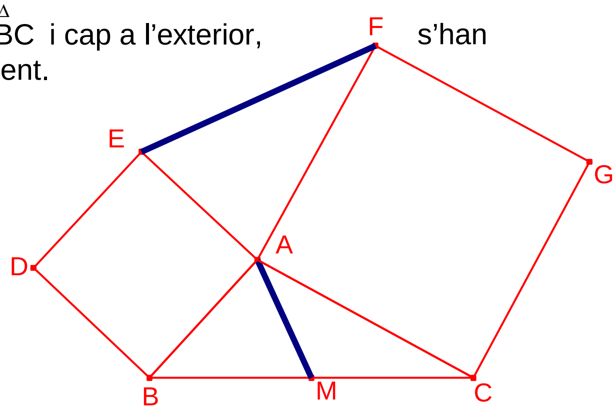
Problemes de Geometria per a l'ESO 183

1821.- Sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i cap a l'exterior, s'han dibuixat els quadrats ABDE I ACGF, respectivament.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Proveu que $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{AM}$ i $\overline{EF} \perp \overline{AM}$.



Solució:

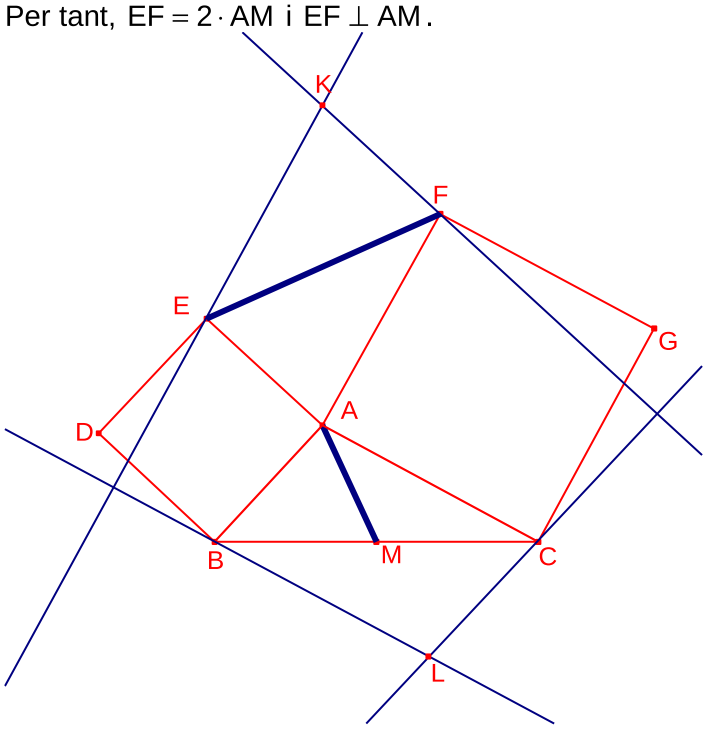
Construïm els paral·lelograms AFKE, ABLC.

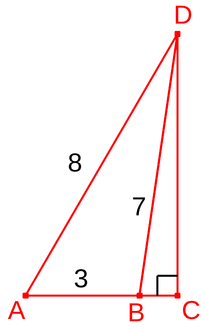
Els dos paral·lelograms són iguals I tenen els costats corresponents perpendiculars.

Aleshores, les diagonals $\overline{EF}$, $\overline{AL}$ són iguals i perpendiculars.

M és el centre del paral·lelogram.

Per tant, $\overline{EF} = 2 \cdot \overline{AM}$ i $\overline{EF} \perp \overline{AM}$.





1822.- En la figura, $\overline{AB}=3$, $\overline{BD}=7$, $\overline{AD}=8$, $\angle ACD=90^{o}$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$.

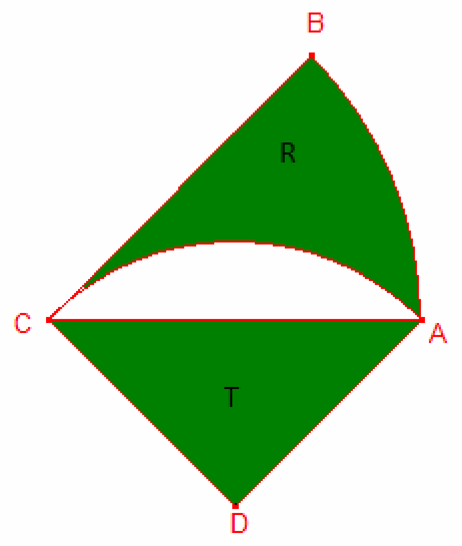
Solució:
Siga $\overline{BC}=x$, $\overline{CD}=y$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$x^2+y^2=7^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:
$(x+3)^2+y^2=8^2$.
Considerem el sistema format per les dues expressions:
$\begin{cases} x^2+y^2=49 \\ (x3)^2+y^2=64 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x=1 \\ y=4\sqrt{3} \end{cases}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és:
$$S_{BCD}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

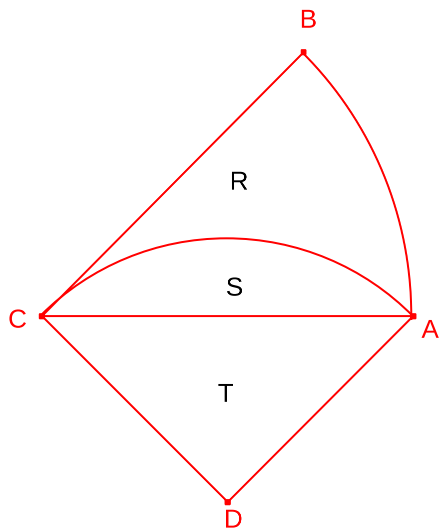
1923.- En el dibuix, hi ha dos arcs:



L'arc $\overset{\frown}{AB}$ és un vuité de circumferència de centre C.

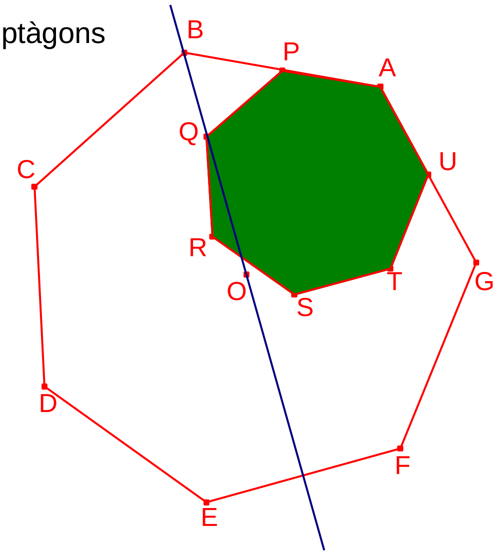
L'arc $\overset{\frown}{AC}$ és un quart de circumferència de centre D.
Proveu que l'àrea del triangle T és igual a l'àrea ombrejada R.

Solució:
Siga S l'àrea del segment circular $\overline{AC}$.
Siga $\overline{DA}=\overline{DC}=c$.
$\overline{AC}=\overline{CB}=c\sqrt{2}$.
L'àrea del sector de radi $\overline{DA}=\overline{DC}=c$ i 45º és:
$T+S=\frac{1}{4}\pi c^2$.
L'àrea del sector de radi $\overline{AC}=\overline{CB}=c\sqrt{2}$ i $\frac{45^o}{2}$ és:
$R+S=\frac{1}{8}\pi\left(c\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi c^2$.
Aleshores, $T+S=R+S$. Simplificant:
$T=R$.



1824.- En el dibuix, ABCDEFFG i APQRSTU són dos heptàgons regulars.

El vèrtex P pertany al costat $\overline{AB}$ i el vèrtex U pertany al costat $\overline{GA}$.
Si Q pertany a la recta OB proveu que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AP}$.



Solució:
$\angle AOB = \frac{2\pi}{7}$.

$\angle OBP = \angle OAP = \frac{\pi - \frac{2\pi}{7}}{2} = \frac{5}{14}\pi$.

$\angle APQ = \angle ABC = \pi - \angle AOB = \pi - \frac{2\pi}{7} = \frac{5}{7}\pi$.

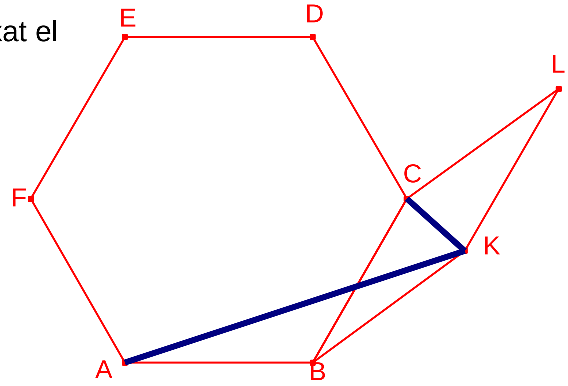
$\angle BPQ = \pi - \angle APQ = \pi - \frac{5\pi}{7} = \frac{2}{7}\pi$

$\angle PQB = \pi - (\angle OBP + \angle AOB) = \pi - \left(\frac{5}{14}\pi + \frac{2}{7}\pi\right) = \frac{5}{7}\pi$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BPQ}$ és isòsceles, $\overline{BP} = \overline{PQ}$.
$\overline{BP} = \overline{PQ} = \overline{AP}$. Aleshores, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AP}$.

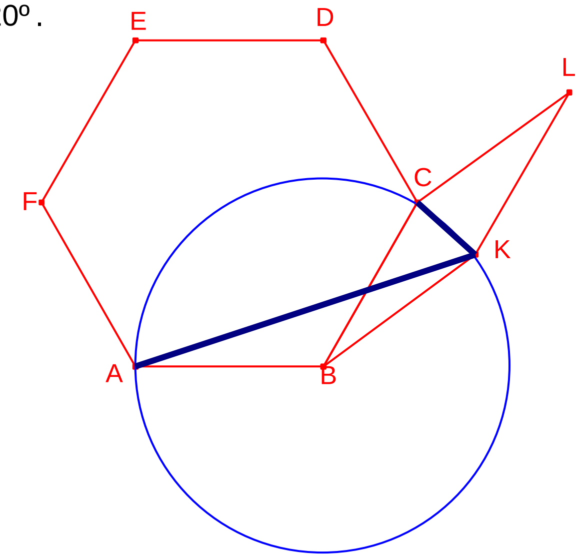
1825.- Donat l'hexàgon regular ABCDEF s'ha dibuixat el rombe BKLC.

Determineu la mesura de l'angle $\alpha = \angle AKC$.



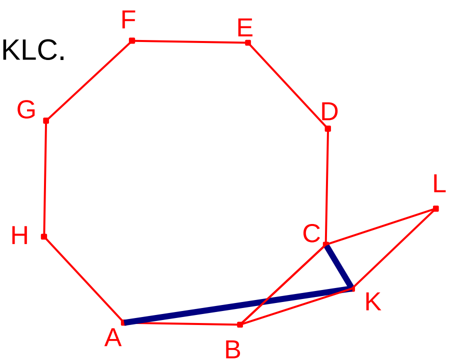
Solució:
K, C pertanyen a la circumferència de centre B quq passa per A.
K és un angle inscrit i abraça un arc central $\angle ABC = 120º$.

Aleshores, $\angle AKC = \frac{120º}{2} = 60º$.



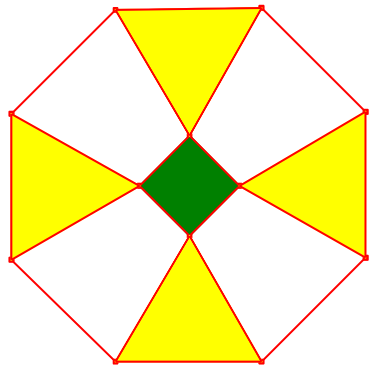
Problema
Donat l'octògon regular ABCDEFGH s'ha dibuixat el rombe BKLC.
Determineu la mesura de l'angle $\alpha = \angle AKC$.

Solució: $\angle AKC = 67º30'$.



1826.- En la figura, hi ha un octògon regular de costat c i quatre triangles equilàters.

Determineu l'àrea del quadrat que formen els vèrtexs dels quatre triangles equilàters.



Solució:

Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$.

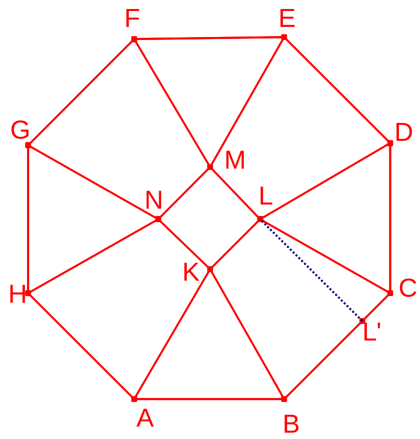
Siga KLMN el quadrat format pels vèrtexs dels quatre triangles equilàters.

Siga $x = \overline{KL}$, costat del quadrat KLMN.

$\angle BCD = 135^{o}$ angle interior de l'octògon regular.

$\angle LCB = \angle BCD - \angle LCD = 135^{o} - 60^{o} = 75^{o}$.

Siga L' la projecció de L sobre el costat $\overline{BC}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{LL'C}$:

$$\overline{CL'} = c \cdot \cos 75^{o} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} c .$$

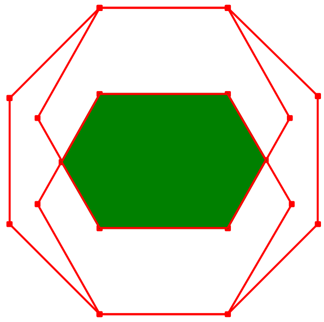
$$x = \overline{KL} = \overline{BC} - 2 \cdot \overline{CL'} = c - 2\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} c = \frac{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} c .$$

L'àrea del quadrat KLMN és:

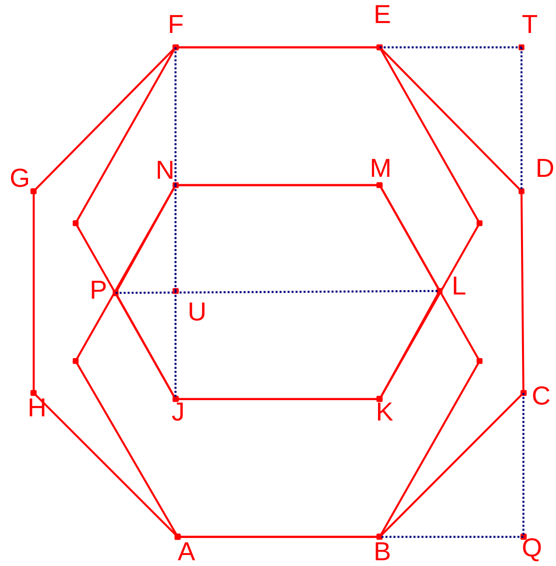
$$S_{KLMN} = x^2 = \left(\frac{2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} c \right)^2 = \left(3 - \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} \right) c^2 .$$

1827.- En la figura, hi ha un octògon regular de costat c i dos hexàgons regulars.

Determineu l'àrea i el perímetre de la intersecció dels dos hexàgons.



Solució:
Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB}=c$.
Siga JKLMNP l'hexàgon intersecció dels dos hexàgons regulars.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BQC}$:

$$\overline{QC}=\frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

$$\overline{AF}=\overline{CD}+2\cdot\overline{QC}=\left(1+\sqrt{2}\right)c.$$

$$\overline{UF}=\frac{1}{2}\overline{AF}=\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)c.$$

$$\overline{AN}=\sqrt{3}c.$$

$$\overline{UN}=\overline{AN}-\overline{UF}=\sqrt{3}c-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)c=\frac{2\sqrt{3}-1-\sqrt{2}}{2}.$$

$\angle NPU=60^{o}$. Siga $x=\overline{PN}$, $y=\overline{PU}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PUN}$:

$$\frac{\left(2\sqrt{3}-1-\sqrt{2}\right)c}{2x}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ aleshores, } x=\frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}c,$$

$$y=\frac{1}{2}x=\frac{6-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c$$

El perímetre de l'hexàgon JKLMNP és:

$$P_{JKLMNP}=2\cdot\overline{AB}+4x=\frac{30-4\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{3}c.$$

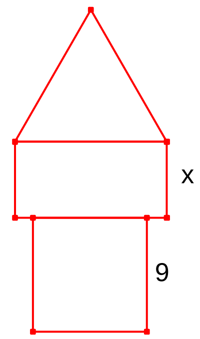
L'àrea de l'hexàgon JKLMNP és igual al doble de l'àrea del trapezi PLMN:

$$S_{JKLMNP}=2\cdot S_{PLMN}=2\frac{\overline{AB}+2y+\overline{AB}}{2}\overline{UN}=\frac{\left(12-\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(2\sqrt{3}-1-\sqrt{2}\right)}{6}c^{2}.$$

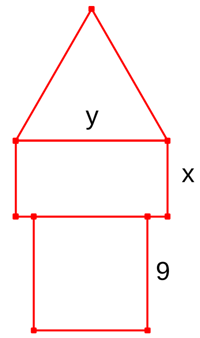
$$S_{JKLMNP}=\frac{-18-18\sqrt{2}+27\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6}c^{2}.$$

1828.- La figura està formada per un quadrat un rectangle i un triangle d'igual perímetre.

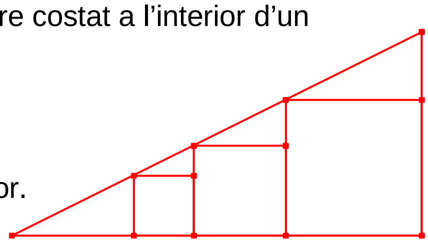
Si el costat del quadrat és 9, calculeu la mesura x del costat del rectangle.



Solució:
Siga y la mesura de l'altre costat del rectangle i costat del triangle equilàter.
El perímetre del quadrat és $P = 4 \cdot 9 = 36$.
El perimetre del triangle equilàter és:
$P = 3y = 36$.
$y = 12$.
El perímetre del rectangle és:
$P = 2(x + y) = 36$.
$2(x + 12) = 36$.
$x = 6$.



1829.- En la figura, s'han dibuixat tres quadrats costat sobre costat a l'interior d'un triangle rectangle.



El costat del quadrat menut és 16 i el del gran 36.
Determineu la mesura del costat del quadrat mitjà.
Determineu la proporció entre els catets del triangle exterior.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $B = 90^{\circ}$.

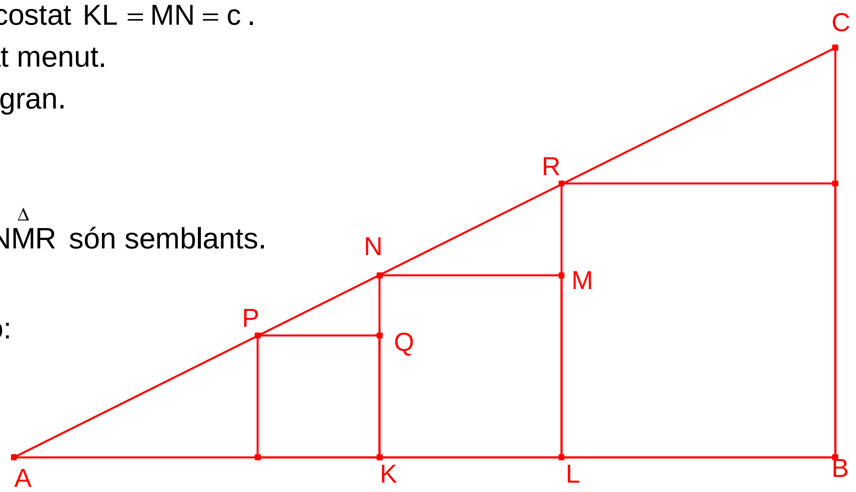
Siga KLMN el quadrat mitjà de costat $\overline{KL} = \overline{MN} = c$.

Siga $\overline{PQ} = 16$ costat del quadrat menut.

Siga $\overline{LR} = 36$ costat el quadrat gran.

$\overline{QN} = c - 16$.

$\overline{MR} = 36 - c$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQN}$, $\overset{\Delta}{NMR}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{36-c}{c-16} = \frac{c}{16}$. Resolent l'equació:

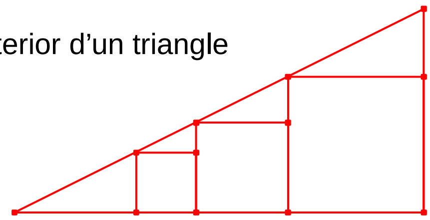
$c = 24$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQN}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales la proporció entre els catets del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{QN}}{\overline{PQ}} = \frac{c-16}{16} = \frac{24-16}{16} = \frac{1}{2}.$$

Generalització:
En la figura, s'han dibuixat tres quadrats costat sobre costat a l'interior d'un triangle rectangle.
El costat del quadrat menut és a i el del gran b.
Determineu la mesura del costat del quadrat mitjà.
Determineu la proporció entre els catets del triangle exterior.

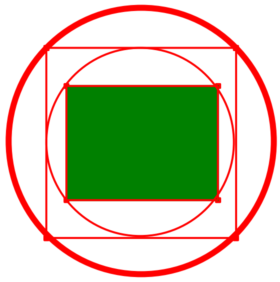


Solució:

El costat del quadrat mitja és $\sqrt{ab}$.

La proporció entre els catets del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $\frac{\sqrt{ab}-a}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}} - 1$.

1830.- En la figura, les mesures dels costats del rectangle interior són 6 cm i 8cm.

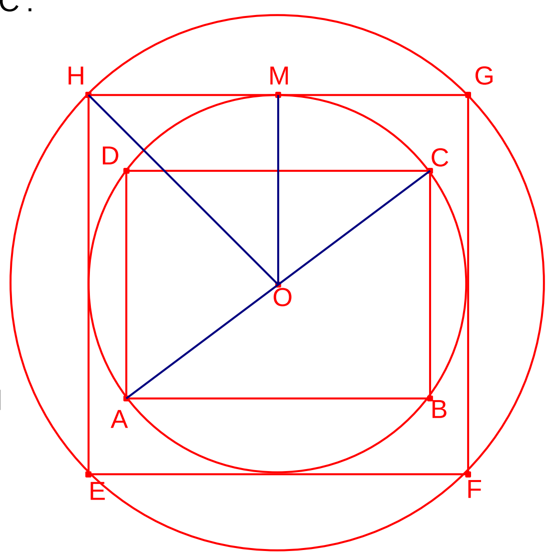


Sobre la circumferència circumscrita al rectangle s'ha circumscrit un quadrat.
Determineu l'àrea del cercle circumscrit al quadrat.

Solució:

Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB}=8$, $\overline{AD}=6$.
Siga O el centre de la circumferència circumscrita al rectangle ABCD.
$\overline{AC}$ és un diàmetre de la circumferència circumscrita al rectangle ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}=10$.
Siga M el punt mig del quadrat EFGH.



$\overline{OM}=\overline{MH}=\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=5$.
$\overline{OH}$ és el radi de la circumferència circumscrita al quadrat EFGH.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{OMH}$:
$\overline{OH}=\overline{OM}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$.
L'àrea de la circumferència circumscrita al quadrat EFGH és:
$S=\pi\left(5\sqrt{2}\right)^2=50\pi$.