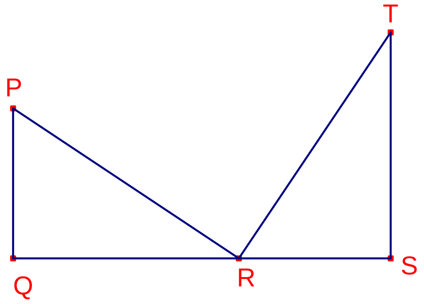
Problemes de Geometria per a l’ESO 18

171.- En el dibuix $\overline{PQ}=8$, $\overline{TS}=12$ i $\overline{QS}=20$. Determineu la mesura del segment $\overline{QR}$ si l’angle $\angle PRT$ és recte.



Solució:

Siga $x=\overline{QR}$. Aleshores, $\overline{RS}=20-x$.

Si $\angle PRT$ és recte els angles $\angle QRP$ i $\angle TRS$ són complementaris, aleshores els triangles rectangles $P\overset{\Delta}{Q}R$, $R\overset{\Delta}{S}T$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

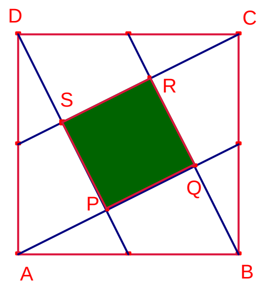
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}}=\frac{\overline{RS}}{\overline{TS}}.$$

$$\frac{8}{x}=\frac{20-x}{12}.$$

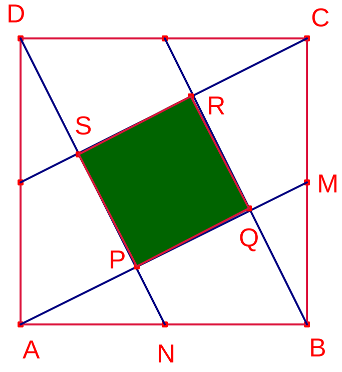
$x^2-20x+96=0$. Resolent l’equació.

$x=\overline{QR}=12$, $x=\overline{QR}=8$.

172.- Siga el quadrat ABCD de costat 1. S'uneixen els vèrtexs amb els punts migs dels costats del quadrat formant el quadrat PQRST. Determineu l'àrea del quadrat PQRS.



Solució:



Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APN}$, $\overset{\Delta}{AQB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AN}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{NB}}$, aleshores, $\overline{AP} = \overline{PQ}$.

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{BQ}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{BQM}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{QM}}{\overline{BQ}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$, aleshores, $\overline{QM} = \dfrac{1}{2}\overline{BQ} = \dfrac{1}{2}\overline{PQ}$.

$$\overline{AM} = \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QR} = \frac{5}{2}\overline{PQ} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad (2)$$

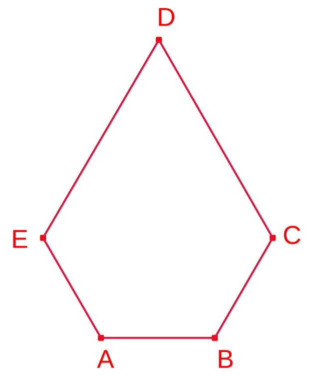
Igualant les expressions (1), (2):

$\dfrac{5}{2}\overline{PQ} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$. Aleshores, $\overline{PQ} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

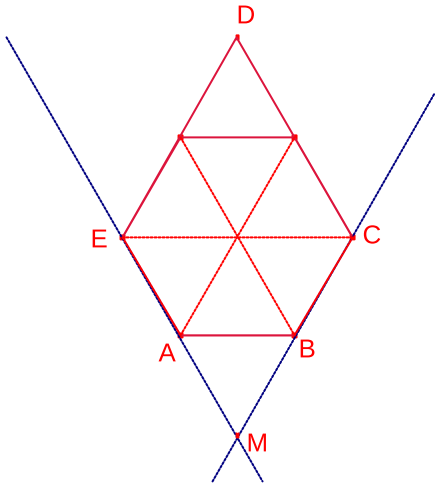
L'àrea del quadrat PQRS és:

$S_{PQRS} = \overline{PQ}^2 = \dfrac{1}{5}$.

173.- Siga el pentàgon ABCDE tal que $A = B = 120^{\circ}$, $\overline{EA} = \overline{AB} = \overline{BC} = 2$, $\overline{CD} = \overline{DE} = 4$.
Determineu l'àrea del pentàgon.



Solució:

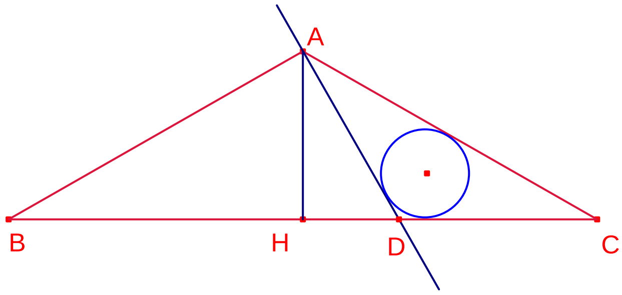


Les rectes BC, AE, s'intersecten en un punt M que formen el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CEM}$ de costat $\overline{CM} = 2 \cdot \overline{CB}$.
Per tant, $\overline{CE} = 2 \cdot \overline{AB} = 4$.
El triangle $\overset{\Delta}{CED}$ és equilàter ja que té els costats iguals a 4.
El pentàgon ABCDE es pot dividir en 7 triangles equilàters de costat $\overline{AB} = 2$.
L'àrea del pentàgon és:

$$S_{ABCDE} = 7 \cdot \frac{\overline{AB}^2 \sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}.$$

174.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle isòsceles tal que $A = 120^{o}$.
La perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per A divideix el triangle en dos triangles, en l'obtusangle s'inscriu una circumferència de radi 1.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = \overline{AC} = a$. $\angle ABC = \angle ACB = 30^{o}$.

L'altura $\overline{AH}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sobre el costat $\overline{BC}$ forma dos triangle rectangles.

$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{a}{2}$. $\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aleshores, $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{BH} = a\sqrt{3}$. $S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

La perpendicular al costat $\overline{AB}$ que passa per A talla el costat $\overline{BC}$ en el punt D.

$\angle DAC = 120^{o} - 90^{o} = 30^{o}$. Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAD}$: $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

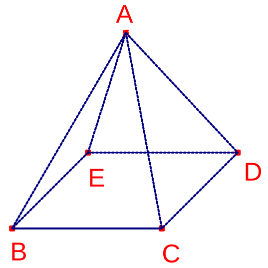
$\overline{AD} = \overline{DC} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADC}$ és: $S_{ADC} = \frac{\overline{AD} + \overline{DC} + \overline{AC}}{2} \cdot 1 = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{AH}}{2}$.

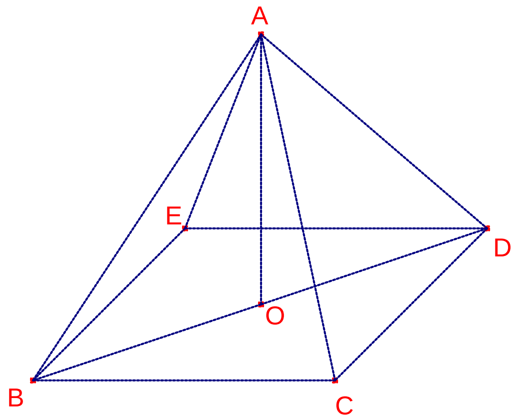
$\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{\sqrt{3}}{3}a + a}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{a}{2}}{2}$. Simplificant, $a = 4 + 2\sqrt{3}$.

Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(4 + 2\sqrt{3}\right)^2 = 12 + 7\sqrt{3}$.

175.- Siga la piràmide ABCDE de base quadrangular i de cares laterals triangles equilàters.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle ABD$.



Solució:



Totes les arestes de la piràmide són iguals. Siga $a = \overline{BC}$.
Com les cares laterals són iguals, la piràmide és recta.
El peu de l'altura de la piràmide és el centre O del quadrat.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\overline{BD} = a\sqrt{2}$$

$$\overline{BO} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

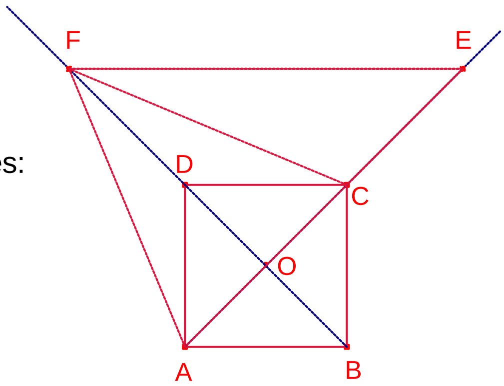
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOA}$:

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BO}^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Aleshores, el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOA}$ és isòsceles.
Per tant, $\angle ABD = \angle ABO = 45^o$.

176.- Donat un quadrat s'amplien les diagonals en una direcció una distància igual al costat. Quants triangles isòsceles són determinats pels extrems de les extensions i els vèrtexs del quadrat?.
Kömal març 2010. C1026.

Solució:



Siga el quadrat ABCD de costat $a=\overline{AB}$, de centre O.
Siga el punt E de la recta AC tal que $\overline{CE}=\overline{AB}$.
Siga el punt F de la recta BD tal que $\overline{DF}=\overline{AB}$.

Els punts E, F amb els vèrtex del quadrat formen els triangles:
$\overset{\Delta}{EFA}$, $\overset{\Delta}{EFB}$, $\overset{\Delta}{EFC}$, $\overset{\Delta}{EFD}$.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{EFA}$, $\overset{\Delta}{EFB}$ són iguals.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{EFC}$, $\overset{\Delta}{EFD}$ són iguals.

Determinem els angles del triangle $\overset{\Delta}{EFA}$.

El triangle $\overset{\Delta}{OEF}$ és rectangle i isòsceles.
$\angle FEA = 45^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{ADF}$ és isòsceles, a més a més, $\angle ADF = 135^o$.

Aleshores, $\angle DFA = \angle DAF = \frac{45^o}{2}$.

$\angle EFA = \angle EFD + \angle DFA = 45^o + \frac{45^o}{2} = \frac{135^o}{2}$.

$\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = 45^o + \frac{45^o}{2} = \frac{135^o}{2}$.

Té dos angles iguals.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{EFA}$, $\overset{\Delta}{EFB}$ són isòsceles:

Determinem els angles del triangle $\overset{\Delta}{EFC}$.
$\angle FEC = 45^o$.

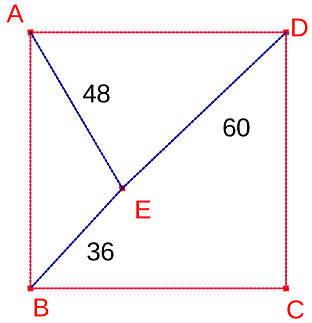
$\angle EFC = \angle EFD - \angle DFC = 45^o - \frac{45^o}{2} = \frac{45^o}{2}$.

$\angle ECF = 180^o - (\angle FEC + \angle EFC) = \frac{225^o}{2}$.

Els tres angles són distints.

Aleshores els triangles $\overset{\Delta}{EFC}$, $\overset{\Delta}{EFD}$ són escalens.

177.- Calculeu l'àrea del quadrat ABCD. Si E és un punt interior al quadrat tal que $\overline{ED}=60, \overline{EA}=48, \overline{EB}=36$.



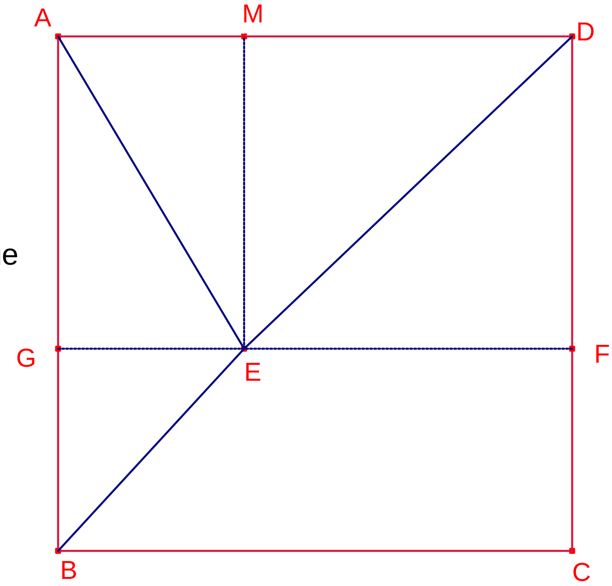
José María del Salado, professor de primària.

Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ el costat del quadrat.

Tracem la paral·lela al costat $\overline{BC}$ que passa per E, que talla el quadrat en els punts F, G

Tracem la paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla el costat $\overline{AD}$ en el punt M.



Siga $x=\overline{DM}$, $y=\overline{AG}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{EMD}$, $\overset{\Delta}{EMA}$:

$$y^2=60^2-x^2 \qquad (1)$$

$$y^2=48^2-(a-x)^2 .$$

Restant las dues igualtats:

$$a^2-2ax+1296=0 .$$

Aleshores, $x=\dfrac{a^2+1296}{2a}$ (2)

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles $\overset{\Delta}{EGA}$, $\overset{\Delta}{EGB}$:

$$\overline{EG}^2=48^2-y^2$$

$$\overline{EG}^2=36^2-(a-y)^2 .$$

Restant la dues igualtats:

$$a^2-2ay+1008=0 .$$

Aleshores, $y=\dfrac{a^2+1008}{2a}$ (3)

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):

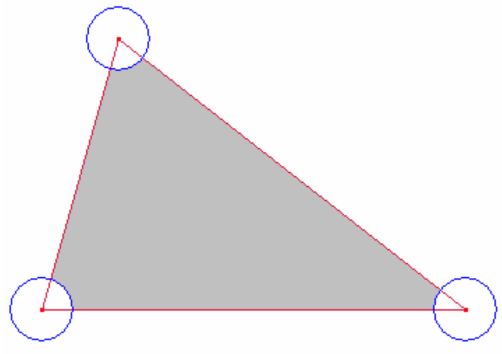
$$\left(\frac{a^2+1008}{2a}\right)^2=3600-\left(\frac{a^2+1296}{2a}\right)^2 .$$

$a^4-4896a^2+1347840=0$. Resolent l'equació:

$a=12\sqrt{17+4\sqrt{14}}$. L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD}=a^2=144\left(17+4\sqrt{14}\right)\approx 4603'19$.

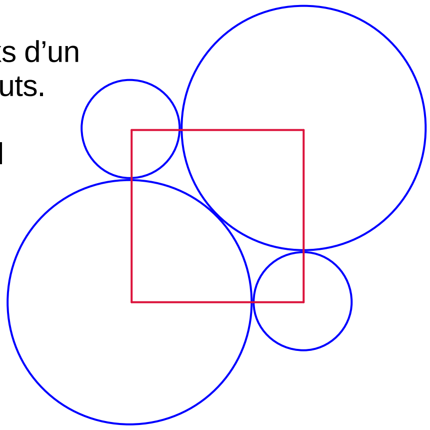
178.- L'àrea del triangle del dibuix és $80m^2$.
El radi dels cercles centrats als vèrtexs és 2m.
Quant mesura en m^2, l'àrea fosca?.
Cangur 2010, Catalunya.



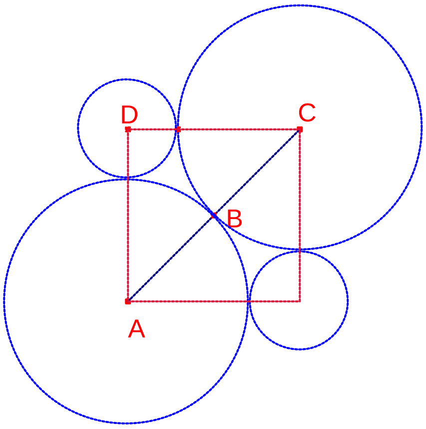
Solució:
Els angles d'un triangle mesuren 180º.
La superfície de la part del triangle que intersecten en els tres cercles és igual a mig cercle de radi 2. La seua àrea és $\frac{1}{2}\pi 2^2 = 2\pi$

Aleshores l'àrea de la zona fosca és igual a $S = 80 - 2\pi\ m^2 \approx 73'73m^2$

179.- Hem dibuixat quatre cercles amb centres en els vèrtexs d'un quadrat. N'hi ha dos iguals més grans i dos iguals més menuts. Els dos grans són tangents entre ells i tangents a cadascun dels cercles menuts. Calculeu el resultat de dividir el radi del cercle gran i el radi del cercle menut.
Cangur Holanda 2010.



Solució:
Siga R els radis dels cercles grans i r els radis dels cercles menuts.
Siguen A, C els centres dels cercles grans.
Siga D el centre d'un dels cercles menuts.



$\overline{AC} = 2R$, $\overline{AD} = \overline{CD} = R + r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

$(2R)^2 = (R+r)^2 + (R+r)^2$. Simplificant:

$R^2 - 2rR + 2r^2 = 0$. Dividint l'equació per r^2

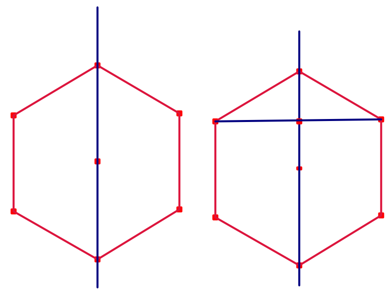
$\left(\frac{R}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{r}\right) + 2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita $\frac{R}{r}$:

$\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2}$.

180.- Un hexàgon regular gira al voltant dels seus eixos de simetria. Determineu la relació entre les àrees dels sòlids resultants. Determineu també, la relació entre els volums dels sòlids resultants.
Kömal C1034. Abril 2010.

Solució:
Els eixos de simetria axial d'un hexàgon regular són de dos tipus.
La recta que passa per dos vèrtexs oposats.
La recta que passa pel punt mig de dos costats oposats.
Siga c el costat de l'hexàgon regular. Calculem en cada cas la superfície i el volum.

Siga l'eix de simetria la recta que passa per dos vèrtexs oposats.



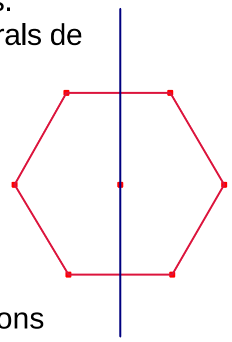
La superfície de revolució de l'hexàgon està formada per les superfícies laterals de 2 cons iguals de radi $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ i altura $\frac{1}{2}c$ (generatriu c) i l'àrea lateral d'un cilindre de radi $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ i altura c.

$$S_1 = 2\left(\pi\frac{\sqrt{3}}{2}c^2\right) + 2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}c^2 = 2\pi\sqrt{3}c^2.$$

El volum de revolució està format pels volums de dos cons iguals de radi $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ i altura $\frac{1}{2}c$ i d'un cilindre de radi $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ i altura c.

$$V_1 = 2\left(\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2\frac{c}{2}\right) + \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c\right)^2 c = \pi c^3.$$

Siga l'eix de simetria la recta que passa pel punt mig de dos costats oposats.



La superfície de revolució de l'hexàgon està formada per les superfícies laterals de 2 troncs de cons iguals de radis c, $\frac{1}{2}c$ i altura $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ (generatriu c), l'àrea de dos cercles de radi $\frac{1}{2}c$.

$$S_2 = 2\left(\pi\frac{3}{2}c^2\right) + 2\left(\pi\frac{1}{4}c^2\right) = \frac{7}{2}\pi c^2.$$

El volum de revolució de l'hexàgon està format pels volums de 2 troncs de cons iguals de radis c, $\frac{1}{2}c$ i altura $\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

$$V_2 = 2\left(\frac{1}{3}\pi\frac{\sqrt{3}}{2}c\left(c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c\frac{c}{2}\right)\right) = \frac{7\pi\sqrt{3}}{12}c^3.$$

La relació entre les àrees dels dos cossos de revolució és: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi\sqrt{3}c^2}{\frac{7}{2}\pi c^2} = \frac{4}{7}\sqrt{3}$.

La relació entre els volums dels dos cossos de revolució és: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi c^3}{\frac{7\pi\sqrt{3}}{12}c^3} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.