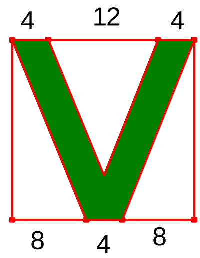
Problemes de Geometria per a l'ESO 180

1791.- En el quadrat de la figura de costat 20 cm s'ha dibuixat una V amb les dimensions que s'indiquen.
Calculeu la seua àrea.
Concurso de Primavera 2016. Nivell 4.

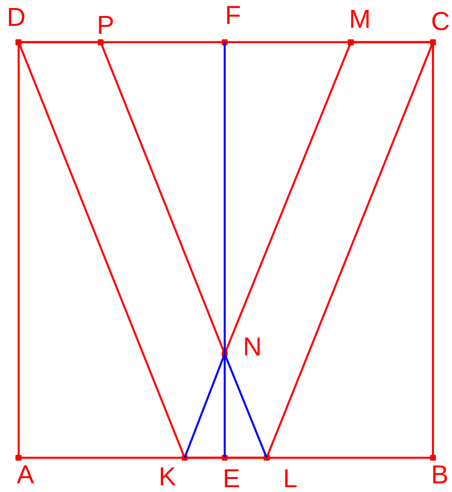


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = 20$.

Siga KLCMNPD el polígon que forma la V.

Siguen E i F els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.

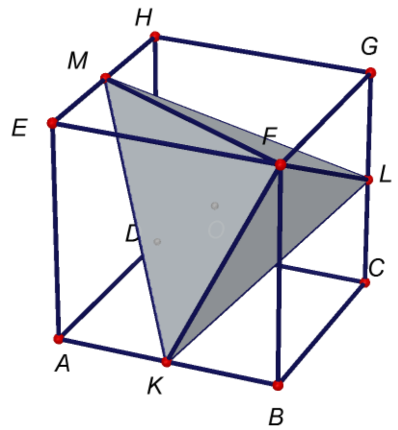


Els triangles $\overset{\Delta}{KLN}$, $\overset{\Delta}{MPN}$ són semblants i de raó 1:3.

Aplicant el teorema de Tales: $\overline{FN} = \frac{3}{4}\overline{FE} = 15$.

L'àrea del polígon KLCMNPD és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DAK}$, $\overset{\Delta}{CBL}$, $\overset{\Delta}{MPN}$:

$$S_{KLCMNPD} = 20^2 - \left(\frac{1}{2}8 \cdot 20 + \frac{1}{2}8 \cdot 20 + \frac{1}{2}12 \cdot 15\right) = 150 \text{ cm}^2.$$



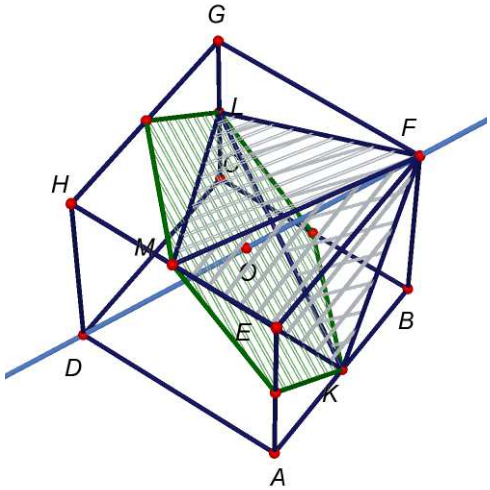
1792.- Siga el cub ABCDEFGH.

Siguen K, L, M els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CG}$, $\overline{EH}$, respectivament.
Determineu la proporció entre les volums del tetraedre KLMF i el cub.

Solució:
Siga $\overline{AB}=a$ aresta del cub ABCDEFGH.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKE}$:

$\overline{EK}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KEM}$:

$\overline{MK}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Anàlogament, $\overline{KL}=\overline{LK}=\overline{MK}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$.

El centre O del cub és el centre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.

$\overline{FK}=\overline{FL}=\overline{FM}=\overline{EK}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$. Aleshores, F pertany a la mediatriu del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$;

Aleshores, $\overline{OF}$ és perpendicular al triangle $\overset{\Delta}{KLM}$.

$\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{DF}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

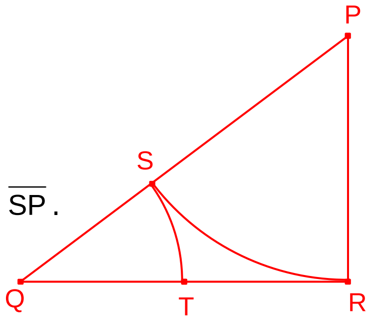
El volum del tetraedre és:

$$V_{KLMF}=\frac{1}{3}S_{KJLM}\cdot\overline{OF}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{3}{16}a^3.$$

La proporció entre els volums del tetraedre i el cub és:

$$\frac{V_{KLMF}}{V_{cub}}=\frac{\frac{3}{16}a^3}{a^3}=\frac{3}{16}.$$

1793.- El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és rectangle en R.

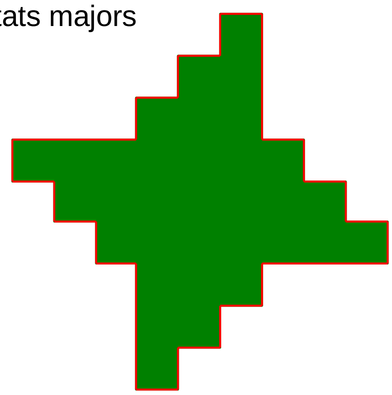


La circumferència amb centre P i radi $\overline{PR}$ talla $\overline{PQ}$ en el punt S.
La circumferència de centre Q i radi $\overline{AS}$ talla $\overline{QR}$ en el punt T.
Si T és el punt mig del costat $\overline{QR}$, calculeu el quocient entre $\overline{AS}$ i $\overline{SP}$.
Concurso Primavera 2016. Nivell 4.

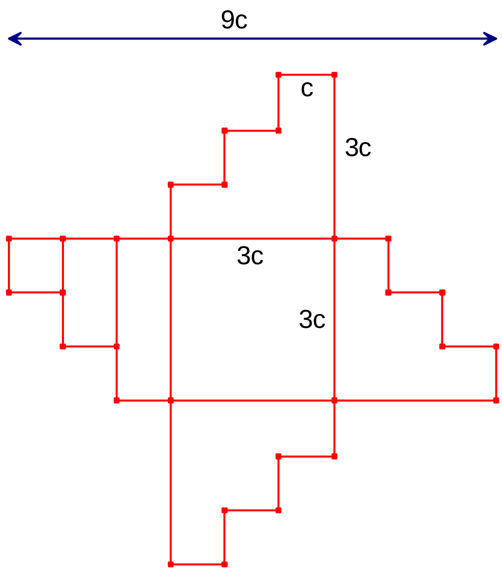
Solució:
Siga $\overline{PR}=\overline{PS}=q$.
Siga $\overline{QT}=\overline{RT}=\overline{QS}=x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$:
$(q+x)^2=q^2+4x^2$.
$3x^2-2qx=0$.
$3x-2q=0$.
$\frac{x}{q}=\frac{2}{3}$.
$\frac{\overline{QS}}{\overline{SP}}=\frac{x}{q}=\frac{2}{3}$.
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és 3:4:5.

1794.- Tots el angles de la figura són rectes, els quatre costats majors tenen la mateixa longitud i la resta són iguals.

Si l'àrea de la figura és 528, determineu el seu perímetre.
Concurso de Primavera 2016. Nivell 3.



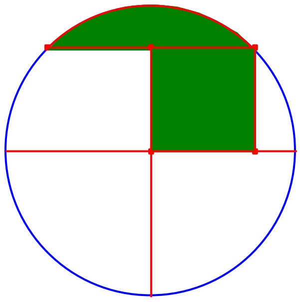
Solució:
Siga c la mesura del costat menor.
La mesura del quadrat major és 3c.



El perímetre de la figura és:
$P = 4(9c) = 36c$.

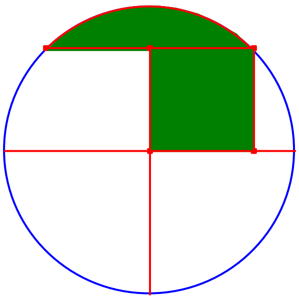
L'àrea de la figura és 528:
$S = (3c)^2 + 4(1+2+3) = 33c^2$.
$S = 33c^2 = 528$. Resolent l'equació:
$c = 4$.
El perímetre de la figura és:
$P = 36c = 144$.

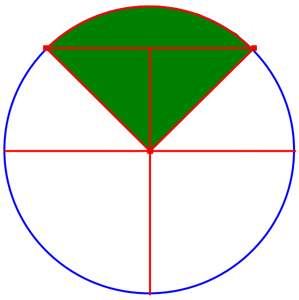
1795.- La zona ombrejada està formada per un quadrat i un segment circular.



Si el radi de la circumferència mesura 4 de termineu l'àrea de la zona ombrejada.
Concurso de Primavera 2016. Nivell 3.

Solució:

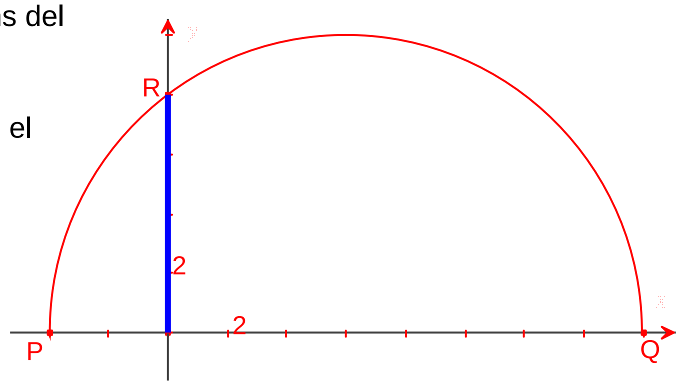




L'àrea ombrejada és igual a l'àrea d'un quadrant de circumferència de radi 4.

$S=\frac{1}{4}\left(\pi 4^2\right)=4\pi$.

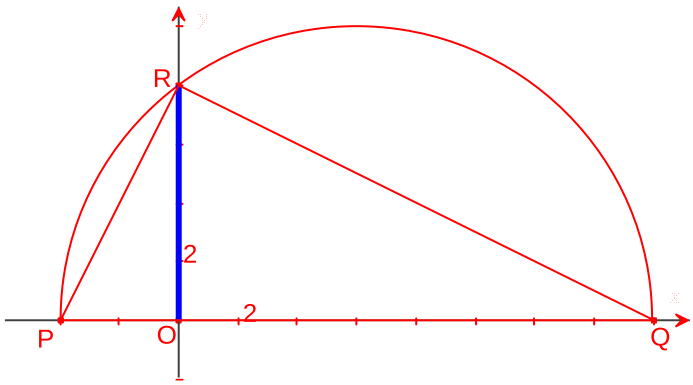
1796.- En la figura, $P(-4,0)$, $Q(16,0)$ són extrems del diàmetre de la semicircumferència.



Si $R(0,t)$ pertany a la circumferència, determineu el valor de t.

Concurso de Primavera 2016. Nivell 3.

Solució:



El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és rectangle $R = 90^{\circ}$.

$\overline{OT} = t$ és l'altura del triangle.

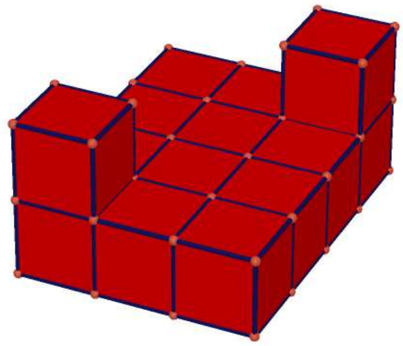
Aplicant el teorema de l'altura:

$\overline{OT}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}$.

$t^2 = 4 \cdot 16$. Resolent l'equació:

$t = 8$.

1797.- Anabel ha agafat 14 cubs de color gris i els ha unit com la figura i els ha pintat de roig per dalt per sota i pels laterals.

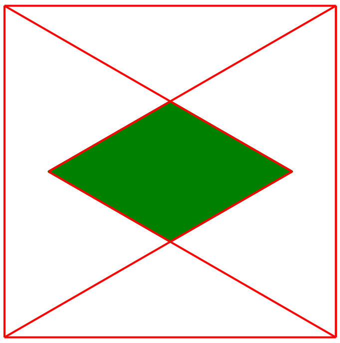


Després no li ha agradat i ha desfet la figura. Quantes cares han quedat sense pintar de roig.
Concurso de Primavera 2014. Nivell 1.

Solució:
Hem de notar que sempre una cara està en gris la que va junta amb ella també està en gris.

$C_{gris} = 2(3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2) = 38$.

1798.- En l'interior d'un quadrat s'han dibuixat dos triangles equilàters com mostra la figura.



Determineu la proporció entre l'àrea del rombe intersecció dels dos triangles i l'àrea del quadrat.

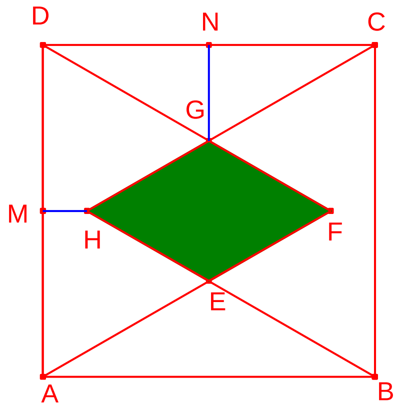
Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.

Siga EFGH el rombe intersecció dels dos triangles.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMF}$:

$$\overline{MF} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{MH} = c - \overline{MF} = c - \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{HF} = c - 2\overline{MH} = \left(\sqrt{3} - 1\right)c.$$

$$\angle GCN = 30^o.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CNG}$:

$$\overline{NG} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

$$\overline{GE} = c - 2\overline{NG} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)c.$$

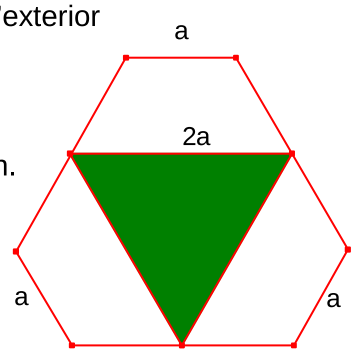
L'àrea del rombe EFGH és:

$$S_{EFGH} = \frac{1}{2}\overline{HF} \cdot \overline{NG} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)c \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)c = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)c^2.$$

La proporció entre les àrees del rombe i el quadrat és:

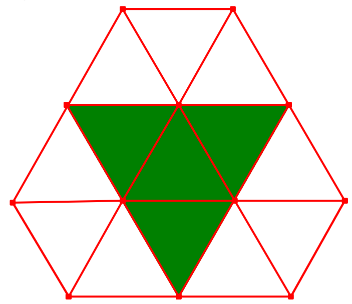
$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)c^2}{c^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$

1799.- Sobre els costats d'un triangle equilàter de costat 2ª i cap a l'exterior s'han construït tres trapezis isòsceles amb els altres tres costats de mesura a.



Si l'àrea del triangle equilàter és $24cm^2$ calculeu l'àrea de l'hexàgon.
Concurso de Primavera 2014. Nivell 2.

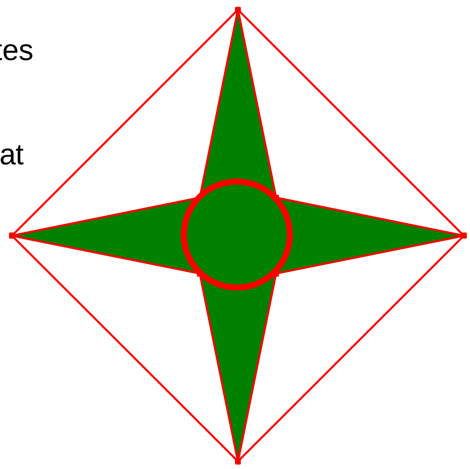
Solució:
L'àrea del triangle equilàter està formada per 4 triangles equilàters de costat a.
L'àrea de l'hexàgon està formada per 13 triangles equilàters de costat a.



L'àrea de l'hexàgon és:

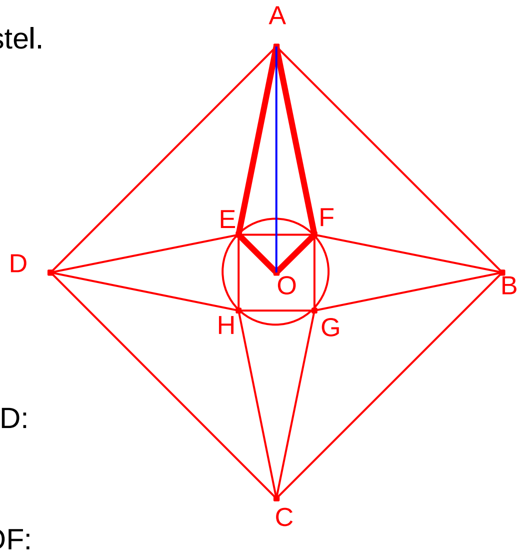
$$S_{hexàgon} = \frac{13}{4} S_{triangle} = \frac{13}{4} \cdot 24 = 78cm^2 .$$

1800.- En la figura, hi ha dibuixat un estel de quatre puntes simètric.



Quatre vèrtexs de l'estel són vèrtex d'un quadrat de costat 24 i els altres quatre vèrtexs pertanyen a una circumferència.
Si l'àrea de l'estel és la tercera part de l'àrea del quadrat determineu el radi de la circumferència.

Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat 24.
Siga O el centre del quadrat.
Siga $r=\overline{OE}$ radi de la circumferència.
Siguen E, F, G, H els vèrtexs sobre la circumferència de l'estel.
EFGH és un quadrat.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOF}$:
$\overline{EF}=r\sqrt{2}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:
$\overline{OA}=24\dfrac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$.
L'àrea de l'estel és la tercera part de l'àrea del quadrat ABCD:
$S_{estel}=\dfrac{1}{3}24^2=192$.
L'àrea de l'estel és igual a 4 vegades l'àrea del cometa AEOF:
$S_{estel}=4\left(\dfrac{1}{2}\overline{EF}\cdot OA\right)=4\left(\dfrac{1}{2}r\sqrt{2}\cdot 12\sqrt{2}\right)=48r$.
Igualant les àrees:
$S_{estel}=192=48r$.
Resolent l'equació:
$r=4$.