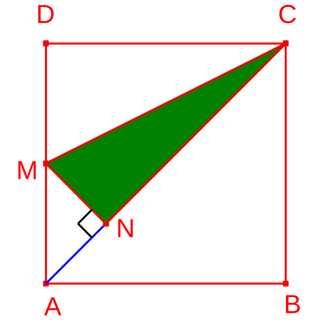
Problemes de Geometria per a l'ESO 179

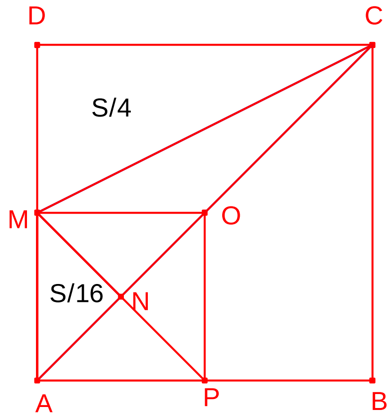
1781.- En la figura, ABCD és un quadrat. M és el punt mig del costat $\overline{AD}$ i $\overline{MN}$ és perpendicular a $\overline{AC}$.
Si l'àrea del quadrat és $120\ \text{cm}^2$ quina és l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:
Siga $S = 120\ \text{cm}^2$ l'àrea del quadrat ABCD.

$S_{CDM} = \frac{1}{4}S.$

Els triangles $\overset{\Delta}{CDM}$ $\overset{\Delta}{CDM}$ tenen la mateixa igual base i altura aleshores:



$S_{AMC} = S_{CDM} = \frac{1}{4}S$.

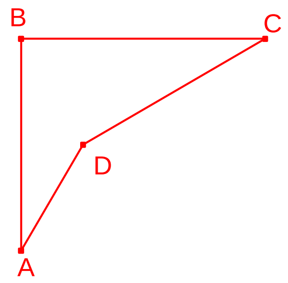
$S_{APOM} = \frac{1}{4}S$.

$S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{APOM} = \frac{1}{16}S$.

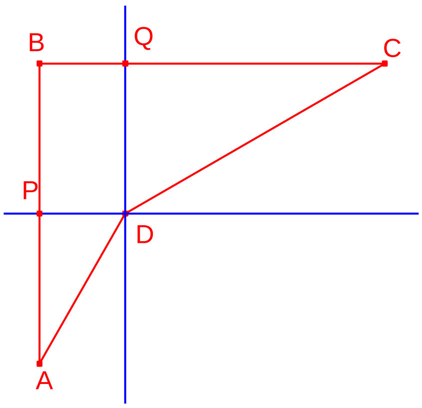
$S_{MNC} = S_{AMC} - S_{AMN} = \frac{1}{4}S - \frac{1}{16}S = \frac{3}{16}S$.

$S_{MNC} = \frac{3}{16}S = \frac{3}{16}120 = 22.5\ \text{cm}^2$.

1782.- En la figura, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{BC} = 2\overline{AD}$, $\angle BCD = 30^o$, $\angle ABC = 90^o$.
Demostreu que $\angle BAD = 30^o$.



Solució:
Siga $a = \overline{AB} = \overline{CD}$. Siga $\overline{AD} = b$.
Siguen P i Q, les projeccions de D sobre els segments $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, respectivament.



$\overline{DQ} = \overline{BP} = \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{1}{2}a$.

$\overline{AP} = a - \overline{BP} = \frac{1}{2}a$.

$\overline{CQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overline{BQ} = \overline{PD} = 2b - \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APD}$:

$$b^2 = \left(2b - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

$a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = 0$.
Dividint l'equació per :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 2\sqrt{3}\left(\frac{a}{b}\right) + 3 = 0.$$

Resolent l'equació:

$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

$a = b\sqrt{3}$.

$\overline{AP} = \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}b$.

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

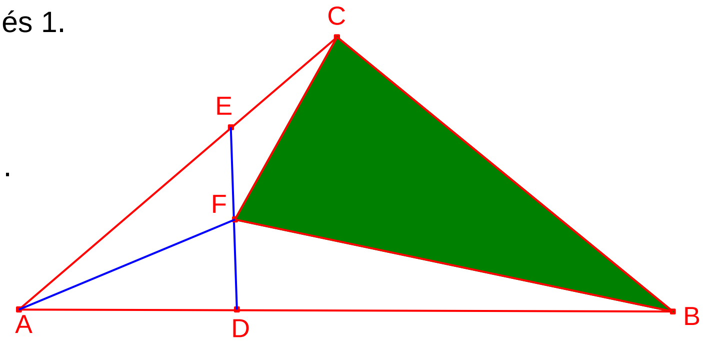
Aleshores, $\angle BAD = 30^o$.

1783.- En la figura, L'àera del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 1.

$\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{CE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$ i $\overline{DF} = \overline{FE}$.

Determineu l'àrea del triangle ombrejat $\overset{\Delta}{BFC}$.

Crux Mathematicorum CC187.



Solució:

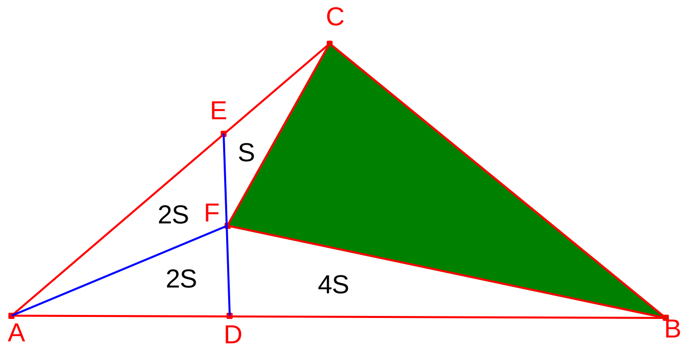
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CEF}$.

$S_{AEF} = 2 \cdot S_{CEF} = 2S$.

$S_{AFD} = S_{AEF} = 2S$.

$S_{BFD} = 2 \cdot S_{AFD} = 4S$.



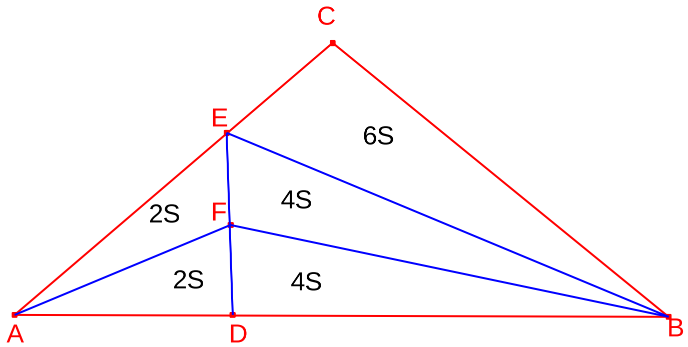
$S_{EFB} = S_{BFD} = 4S$.

$S_{AEB} = 12S$.

$S_{CEB} = \frac{1}{2} S_{AEB} = 6S$.

$S_{ABC} = 18S = 1$.

$S = \frac{1}{18}$.

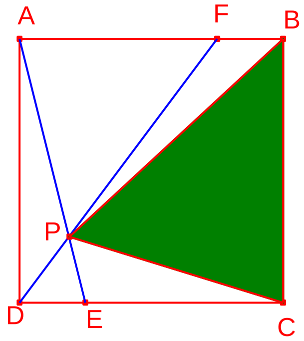


$$S_{BFC} = S_{ABC} - (S_{ACF} + S_{ABF}) = 1 - 9S = 1 - 9\frac{1}{18} = \frac{1}{2}.$$

1784.- En la figura, ABCD és un quadrat. $\overline{DE}=\frac{1}{4}\overline{CD}$, $\overline{BF}=\frac{1}{4}\overline{AB}$.

Siga P la intersecció dels segments $\overline{AE}$, $\overline{DF}$.

Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ i el quadrat ABCD.



Solució:
Dos triangles que triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BFP}$.

$S_{AFP}=3\cdot S_{BFP}=3S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{DEP}$, $\overset{\Delta}{FAP}$ són semblants i la raó de semblança és $\overline{DE}:\overline{AF}=1:3$.

Aleshores les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança

$S_{DEP}=\left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{FAP}=\frac{1}{3}S$.

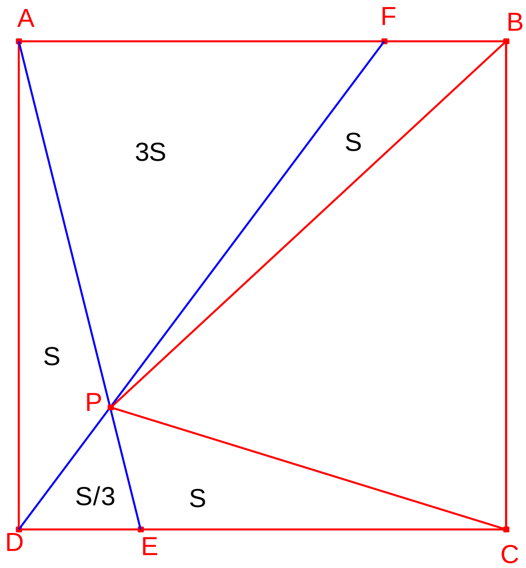
$\overline{AP}=3\cdot\overline{PE}$, aleshores:

$S_{ADP}=3\cdot S_{DEP}=S$.

$S_{CEP}=3\cdot S_{DEP}=S$.

L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD}=8\cdot S_{ADE}=8\left(\frac{4}{3}S\right)=\frac{32}{3}S$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{CEP}$:

$S_{BCP}=\frac{32}{3}S-\left(4S+\frac{4}{3}S+S\right)=\frac{13}{3}S$.

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ i el quadrat ABCD és:

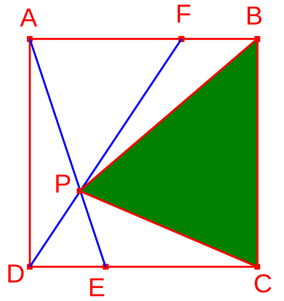
$$\frac{S_{BCP}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{13}{3}S}{\frac{32}{3}S}=\frac{13}{32}.$$

Problema

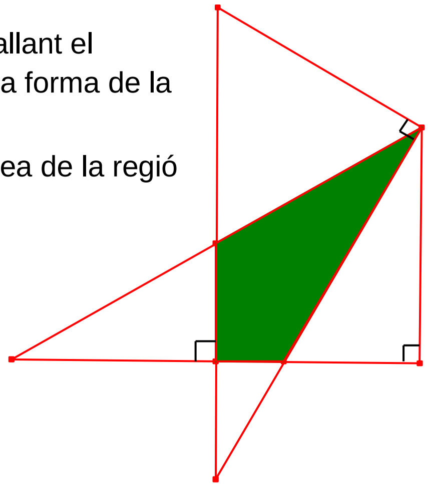
En la figura, ABCD és un quadrat. $\overline{DE}=\frac{1}{3}\overline{CD}$, $\overline{BF}=\frac{1}{3}\overline{AB}$.

Siga P la intersecció dels segments $\overline{AE}$, $\overline{DF}$. Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BCP}$ i el quadrat ABCD.

Solució: $\frac{S_{BCP}}{S_{ABCD}}=\frac{7}{18}$

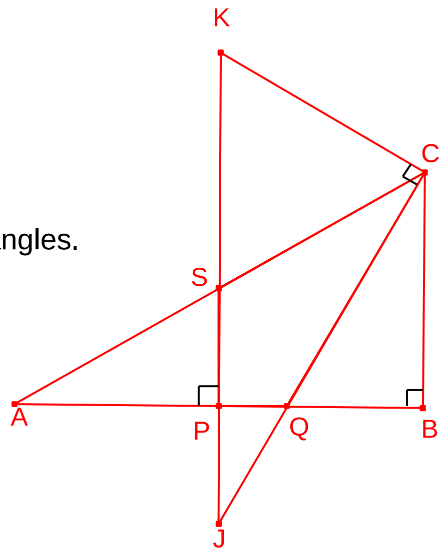


1785.- Organitzem dues meitats d'un triangle equilàter (tallant el triangle equilàter al llarg d'una altura elevacions TIC) en la forma de la figura.
Si l'àrea del triangle equilàter és de 600cm^2 calculeu l'àrea de la regió comuna als dos triangles rectangles.
Crux, CC 182.



Solució:

Siguen $\overset{\Delta}{ABC}$ $(B=90^o, A=30^o, C=60^o)$, $\overset{\Delta}{JCK}$ $(C=90^o, J=30^o, K=60^o)$ els dos triangles rectangles.



$S_{ABC}=\frac{1}{2}600=300$.

Siga $c=\overline{BC}=\overline{CK}$.

Aleshores, $\overline{AC}=\overline{JK}=2c$. $\overline{AB}=\overline{JC}=c\sqrt{3}$.

Siga PQCS el quadrilàter format per la intersecció dels dos triangles.

$\angle ASP=\angle KSC=60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{SCK}$ és equilàter.

$\overline{SC}=\overline{CK}=c$.

Aleshores, $\overline{AS}=c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ i de raó $\overline{AS}:\overline{AC}=1:2$.

Aleshores, $S_{APS}=\left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{ABC}=\frac{1}{4}300=75$.

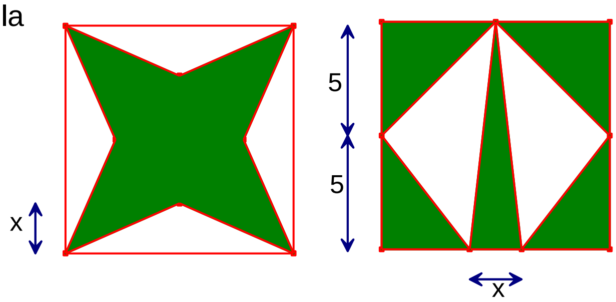
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CBQ}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ i de raó $\overline{BC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}$.

Aleshores, $S_{CBQ}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 S_{ABC}=\frac{1}{3}300=100$.

L'àrea del quadrilàter PQCS és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ menys la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{CBQ}$:

$S_{PQCS}=S_{ABC}-(S_{APC}+S_{CBQ})=300-(75+100)=125\,\text{cm}^2$.

1786.- En la figura, els dos quadrats són iguals i la zona ombrejada dels dos quadrats és igual.
Determineu el valor de x.
Quina és l'àrea ombrejada en cadascun dels quadrats.



Solució:

El quadrat té àrea $S_{quadrat} = 10^2 = 100$.

L'àrea de la zona ombrejada del quadrat de l'esquerra és igual a l'àrea del quadrat menys la suma de les àrees de 4 triangles de costats 10, x:

$$S_e = 100 - 4 \cdot \frac{1}{2} 10 \cdot x = 100 - 20x.$$

L'àrea de la zona ombrejada del quadrat de la dreta és igual a l'àrea d'un quadrat de costat 5, l'àrea d'un rectangle de costats 5, $\frac{10-x}{2}$ i l'àrea d'un triangle de base x i altura 10:

$$S_d = 5^2 + 5\frac{10-x}{2} + \frac{1}{2}10 \cdot x = 50 + \frac{5}{2}x.$$

Les àrees ombrejades són iguals, aleshores:

$$100 - 20x = 50 + \frac{5}{2}x.$$

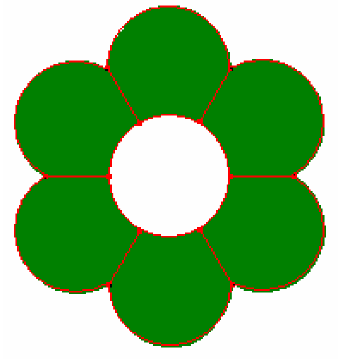
Resolent l'equació:

$$x = \frac{20}{9}.$$

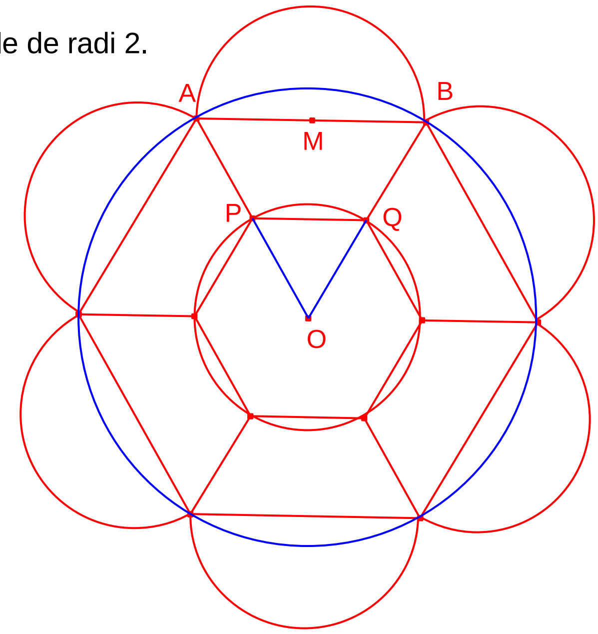
L'àrea ombrejada en cadascun dels quadrats és:

$$S_e = 100 - 20\frac{20}{9} = \frac{500}{9}.$$

1787.- El cor de la flor és un cercle de radi 1.
El contorn exterior dels pètals són semicercles tal que els centres són els punts migs dels costats d'un hexàgon regular inscrit en un cercle de radi 2.
Calculeu l'àrea total que formen els pètals (la regió ombrejada).



Solució:
Siga O el punt central de la flor.
Siga $\overline{OP} = 1$ radi del centre de la flor.
Siga $\overline{AB} = 2$ costat de l'hexàgon inscrit en el cercle de radi 2.
$\overline{OA} = 2$.
Els semicercles exteriors dels pètals tenen radi 1.



L'àrea de la zona ombrejada és igual a l'àrea d'un hexàgon de costat 2, més 2 cercles de radi 1.

$$S_{\text{pètals}} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}2^2 - 2\cdot\pi\cdot 1^2 = 6\sqrt{3} - 2\pi \approx 4.11.$$

1788.- Siga P un punt interior al quadrat ABCD.
Les distàncies de P als vèrtexs A i D i al costat $\overline{BC}$ són iguals a 10cm.
Determineu la mesura del costat del quadrat.

Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.

$\overline{AP} = \overline{DP} = 10$, aleshores P pertany a la mediatriu del costat $\overline{AD}$.

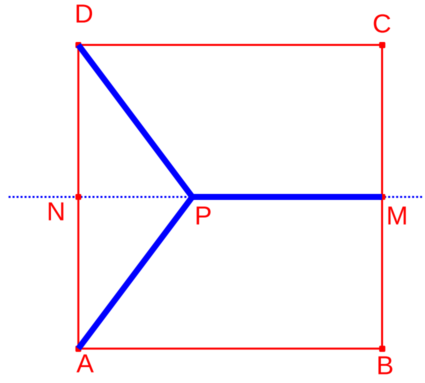
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{AD}$.

MN és la recta mediatriu al costat $\overline{AD}$.

$\overline{PM} = 10$, distància de P al costat $\overline{BC}$.

$\overline{PN} = c - 10$, $\overline{AN} = \frac{1}{2}c$.

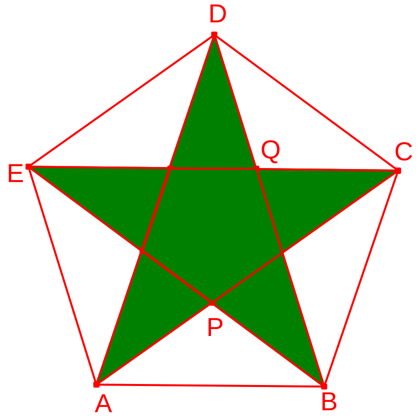


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANP}$:

$10^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + (c-10)^2$. Simplificant:

$\frac{5}{4}c^2 - 20c = 0$. Resolent l'equació:

$c = 16cm$.



1789.- Siga ABCDE un pentàgon regular.

Siga P la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$.

Siga Q la intersecció de $\overline{BD}$ i $\overline{CE}$.

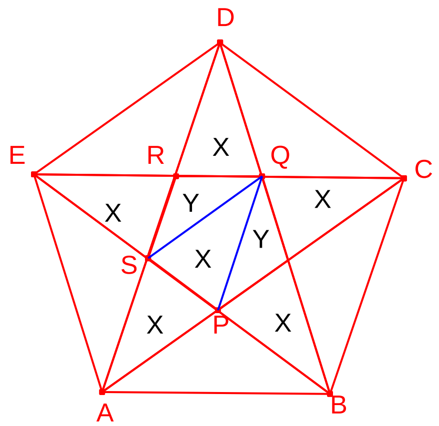
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter APQD i el polígon estellat ACEBD.

Solució:

Siga X l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APS}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APS}$, $\overset{\Delta}{QPS}$ són iguals.

Siga $Y = \frac{1}{\Phi} X$ l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{QRS}$.



L'àrea del pentàgon estrellat ACEBD és:

$S_{ACEBD} = 6X + 2Y$.

L'àrea del quadrilàter APQD és:

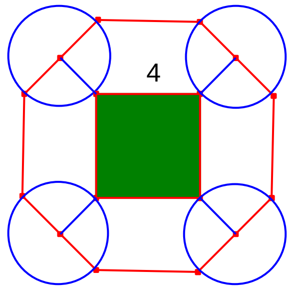
$S_{APQD} = 3X + Y$.

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{APQD}}{S_{ACEBD}} = \frac{1}{2}.$$

Ricard Peiró i Estruch

1790.- El costat del quadrat central de la figura mesura 4 cm.



Calculeu l'àrea de l'octògon regular.

Concurso Primavera 2016. Nivell 3.

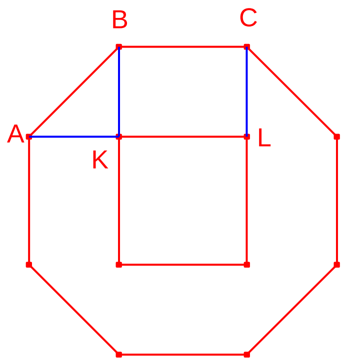
Solució:

Siga $\overline{KL} = 4$ costat del quadrat. Central.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{KL} = 4$, costat de l'octògon regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKB}$:

$\overline{AK} = \overline{BK} = 2\sqrt{2}$.



L'àrea de l'octògon regular és igual a la suma de les àrees de dos quadrats de costat $\overline{AK}$, quatre rectangles BCLK i un quadrat de costat $\overline{KL} = 4$.

$S_{Octògon} = 2 \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(4 \cdot 2\sqrt{2}\right) + 4^2 = 32\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 77.25\,cm^2$.