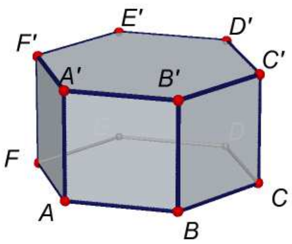
Problemes de Geometria per a l'ESO 182

1811.- Siga ABCDEFA'B'C'D'E'F' el prisma hexagonal regular que té totes les arestes iguals a $\overline{AB} = a$.

a) Calculeu la mesura de les diagonals $\overline{AC'}$, $\overline{AD'}$.

b) L'àrea de la secció del prisma que passa pels punts A, B, D'.

c) El perímetre de la secció del prisma que passa pels punts A, B, D'.

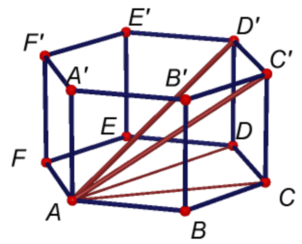


Solució:

a)

$\overline{AD} = 2a$.

$\angle ABC = 120º$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120 = 3a^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

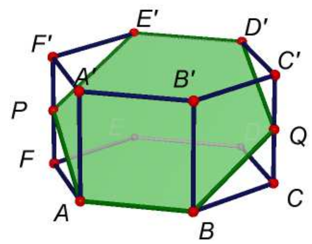
$\overline{AC'}^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$.

$\overline{AC'} = 2a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADD'}$:

$\overline{AD'}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2$.

$\overline{AD'} = a\sqrt{5}$.



b)

Notem que la secció passa pels punts migs P, Q de les arestes $\overline{FF'}$, $\overline{CC'}$, respectivament.

La secció és l'hexàgon ABQD'E'P.

$\overline{PQ} = \overline{FC} = 2a$.

$\overline{AE'} = \overline{BD'} = \overline{AC'} = 2a$.

L'àrea de l'hexàgon ABQD'E'P és igual al doble de l'àrea del trapezi ABQP:

$$S_{ABQD'E'P} = 2\left(\frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2}\frac{\overline{AE'}}{2}\right) = 2\left(\frac{a+2a}{2}a\right) = 3a^2.$$

c)

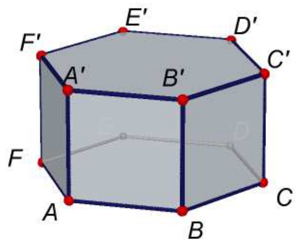
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFP}$:

$\overline{AP}^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$. $\overline{AP} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

El perímetre de l'hexàgon ABQD'E'P és:

$P_{ABQD'E'P} = 2\overline{AB} + 4\overline{AP} = \left(2 + 2\sqrt{5}\right)a$.

1912.- Siga ABCDEFA'B'C'D'E'F' el prisma hexagonal regular que té totes les arestes iguals a $\overline{AB} = a$.

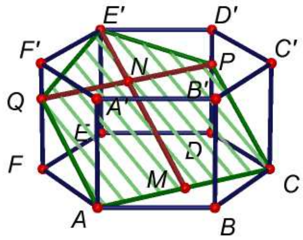


a) L'àrea de la secció del prisma que passa pels punts A, C, E'.
b) El perímetre de la secció del prisma que passa pels punts A, C, E'.

Silució:

Siguen P i Q de les arestes $\overline{CC'}$, $\overline{FF'}$, respectivament, els punts que formen la secció del prisma formada pel plànol A, C, E'

Siga M el punt mig del segment $\overline{AC}$.



Siga N la intersecció dels segments $\overline{ME'}$, $\overline{PQ}$.

$\overline{AE'} = \overline{CE'}$, aleshores, $\overline{ME'}$ és perpendicular a $\overline{AC}$.

Aleshores, $\overline{AQ}$ i $\overline{CP}$ són perpendiculars a $\overline{AC}$.

Siga $\overline{AQ} = x$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AC}^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos 120 = 3a^2$.

$\overline{AC} = \overline{PQ} = a\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectagnle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{BM} = \frac{1}{2}a$. Aleshores, $\overline{ME} = \frac{3}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEE'}$: $\overline{ME'} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BEE'}$, $\overset{\Delta}{AFQ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{\overline{ME'}} = \frac{a}{\frac{3}{2}a}$. $x = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{13}}{2}a = \frac{\sqrt{13}}{3}a$.

$\overline{NE'} = \overline{ME'} - x = \frac{\sqrt{13}}{2}a - \frac{\sqrt{13}}{3}a = \frac{\sqrt{13}}{6}a$.

a)

L'àrea de la secció ACPE'Q és igual a l'àrea del rectangle ACPQ més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQE'}$:

$S_{ACPE'Q} = \overline{AC} \cdot x + \overline{PQ} \cdot \overline{NE'} = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3}\frac{\sqrt{13}}{6}a = \frac{5\sqrt{39}}{12}a^2$.

b)

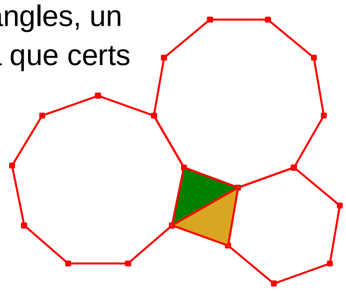
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEE'}$:

$\overline{QE'} = a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}a$.

El perímetre de la secció ACPE'Q és:

$P_{ACPE'Q} = \overline{AC} \cdot + 2x + 2\overline{NE'} = a\sqrt{3} + + \frac{2\sqrt{13}}{3}a + \frac{2\sqrt{10}}{3}a = \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{13} + 2\sqrt{10}}{3}a$.

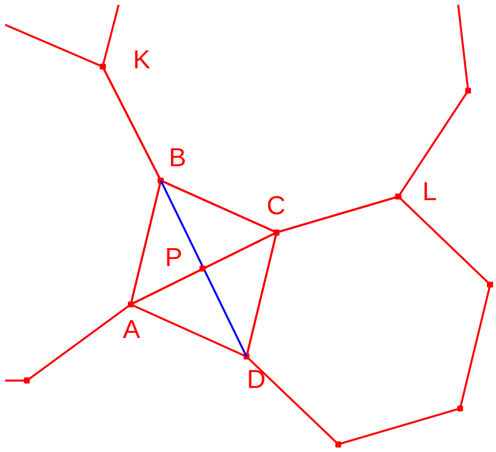
1813.- La següent figura està formada per cinc polígons: dos triangles, un hexàgon regular i dos enneàgons regulars, disposats de manera que certs polígons comparteixen costat.



Demostreu que els dos triangles són isòsceles.
Crux Mathematicorum CC198.

Solució:
Els costats dels enneàgons i l'hexàgon són iguals.
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.



L'angle interior de l'enneàgon regular mesura:

$$\angle ABK = \angle CBK = 180º - \frac{360º}{9} = 140º.$$

L'angle interior de l'hexàgon regular mesura:

$$\angle DCL = 180º - \frac{360º}{6} = 120º.$$

$$\angle ABC = 360º - 2\angle ABK = 80º.$$

$$\angle BAC = \angle ACB = \frac{180º - \angle ABC}{2} = 50º.$$

El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.

$$\angle BCD = 360º - (\angle ABK + \angle DCL) = 100º.$$

$$\angle CBD = \angle BDC = \frac{180º - \angle BCD}{2} = 40º.$$

Aleshores, $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ són perpendiculars.

Siga P la intersecció de $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{CPB}$ són iguals, aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{CPD}$ són iguals.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles.

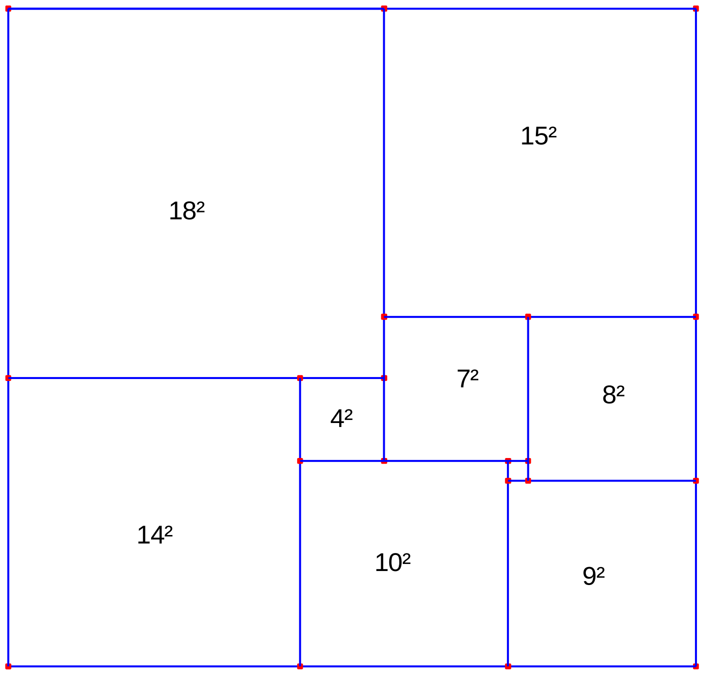
Notem que els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són iguals.

1814.- Disposem de 9 taulells quadrats de costats 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15 i 18 unitats.

Els taulells els juxtaposem per formar la superfície d'un rectangle.
Determineu les longituds dels costats del rectangle i com és disposen els taulell per formar el rectangle.
Crux Mathematicorum CC196

Solució:
L'àrea del rectangle és igual a la suma de les àrees dels quadrats.
$1^2+4^2+7^2+8^2+9^2+10^2+14^2+15^2+18^2=1056$.
Factoritzem:
$1056=2^5\cdot 3\cdot 11$.
El costat menor del rectangle ha de ser major que 18.
Les úniques possibilitats són:
32×33, 24×44.
Amb la segona possibilitat, en posar el quadrat de costat 18 queda 6 per introduir un altre del quadrat la qual cosa no pot ser.

Aleshores, l'única solució possible és 32×33.
Posarem els 9 taulells de la següent forma:



1815.- Determineu la distancia entre els dos punts d'intersecció de dues circumferències de radis 1 i 2, respectivament, que és tallen de forma que la més gran passa pel centre de la més menuda.

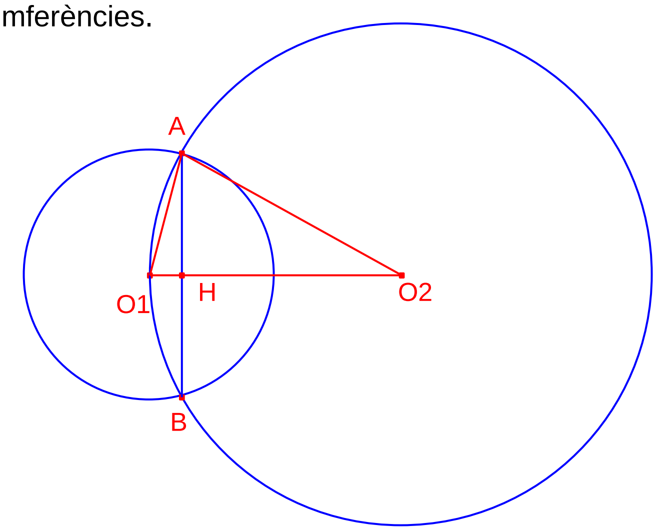
Crux Mathematicorum CC203

Solució 1:

Siguen O_1, O_2 els centres de les circumferències de radio1, 2, respectivament.

Siguen A, B les interseccions de les dues circumferències.

Siga H la projecció de A sobre $\overline{O_1O_2}$.



$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH}$.

$\overline{O_1O_2} = 2$, $\overline{O_1A} = 1$, $\overline{O_2B} = 2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{O_1AO_2}$ és:

$$S_{O_1AO_2} = \frac{2 \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{\sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3}}{4}.$$

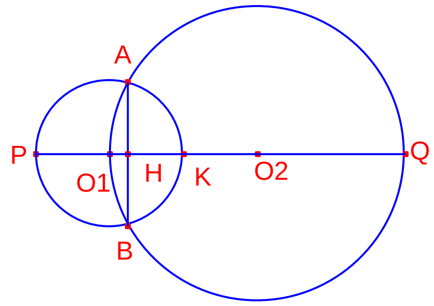
$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AH} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Solució 2:

Siguen O_1, O_2 els centres de les circumferència de radis 1, 2, respectivament.

Siguen A, B les interseccions de les dues circumferències.

Siga H la projecció de A sobre $\overline{O_1O_2}$.



Siga $\overline{AH} = \overline{BH} = x$.

Siga $\overline{O_1H} = y$.

Siga PKQ la recta que passa pels centres de les circumferències.

$\overline{PH} = 1 + y$. $\overline{HK} = 1 - y$.

$\overline{HQ} = 4 - y$.

Aplicant la potència de H sobre la circumferència de centre O_1:

$\overline{AH} \cdot \overline{BH} = \overline{PH} \cdot \overline{HK}$

$x^2 = (1+y)(1-y)$.

Aplicant la potència de H sobre la circumferència de centre O_2:

$\overline{AH} \cdot \overline{BH} = \overline{O_1H} \cdot \overline{HQ}$.

$x^2 = y(4-y)$.

Considerem el sistema $\begin{cases} x^2 = (1+y)(1-y) \\ x^2 = y(4-y) \end{cases}$. Resolent el sistema:

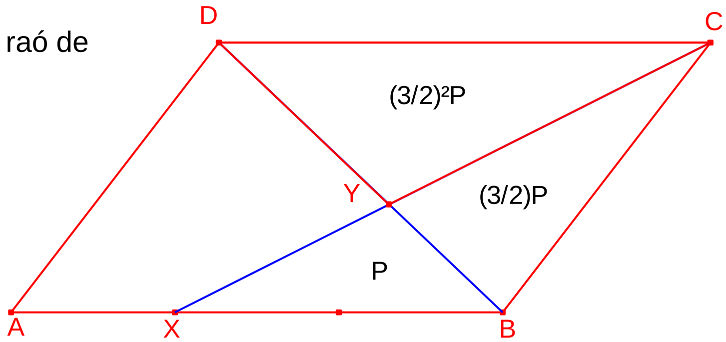
$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{15}}{4} \\ y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$. Aleshores, $\overline{AB} = 2 \cdot x = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

1816.- En el paral·lelogram ABCD, siga X el punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{XB}$ és dues vegades més llarg que $\overline{AX}$. Siga Y el punt intersecció de $\overline{XC}$ i $\overline{BD}$. Determineu la proporció entre dels àrees del triangle $\overset{\Delta}{CDY}$ i del paral·lelogram ABCD.
Crux Mathematicorum CC205

Solució:

Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XBY}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{XBY}$, $\overset{\Delta}{CDY}$ són semblants i la raó de semblança és:



$$\frac{3}{2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{CY}}{\overline{XY}}.$$

$$\frac{S_{CDY}}{S_{XBY}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Aleshores, $S_{CDY}=\frac{9}{4}P$.

Els triangles $\overset{\Delta}{XBY}$, $\overset{\Delta}{CBY}$ tenen la mateixa altura sobre la base CX, les àrees dels dos triangles són proporcionals a les bases:

$$\frac{S_{CBY}}{S_{XBY}}=\frac{\overline{CY}}{\overline{XY}}=\frac{3}{2}.$$

Aleshores, $S_{CBY}=\frac{3}{2}P$.

$$S_{CDB}=S_{CDY}+S_{CBY}=\frac{9}{4}P+\frac{3}{2}P=\frac{15}{4}P.$$

$$S_{ABCD}=2\cdot S_{CDB}=\frac{15}{2}P.$$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{CDY}$ i el paral·lelogram ABCD és:

$$\frac{S_{CDY}}{S_{ABCD}}=\frac{\frac{9}{4}P}{\frac{15}{2}P}=\frac{3}{10}.$$

1817.- Una escala de 10 metres esta recolzada sobre un mur vertical.

Si el punt mig de l'escala és dues vegades més llarg del terra que del mur, a quina altura està recolzada l'escala sobre el mur.
Crux Mathematicorum CC204.

Solució:

Siga $\overline{AB} = 10$ l'escala.

Siga L el punt mig de l'escala.

Siga K la projecció de L sobre el mur $\overline{OB}$.

Siga M la projecció de L sobre $\overline{OA}$.

$\overline{LM} = 2 \cdot \overline{KL}$.

$\overline{KL}$ és la paral·lela mitjana del triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$.

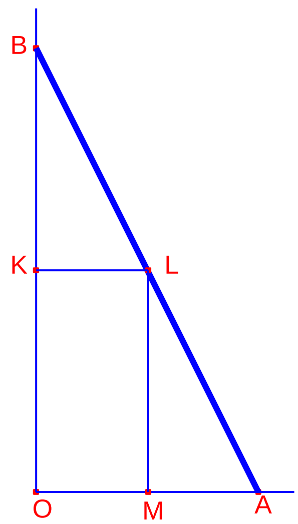
$\overline{BK} = \overline{OK} = \overline{LM}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKL}$, $\overset{\Delta}{LMA}$ són iguals.

$\overline{KL} = \overline{MA}$.

Aleshores: $\overline{OB} = 2 \cdot \overline{OA}$.

Siga $\overline{OB} = h$ altura de l'escala.

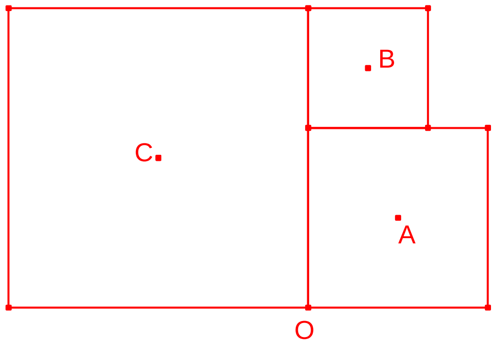


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$10^2 = h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:

$h = 4\sqrt{5} \approx 8.94\,\text{m}$.

1818.- En la figura hi ha tres quadrats de centres A, B, C.



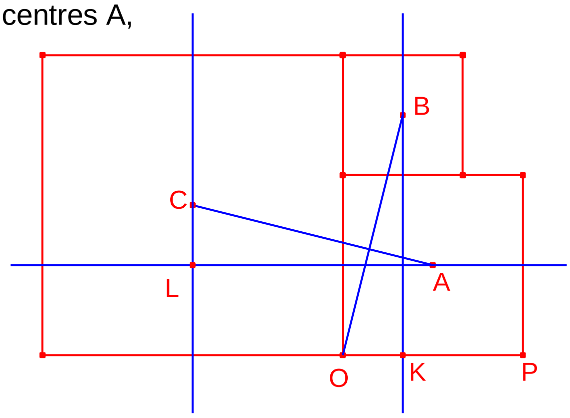
El punt O és el vèrtex de dos quadrats.

Proveu que $\overline{OB}$, $\overline{AC}$ són iguals i perpendiculars.

Olympiad Maclaurin 2016.

Solució:

Siguen a, b, c les mesures dels costats dels quadrats de centres A, B, C, respectivament.



Notem que $a+b=c$.

Siga K la projecció de B sobre la recta OP.

Siga la recta paral·lela a BK que passa per C.

Siga la recta paral·lela a OK que passa per A.

Les dues rectes anterior s'intersecten en L.

$\overline{OK}=\frac{1}{2}b$, $\overline{BK}=a+\frac{1}{2}b$.

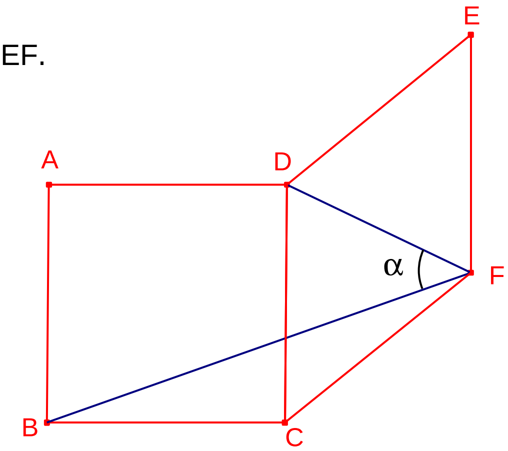
$\overline{CL}=\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}b$, $\overline{AL}=\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}a=a+\frac{1}{2}b$.

Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OKB}$, $\overset{\Delta}{CLA}$ són iguals, i tenen els catets corresponents perpendiculars,aleshores:

$\overline{OB}=\overline{AC}$, i a més a més, $\overline{OB}\perp\overline{AC}$.

1819.- Donat el quadrat ABCD s'ha dibuixat el rombe CDEF.

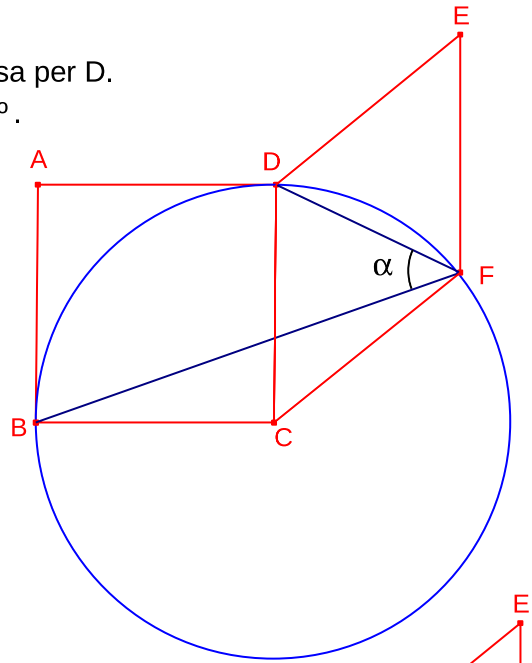
Determineu la mesura de l'angle $\alpha = \angle BFD$.



Solució 1:

F, B pertanyen a la circumferència de centre C que passa per D.
F és un angle inscrit i abraça un arc central $\angle ACD = 90^o$.

Aleshores, $\angle BFD = \frac{90^o}{2} = 45^o$.



Solució 2:
Siga $\beta = \angle DCF$.

El triangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és isòsceles, aleshores:

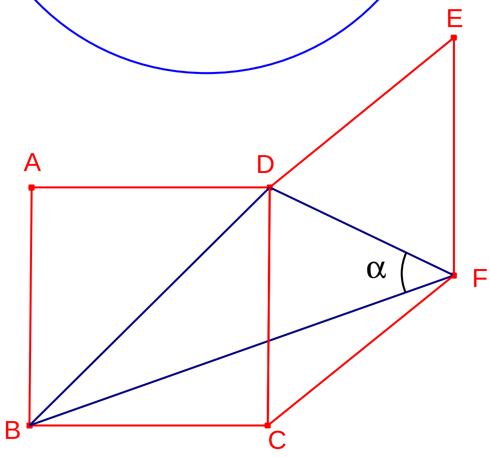
$\angle FBC = \angle BFC = 45^o - \frac{\beta}{2}$.

$\angle DBF = \angle DBC - \angle FBC = 45^o - \left(45^o - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{DCF}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle CDF = \frac{180^o - \angle DCF}{2} = 90^o - \frac{\beta}{2}$.

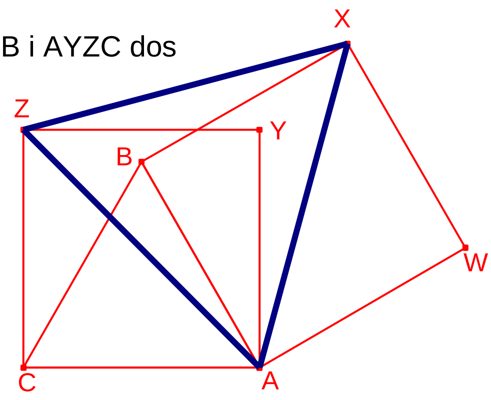
$\angle BDF = \angle BDC + \angle CDF = 45^o + \left(90^o - \frac{\beta}{2}\right) = 135^o - \frac{\beta}{2}$.



$\alpha = \angle BFD = 180^o - (\angle DBF + \angle BDF) = 180^o - \left(\frac{\beta}{2} + 135^o - \frac{\beta}{2}\right) = 45^o$.

1820.- En el dibuix, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter i AWXB i AYZC dos quadrats.

Proveu que $\overset{\Delta}{AXZ}$ és equilàter.



Solució:

El gir de centre A i 60º transforma el quadrat AWXB en el quadrat AYZC.

Aleshores, aquest gir transforma la diagonal $\overline{AX}$ en la diagonal $\overline{AZ}$.

Per tant, $\overline{AX} = \overline{AZ}$ i $\angle XAZ = 60º$.

Aleshores, $\overset{\Delta}{AXZ}$ és un triangle equilàter.