S_{ANC} - S_{ANL} = 4S$.

Siga P la intersecció de les rectes DK i BC.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAM}$, $\overset{\Delta}{PBM}$ són iguals.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{DAK}$, $\overset{\Delta}{PCK}$ són semblants de raó 1:2.

Aleshores, $\overline{CK} = 2 \cdot \overline{AK}$.

$\overline{AC} = 3 \cdot \overline{AK}$.

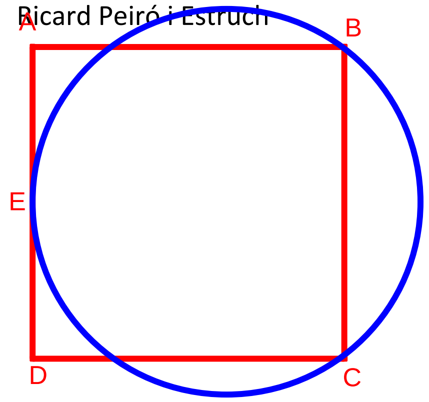
$$S_{AKL} = \frac{1}{3} S_{ALC} = \frac{1}{3} 4S = \frac{4}{3} S.$$

L'àrea del quadrilàter AKLN és:

$$S_{AKLN} = S_{ALN} + S_{AKL} = S + \frac{4}{3} S = \frac{7}{3} S.$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter AKLN i del quadrat és:

$$\frac{S_{AKLN}}{S_{ABCd}} = \frac{\frac{7}{3} S}{20 \cdot S} = \frac{7}{60}.$$



1776.- En la figura ABCD és un quadrat i E és el punt mig del costat $\overline{AD}$.

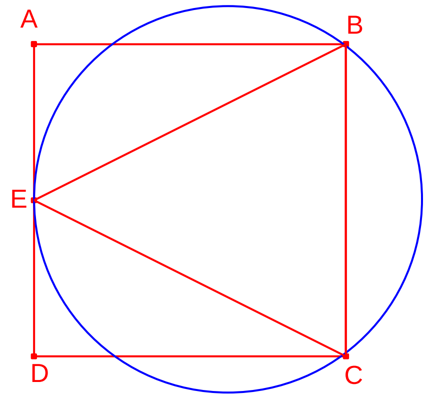
Determineu quin perímetre és major el del quadrat o el de la circumferència que passa pels punts B, C, E.

Solució 1:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$\overline{BE}=\overline{CE}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCE}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és la meitat de l'àrea del quadrat:

$S_{BCE}=\frac{1}{2}=\frac{\overline{BE}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CE}}{4R}$. $\frac{1}{2}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{4R}$. Resolent l'equació:

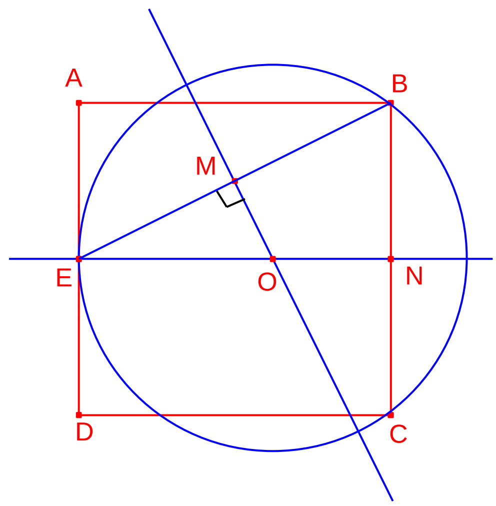
$R=\frac{5}{8}$.

El perímetre del quadrat és: $P_{ABCD}=4$.

El perímetre de la circumferència és: $P_{circumf}=2\pi\frac{5}{8}=\frac{5\pi}{4}\approx 3.92$.

Aleshores, el perímetre del quadrat és major que el perímetre de la circumferència.

Solució 2:



Siga O el centre de la circumferència .

O és la intersecció de les mediatrius als segments $\overline{BE}$ i $\overline{BC}$.

Siga $\overline{OE}=R$ radi de la circumferència.

Siga M el punt mig del segments $\overline{BE}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$\overline{BE}=\overline{CE}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. $\overline{EM}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAE}$, $\overset{\Delta}{EMO}$ són semblants. Aplicant el teorema de tales: $\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{R}$. Resolent l'equació: $R=\frac{5}{8}$.

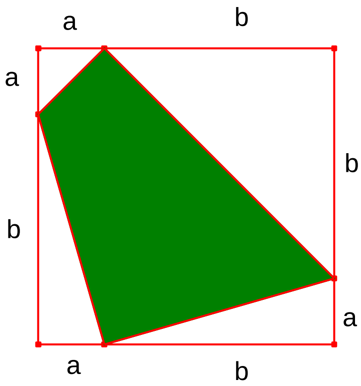
El perímetre del quadrat és: $P_{ABCD}=4$.

El perímetre de la circumferència és: $P_{circumf}=2\pi\frac{5}{8}=\frac{5\pi}{4}\approx 3.92$.

Aleshores, el perímetre del quadrat és major que el perímetre de la circumferència.

Sense calculadora: $\frac{P_{circumf}}{P_{ABCD}}=\frac{5\pi}{16}<\frac{5}{16}\frac{22}{7}<1$.

1777.- Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter interior i el quadrat exterior.



Solució:
L'àrea del quadrat exterior és:

$$S_{quadrat} = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

L'àrea de la superfície del quadrat exterior al quadrilàter està formada per 4 triangles rectangles. La seua àrea és:

$$S_{ext} = \frac{1}{2}a^2 + 2\left(\frac{1}{2}ab\right) + \frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab + b^2\right).$$

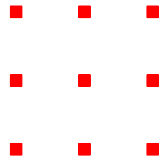
L'àrea del quadrilàter ombrejat és:

$$S_{quadrilàter} = S_{quadrat} - S_{ext} = a^2 + 2ab + b^2 - \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab + b^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 + 2ab + b^2\right).$$

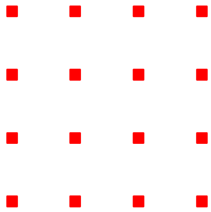
La proporció entre les àrees del quadrilàter ombrejat i el quadrat és:

$$\frac{S_{quadrilàter}}{S_{quadrat}} = \frac{1}{2}.$$

1778.- a) En una graella 3×3 quants tipus de trapezis isòsceles no paral·lelograms es poden construir.



b) En una graella 4×4 quants tipus de trapezis isòsceles no paral·lelograms es poden construir.



Calculeu les seues àrees.

Solució:
Per calcular les àrees utilitzarem la fórmula de Pick.

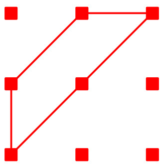
Teorema de Pick.

Si els vèrtexs d'un polígon pertanyen a una graella quadrangular l'àrea del polígon en funció de l'àrea de quadrat menut de la graella és:

$S = I + \frac{B}{2} - 1$, on I és igual als punts interiors al polígon. B els punts que pertanyen a la vora.

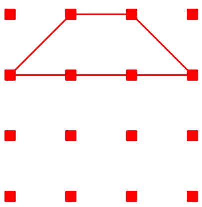
a)

Només se'n pot construir 1.

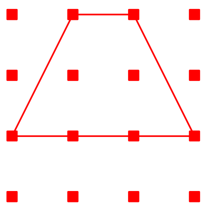


La seua àrea és $S = 0 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.

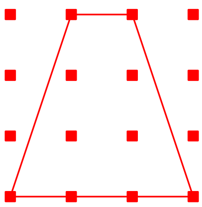
b)



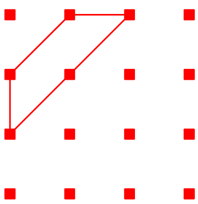
$S = 0 + \frac{6}{2} - 1 = 2$.



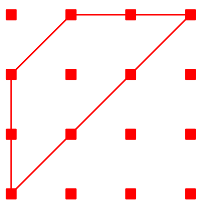
$S = 2 + \frac{6}{2} - 1 = 4$.



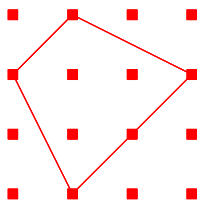
$S = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 6$.



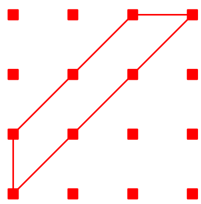
$S = 0 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.



$S = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4$.

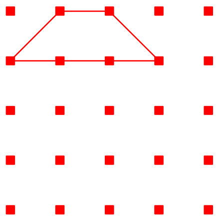


$S = 3 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{9}{4}$.

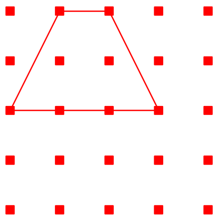


$S = 0 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$.

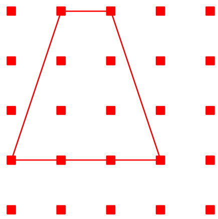
c)



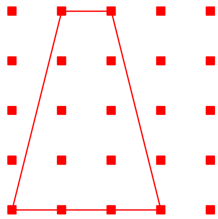
$S = 0 + \frac{6}{2} - 1 = 2$.



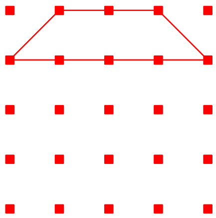
$S = 2 + \frac{6}{2} - 1 = 4$.



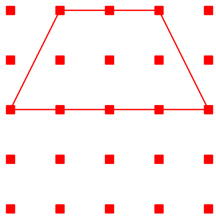
$S = 4 + \frac{6}{2} - 1 = 6$.



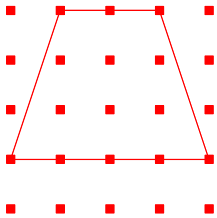
$S = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$.



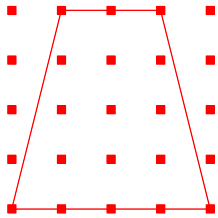
$S = 0 + \frac{8}{2} - 1 = 3$.



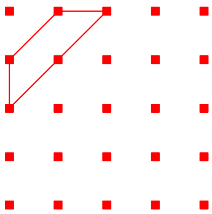
$S = 3 + \frac{8}{2} - 1 = 6$.



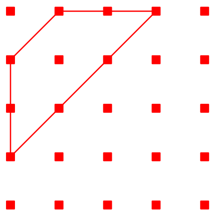
$S = 6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$.



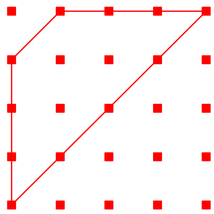
$S = 9 + \frac{8}{2} - 1 = 12$.



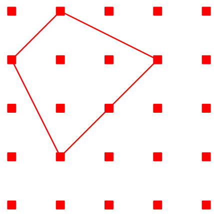
$S = 0 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.



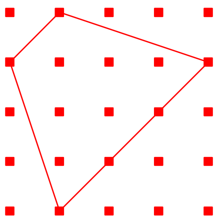
$S = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4$.



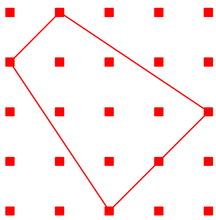
$S = 3 + \frac{11}{2} - 1 = \frac{15}{2}$.



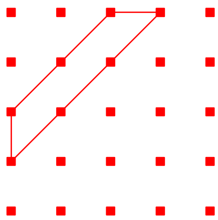
$S = 3 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{9}{2}$.



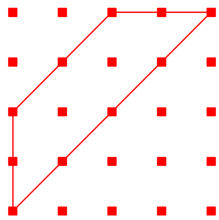
$S = 6 + \frac{6}{2} - 1 = 8$.



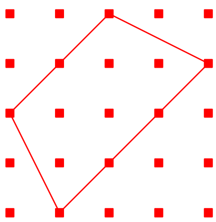
$S = 6 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{15}{2}$.



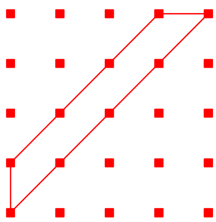
$S = 0 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{5}{2}$.



$S = 2 + \frac{10}{2} - 1 = 6$.

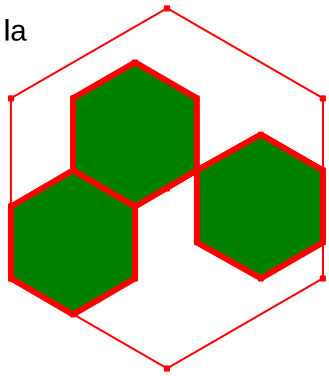


$S = 5 + \frac{7}{2} - 1 = \frac{15}{2}$.



$S = 0 + \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$.

1779.- Si els costats dels tres hexàgons menuts són 4 cm, quina és la relació entre l'àrea de la zona acolorida i l'àrea blanca de l'hexàgon regular gran?.



Olimpíada València 2016. Nivell B. Velocitat 3

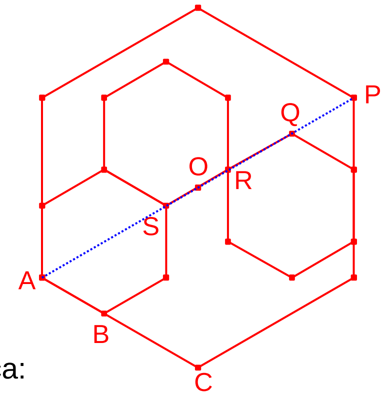
Solució:

Siga $\overline{AB} = \overline{SR} = \overline{RQ} = c = 4$ costats dels hexàgons menuts.

$\overline{AS} = 2c$.

La recta AS és diagonal de l'hexàgon gran ja que $\angle SAB = 60^{o}$.

Notem que $\overline{PQ} = \overline{QR} = c$.



La diagonal de l'hexàgon gran és:

$\overline{AP} = 5c$.

El costat de l'hexàgon gran és:

$$\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AP} = \frac{5}{2}c .$$

Els hexàgons regulars són semblants.

La raó de semblança de l'hexàgon menut i l'hexàgon gran és 2:5.

Les seues àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança:

$$\frac{S_{Hgran}}{S_{Hmenut}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} .$$

La proporció entre l'àrea blanca i l'àrea acolorida és:

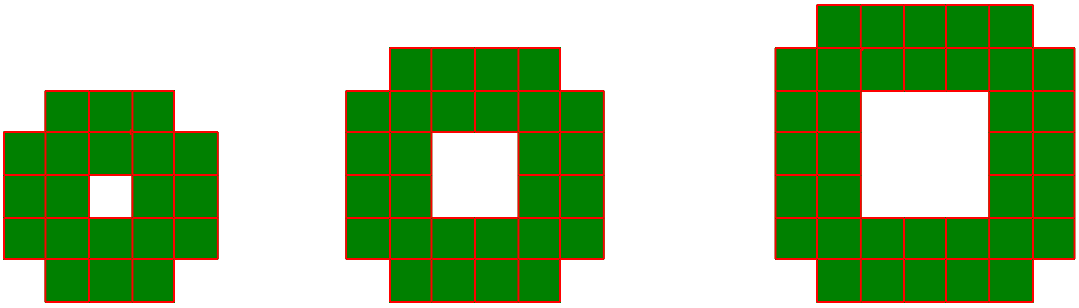
$$\frac{S_{blanca}}{S_{acolorida}} = \frac{S_{Hgran} - 3 \cdot S_{Hmenut}}{3 \cdot S_{Hmenut}} = \frac{1}{3}\frac{S_{Hmenut}}{S_{Hmenut}} - 1 = \frac{1}{3}\frac{25}{4} - 1 = \frac{13}{12} .$$

La proporció entre l'àrea acolorida i l'àrea blanca és:

$$\frac{S_{acolorida}}{S_{blanca}} = \frac{12}{13} .$$

1780.-

La figura mostra els tres primers diagrames d'una seqüència.
Cadascun dels quadradets mesura 1 cm.
Quina és l'àrea del desè diagrama de la seqüència?.
I del diagrama 2016?.



Olimpíada València 2016. Nivell A. Individual 5

Solució:
L'àrea del primer terme és:
L'àrea d'un quadrat de costat 5 menys un quadrat central, menys 4 quadrats que formen els cantons.

$S_1 = 5^2 - 1^2 - 4 = 20$.

L'àrea del segon terme és:
L'àrea d'un quadrat de costat 6 menys un quadrat central de costat 2, menys 4 quadrats que formen els cantons.

$S_2 = 6^2 - 2^2 - 4 = 28$.

L'àrea del tercer terme és:
L'àrea d'un quadrat de costat 7 menys un quadrat central de costat 3, menys 4 quadrats que formen els cantons.

$S_3 = 7^2 - 3^2 - 4 = 36$.

El terme general és:

$S_n = (n+4)^2 - n^2 - 4 = 8n + 12$.

El terme que fa 10 és:

$$\begin{array}{l} S_{10} = 14^2 - 10^2 - 4 = 92 \\ S_{10} = 8 \cdot 10 + 12 = 92 \end{array}.$$

El terme que fa 2016 és:

$$\begin{array}{l} S_{10} = 2020^2 - 2016^2 - 4 = 16128 \\ S_{10} = 8 \cdot 2016 + 12 = 16128 \end{array}.$$