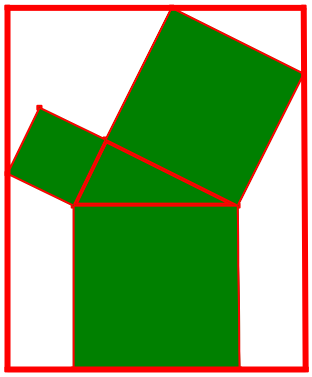
Problemes de Geometria per a l'ESO 181

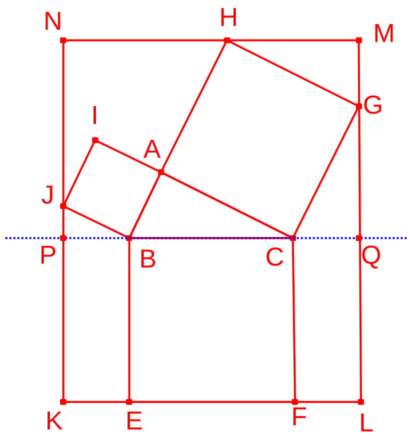


1801.- Sobre els costats d'un triangle rectangle, s'han dibuixat cap a fora tres quadrats, com mostra la figura. Sabem que un catet és el doble que l'altre.
El polígon resultant s'ha inscrit en un rectangle.
Determineu la proporció entre l'àrea del polígon ombrejat i l'àrea del rectangle exterior.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = x\sqrt{5}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{QCG}$, $\overset{\Delta}{MGH}$ són iguals.
$\overline{LM} = \overline{LQ} + \overline{QG} + \overline{GM} = x\sqrt{5} + 2x + x = \left(3 + \sqrt{5}\right)x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PJB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{PB}}{2x} = \frac{x}{x\sqrt{5}}$. Aleshores, $\overline{PB} = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

$\overline{KL} = \overline{PB} + \overline{EF} + \overline{CQ} = \frac{2\sqrt{5}}{5}x + x\sqrt{5} + x = \frac{5 + 7\sqrt{5}}{5}x$.

L'àrea del polígon ombrejat és:

$S_{ombrejat} = S_{ABC} + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

$S_{ombrejat} = x^2 + x^2 + 4x^2 + 5x^2 = 11x^2$.

L'àrea del rectangle KLMN és:

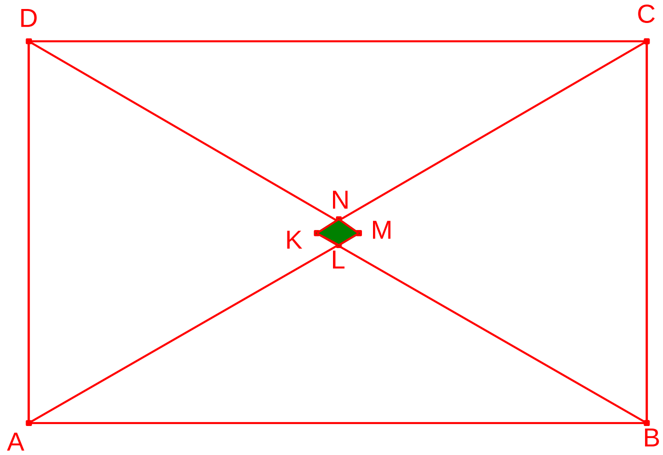
$S_{KLMN} = \left(3 + \sqrt{5}\right)x\left(\frac{5 + 7\sqrt{5}}{5}\right)x = \frac{50 + 26\sqrt{5}}{5}x^2$.

La proporció entre l'àrea del polígon ombrejat i l'àrea del rectangle exterior és:

$$\frac{S_{ombrejat}}{S_{KLMN}} = \frac{11x^2}{\frac{50 + 26\sqrt{5}}{5}x^2} = \frac{-25 + 13\sqrt{5}}{8} \approx 0.5086.$$

1802.- En la figura, ABCD és un rectangle auri $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sobre els costats menuts del rectangle i cap a l'interior de rectangle s'han dibuixat dos triangles equilàters que formen el rombe KLMN.
Determineu la proporció entre les àrees del rombe i del rectangle.

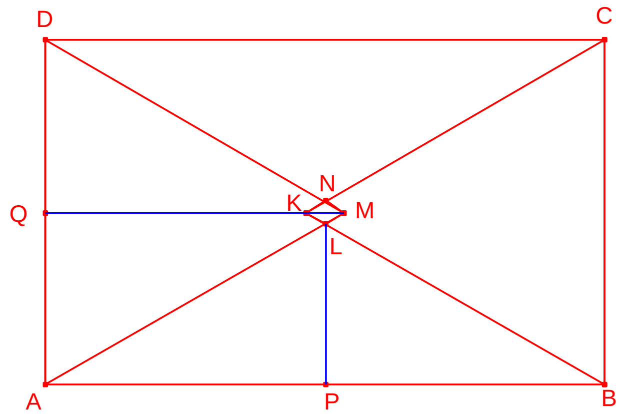


Solució:

Siga $\overline{AD} = 1$, $\overline{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga Q el punt mig del costat $\overline{AD}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AQM}$:

$$\overline{QM} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{KM} = 2\overline{QM} - \overline{AB} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{APL}$:

$$\overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{AB}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}.$$

$$\overline{NL} = \overline{QD} - 2\overline{PL} = 1 - 2\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6} = \frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6}.$$

L'àrea del rectangle ABCD és:

$$S_{ABCD} = \overline{AB}\cdot\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

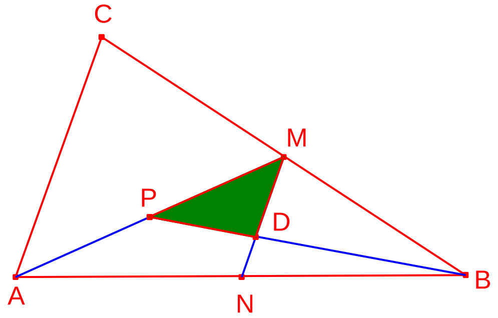
L'àrea del rombe KLMN és:

$$S_{KLMN} = \frac{1}{2}\overline{KM}\cdot\overline{NL} = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{6} = \frac{-6+9\sqrt{3}-6\sqrt{5}+\sqrt{15}}{12}.$$

La proporció entre les àrees del rombe i el rectangle és:

$$\frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{-6+9\sqrt{3}-6\sqrt{5}+\sqrt{15}}{12}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{3}-6}{6} \approx 0.00232.$$

1803.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle d'àrea 48.



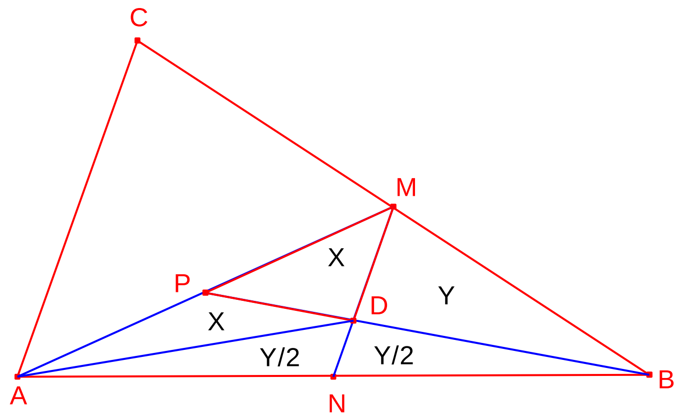
P és el punt mig de la mitjana $\overline{AM}$.

N és el punt mig del costat $\overline{AB}$.

D és la intersecció dels segments $\overline{BP}$ i $\overline{MN}$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PDM}$.

Solució 1:



Siga X l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PDM}$.

Siga Y l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDM}$.

$S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}48 = 24$.

$S_{BPM} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{2}24 = 12$.

Aleshores, $X + Y = 12$.

$S_{APD} = S_{MPD} = X$. $S_{APB} = S_{MPB} = X + Y$

Aleshores, $S_{ABD} = Y$.

$S_{AND} = S_{NBD}$.

Aleshores, $S_{AND} = S_{NBD} = \frac{1}{2}Y$.

$S_{BNM} = \frac{1}{2}S_{ABM} = \frac{1}{2}24 = 12$.

Aleshores, $Y + \frac{1}{2}Y = 12$. Resolent l'equació: $Y = 8$.

$X + 8 = 12$. Aleshores, l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PDM}$ és $X = 4$.

Solució 2:

$S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}48 = 24$.

D és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$.

$S_{PMD} = \frac{1}{6}S_{ABM} = \frac{1}{6}24 = 4$.

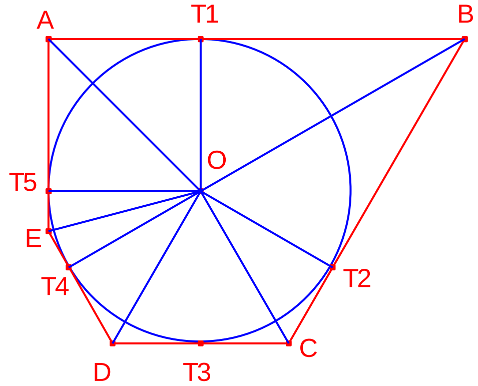
1804.- El pentàgon ABCDE té una circumferència inscrita de centre O i radi r.

Si A és un vèrtex d'angle recte, $\angle EOA = 60^{o}$ i el triangle $\overset{\Delta}{OCD}$ és equilàter, determineu l'àrea del pentàgon.

KöMaL, C1358.

Solució:

Siguen T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 els punts de tangència de la circumferència inscrita al pentàgon ABCDE.



AT_1OT_5 és un quadrat.

$\angle EOA = 60^{o}$, $\angle T_5OA = 45^{o}$ aleshores, $\angle EOT_5 = 15^{o}$.

$\overline{ET_5} = \overline{ET_4} = r \cdot tg15^{o} = \left(2-\sqrt{3}\right)r$.

$\overline{AT_1} = \overline{AT_5} = r$, $\overline{OT_3} = r$, $\angle COT_3 = 30^{o}$.

$\overline{CT_3} = \overline{CT_2} = \overline{DT_3} = \overline{DT_4} = r \cdot tg30^{o} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}r$.

$\angle T_5OT_4 = 2 \cdot 15^{o} = 30^{o}$, $\angle T_4OD = \angle COT_2 = 30^{o}$.

$\angle T_4OT_2 = 120^{o}$, $\angle T_1OT_5 = 90^{o}$.

Aleshores, $\angle T_1OT_2 = 360^{o} - \left(\angle T_1OT_5 + \angle T_5OT_4 + \angle T_4OT_2\right) = 120^{o}$.

Per tant, $\angle T_1OB = \angle BOT_2 = 60^{o}$.

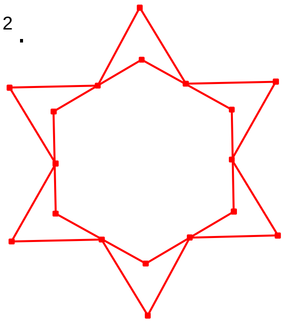
$\overline{BT_1} = \overline{BT_2} = r \cdot tg60^{o} = r\sqrt{3}$.

L'àrea del pentàgon ABCDE és:

$$S_{ABCDE} = \frac{1}{2}\left(\overline{AT_5} + \overline{AT_1} + \overline{BT_1} + \overline{BT_2} + \overline{CT_2} + \overline{CT_3} + \overline{DT_3} + \overline{DT_4} + \overline{ET_4} + \overline{ET_5}\right)r =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2\sqrt{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\left(2-\sqrt{3}\right)\right)r^2 = \frac{9+2\sqrt{3}}{3}r^2.$$

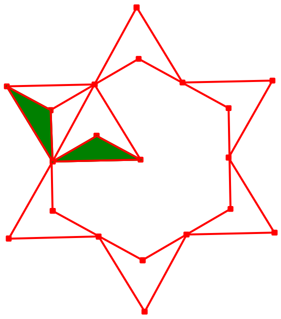
1805.- L’hexàgon regular inscrit en una estrella té àrea $12cm^2$.



Calculeu l’àrea de l’estrella.

Concurs de Primavera 2015. Nivell 3. Segona fase.

Solució:



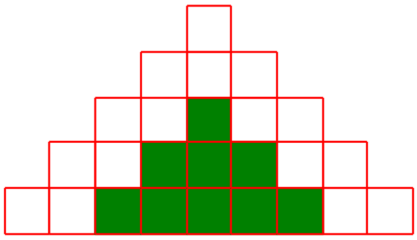
Hexàgon 24 

Àrea  és 1/2

Estrella 36 

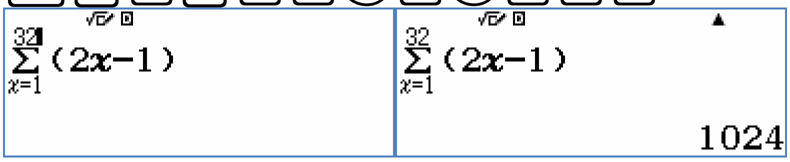
àrea Estrella = $18cm^2$

1806.- Cleopatra construeix piràmides començant pel cim.

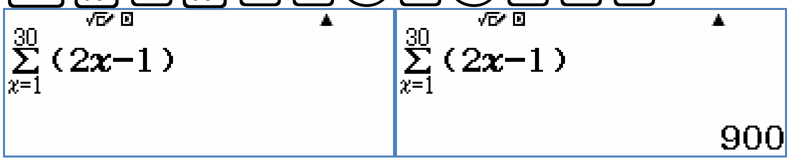


N’ha dibuixat una de 32 pisos (en la figura hi ha una de cinc pisos) acolorint de la forma que es veu començant pel tercer pis.
Quina és la diferència entre els quadrats verds i els blancs utilitzats.
Concurs de Primavera 2015. Nivell 3. Segona fase.

Solució:
La piràmide de 32 pisos té (entre blancs i verds)
$1+3+5+.....$ la suma dels 32 primers imparells.
Utilitzant en la calculadora Casio 991 Classwiz, la funció de sumes finites:

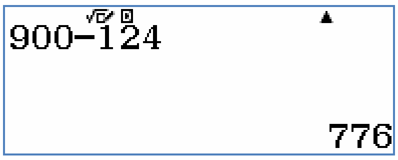


Hi ha 1024 quadrats blancs i verds.
El nombre de quadrats verds és igual a la suma dels 30 primers imparells:

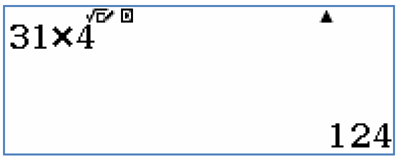


El nombre de quadrats verds és 900.
El nombre de quadrats blancs és:

La diferència entre els quadrats verds i blancs és:



Nota: els quadrats blancs formen una successió constat de 31 termes:
4, 4, 4,



1807.- La recta $12x+5y=60$ forma un triangle amb els eixos coordenats.

Calculeu la suma de les altures del triangle.

Concurs de Primavera 2015. Nivell 3. Segona fase.

Solució:

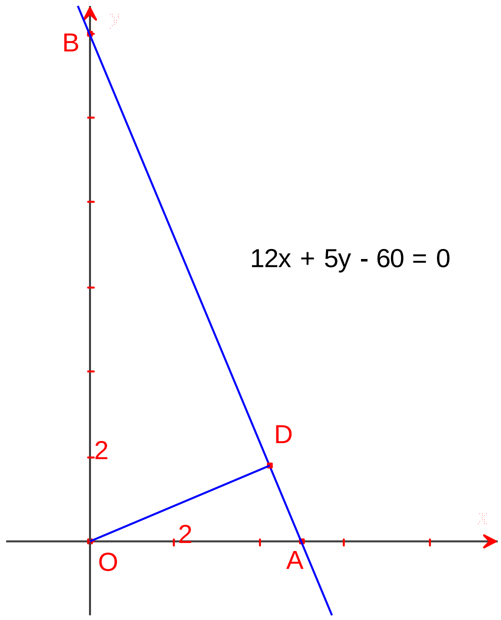
Els vèrtexs del triangle rectangle format són l'origen de coordenades i els punts de tall de la recta amb els eixos coordenats.

Si $y=0$, $x=5$, el punt de tall amb l'eix d'abscisses és $A(5,0)$.

Si $x=0$, $y=12$, el punt de tall amb l'eix d'ordenades és $B(0,12)$.

$\overline{OA}=5$, altura del triangle.

$\overline{OB}=12$, altura del triangle.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$\overline{AB}^2=5^2+12^2$.

$\overline{AB}=13$.

Siga $h=\overline{OD}$ altura del triangle sobre la hipotenusa.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot h.$$

$5\cdot 12=13h$. Resolent l'equació:

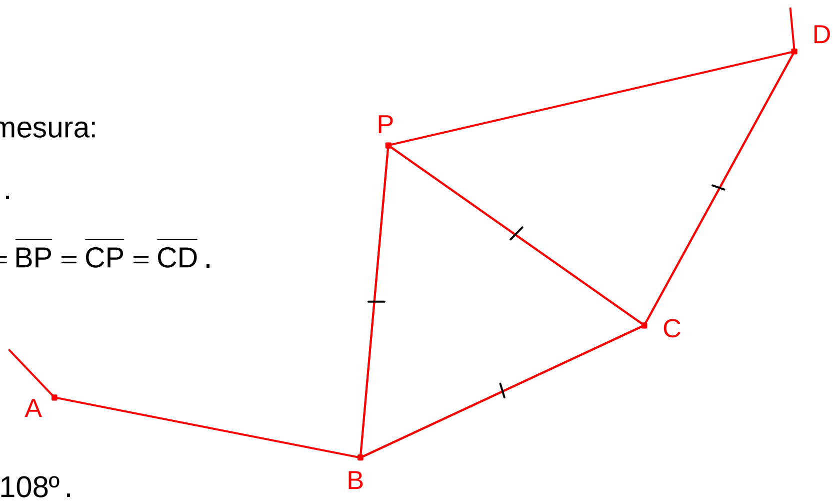
$$h=\frac{60}{13}.$$

La suma de les tres altures és:

$$5+12+\frac{60}{13}=\frac{281}{13}.$$

1808.- Siguen A, B, C i D quatre vèrtexs consecutius d'un decàgon regular.

Siga P un punt interior al decàgon tal que el triangle $\overset{\Delta}{BPC}$ és equilàter.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BPD$.
Olimpíada Argentina 2016. Intercolegial. Nivel 1.



Solució:
L'angle interior del decàgon regular mesura:

$$\angle ABC = \angle BCD = 180^{o} - \frac{360^{o}}{10} = 144^{o}.$$

$$\angle BPC = \angle PBC = \angle BCP = 60^{o},\ \overline{BC} = \overline{BP} = \overline{CP} = \overline{CD}.$$

El triangle $\overset{\Delta}{CPD}$ és isòsceles.

$$\angle PCD = 144^{o} - 60^{o} = 84^{o}.$$

$$\angle CPD = \frac{180^{o} - 84^{o}}{2} = 48^{o}.$$

$$\angle BPD = \angle BPC + \angle CPD = 60^{o} + 48^{o} = 108^{o}.$$

1809.- Siga el quadrilàter ABCD tal que $\angle ABD = 10^o$, $\angle DBC = 50^o$, $\angle BCA = 60^o$ i $\angle ACD = 20^o$. Calculeu les mesures dels angles $\angle CAD$ i $\angle BDA$.

Olimpíada Argentina 2016. Intercolegial. Nivel 2.

Solució:

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 10^o + 50^o = 60^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 60^o + 20^o = 80^o$.

$\angle CDB = 180^o - (\angle DBC + \angle BCD) = 180^o - (50^o + 80^o) = 50^o$.

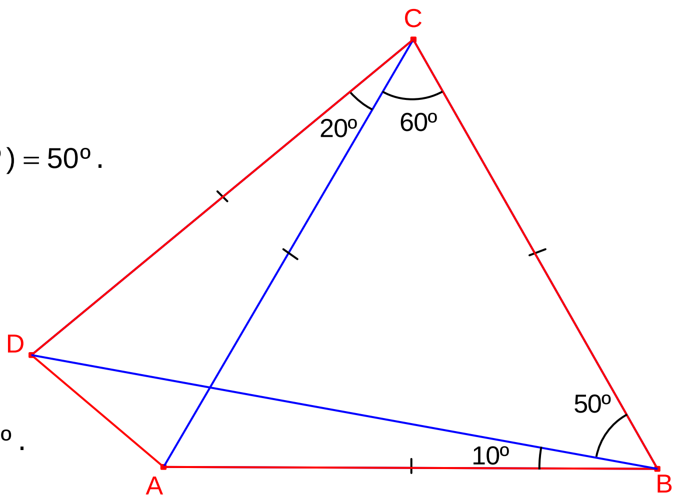
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.

$\overline{DC} = \overline{BC}$.

Notem que, $\overline{DC} = \overline{AC}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles.

$\angle CDA = \angle CAD = \dfrac{180^o - \angle ACD}{2} = \dfrac{180^o - 20^o}{2} = 80^o$.

$\angle BDA = \angle CDA - \angle CDB = 80^o + 50^o = 30^o$.



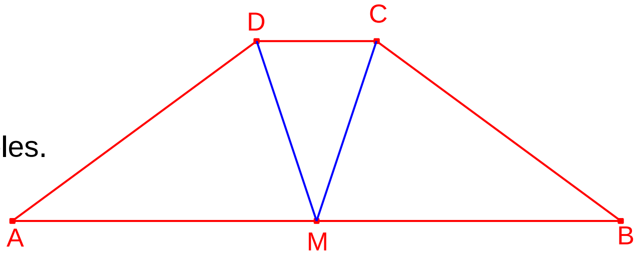
1810.- Siga ABCD un trapezi isòsceles de costats paral·lels $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.

Siga $\overline{AB}=16$, $\overline{AD}=\overline{BC}=8$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ i $\overline{DM}=\overline{CM}=5$.

Calculeu la mesura del costat $\overline{CD}$.

Olimpíada Argentina 2016. Intercolegial. Nivel 3.



Solució:

$\overline{AM}=\overline{BM}=8$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMD}$ és isòsceles.

Siga $\alpha=\angle DAB$.

$\angle ADC=180^{o}-\alpha$.

$\angle ADM=\dfrac{180^{o}-\alpha}{2}=90^{o}-\dfrac{\alpha}{2}$.

$\angle MDC=\angle ADC-\angle ADN=180^{o}-\alpha-\left(90^{o}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=90^{o}-\dfrac{\alpha}{2}$.

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{AMD}$, $\overset{\Delta}{MDC}$ són semblants (tenen els mateixos angles).

Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DM}}=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{CD}}$.

$\dfrac{8}{5}=\dfrac{5}{\overline{CD}}$. Resolent l'equació:

$\overline{CD}=\dfrac{25}{8}$.