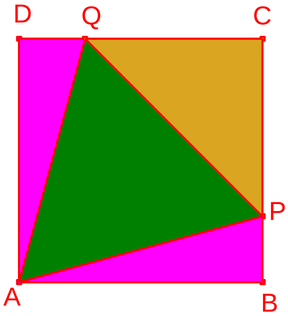
Problemes de Geometria per a l'ESO 184



1831.- Considerem un quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$ tal que P pertany al costat $\overline{BC}$ i Q al costat $\overline{CD}$.

a) Calculeu la mesura el costat del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.

b) Proveu que la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{ADQ}$ és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PCQ}$.

Solució:

a)

Siga $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{AQ} = c$.

$\angle BAP = \angle DAQ = 15^{o}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$\cos 15^{o} = \frac{a}{c}$.

$c = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$\frac{\overline{BP}}{a} = tg15^{o}$.

$\overline{BP} = \left(2 - \sqrt{3}\right)a$.

$\overline{PC} = a - \overline{BP} = \left(\sqrt{3} - 1\right)a$.

b)

$S_{ABP} = \frac{1}{2}a \cdot \overline{BP} = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)a^2$.

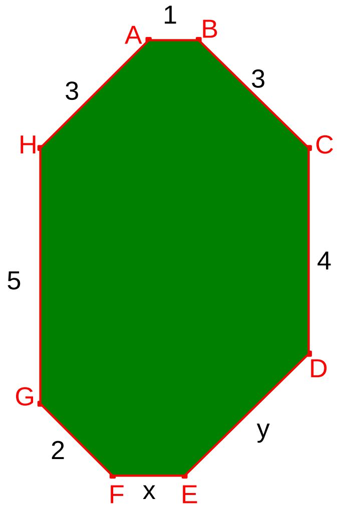
$S_{ABP} + S_{ADQ} = \left(2 - \sqrt{3}\right)a^2$.

$S_{PCQ} = \frac{1}{2}\overline{PC}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)^2 a^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)a^2$.

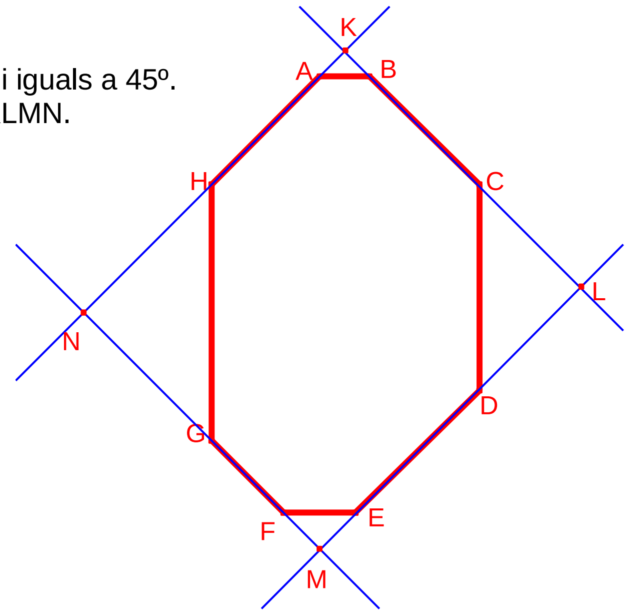
Aleshores, $S_{ABP} + S_{ADQ} = S_{PCQ}$.

1932.- Siga ABCDEFGH un octògon equiangular

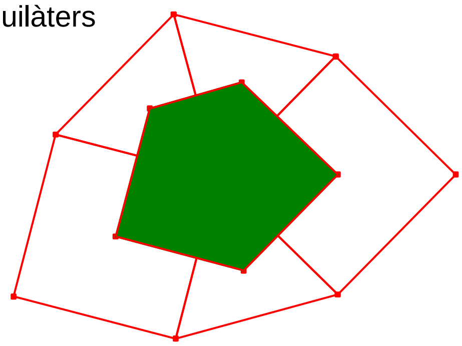
Si $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=\overline{AH}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{GH}=5$, $\overline{FG}=2$.
determineu les mesures dels costats $\overline{EF}=x$, $\overline{DE}=y$.



Solució:
La suma dels angles d'un polígon convex de 8 costat és:
$180^o(8-2)=1080^o$. Aleshores, cadascun del angles del polígon mesura:
$\frac{1080^o}{8}=135^o$.
Els angles exterior d'aquest polígon són tots iguals i iguals a 45º.
Les rectes BC, De, FG, i AH formen el rectangles KLMN.

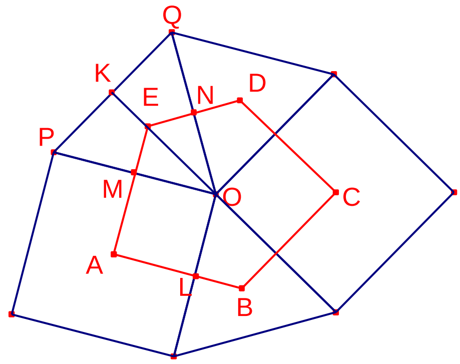


$\overline{AK}=\overline{BK}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{CL}=\overline{DL}=2\sqrt{2}$, $\overline{GN}=\overline{HN}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$.
$\overline{EM}=\overline{FM}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\overline{MN}=\overline{KL}$, aleshores:
$\frac{\sqrt{5}}{2}+2+\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}+3+2\sqrt{2}$. Resolent l'equació:
$x=\sqrt{2}$.
$\overline{KN}=\overline{LM}$, aleshores:
$\frac{\sqrt{5}}{2}+3+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x+y+2\sqrt{2}$. Resolent l'equació:
$y=2+\sqrt{2}$.



1833.- En la figura, hi ha dibuixats dos quadrats i 3 triangles equilàters de costats c.

Amb els seus centres s'ha dibuixat un pentàgon.
Determineu l'àrea, el perímetre i els angles del pentàgon.



Solució:
Siga ABCDE el pentàgon.
$\overline{AE}$ és la mediatriu del costat $\overline{OP}$.
$\overline{DE}$ és mediatriu del costat $\overline{OQ}$.

$$\overline{OM} = \overline{AM} = \overline{AL} = \frac{c}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Aplicant la propietat del baricentre al triangle equilàter $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{KE} = \overline{ME} = \overline{EN} = \frac{1}{3}\overline{OK} = \frac{\sqrt{3}}{6}c.$$

a)
El perímetre del polígon ABCDE és:

$$P_{ABCDE} = 4 \cdot \overline{AL} + 6 \cdot \overline{ME} = \left(2+\sqrt{3}\right)c.$$

b)
L'àrea del quadrilàter OMEN és:

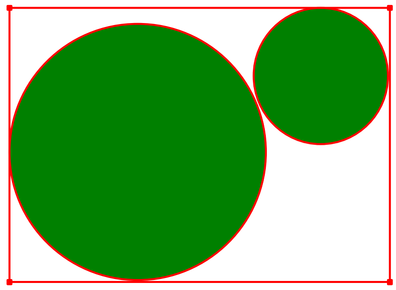
$$S_{OMEN} = \frac{1}{3}S_{OPQ} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

L'àrea del polígon ABCDE és:

$$P_{ABCDE} = 2 \cdot S_{ALOM} + 3 \cdot S_{OMEN} = 2 \cdot \frac{1}{4}c^2 + 3\left(\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)c^2.$$

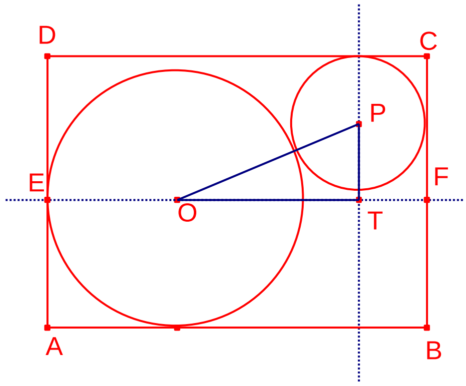
c)
$\angle OME = \angle ONE = 90^o$, $\angle NOM = 60^o$.
$\angle MEN = 360^o - \left(2 \cdot \angle OME + \angle NOM\right) = 120^o$.
Els angles del polígon ABCDE són:
$A = C = 90^o$, $B = D = E = 120^o$.

1834.- Dues circumferències tangents de radis 9 cm, 17cm estan inscrits en un rectangle de base 50 cm. Le dues circumferències són tangents a dos costats adjacents del rectangle, com indica la figura.



Calculeu l'àrea del rectangle.

Solució:
Siga ABCD el rectangle $AB = 50$.
Sigue O i P el centre de les dues circumferències.
La recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa pel centre O talla el rectangle en els punts E, F.
Siga T la projecció de P sobre el segment $\overline{EF}$.

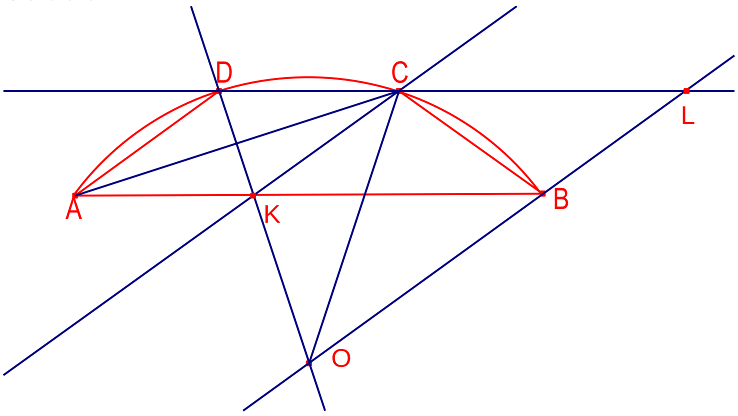


$\overline{OE} = 17$, $\overline{TF} = 9$.
$\overline{OT} = 24$, $\overline{OP} = 17 + 9 = 26$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\overline{TP} = 10$.
$\overline{BC} = 17 + 9 + \overline{TP} = 36$.
L'àrea del rectangle ABCD és:
$S_{ABCD} = 50 \cdot 36 = 1800\,\text{cm}^2$.

1835.- Un trapezi inscrit en una circumferència de radi r té 3 costats iguals de longitud s i el quart de longitud $r+s$, amb $s<r$.

Determineu els angles del trapezi.

Solució:



El trapezi que cerquem és isòsceles, per estar inscrit en una circumferència.
Siga el trapezi ABCD amb $\overline{AB}$ paral·lel a $\overline{CD}$, $\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{AD}=s$, $\overline{AB}=r+s$.
Siga O el centre de la circumferència circumscrita al trapezi ABCD.
Siga $\alpha=\angle DAB=\angle ABC$.
Tracem la recta paral·lela al costat $\overline{AD}$ que passa per C.
Aquesta recta talla el costat $\overline{AB}$ en el punt K.
AKCD és un rombe de costat s.
Tracem la recta paral·lela al costat $\overline{AD}$ que passa per O.
Aquesta recta talla la recta CD en el punt L.
$\overline{KB}=\overline{CL}=r$.
Per ser angle central: $\angle COD=\angle BOC=\alpha$.
El triangle $\overset{\Delta}{OCL}$ és isòsceles.
$\angle OCD=\angle ODC=2\angle COD=2\alpha$.
La suma dels angles del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCL}$ és 180º:
$5\alpha=180^{o}$. Resolent l'equació:
$\alpha=36^{o}$.

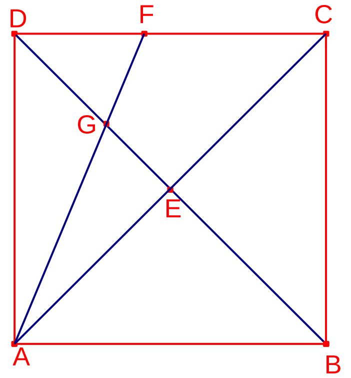
Els angles del trapezi isòsceles ABCD són 36º i 144º.
Notem que els tres costats iguals són costats d'un decàgon regular.

1836.- Siga el quadrat ABCD. $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ es tallen en E.

Siga F el punt en $\overline{CD}$ tal que $\angle CAF = \angle FAD$.
Si $\overline{AF}$ talla $\overline{ED}$ en G i $\overline{EG} = 24$, calculeu la mesura del segment $\overline{CF}$.

Solució 1:
Siga $\overline{AB} = c$, costat del quadrat ABCD.

$\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.



Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DG}}{c} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE} + c}.$$

$$\frac{24}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}c}{\frac{\sqrt{2}}{2}c + c}.$$ Resolent l'equació:

$c = 24\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADF}$, $\overset{\Delta}{AEG}$ són semblants. .Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{DF}}{c}.$$

$$\frac{24}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \frac{\overline{DF}}{c}.$$ Resolent l'equació:

$\overline{DF} = 24\sqrt{2}$.

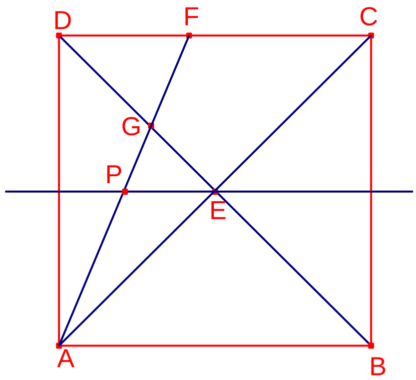
$\overline{CF} = c - \overline{DF} = 48$.

Solució 2:

$\angle DAF = \angle FAC = \frac{\pi}{8}$.

$\angle FAB = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$

Pel punt E tracem un paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla el segment $\overline{AF}$ en el punt P.



$\angle GPE = \angle FAB = \frac{3}{8}\pi$

$\angle PEG = \angle ABD = \frac{\pi}{4}$.

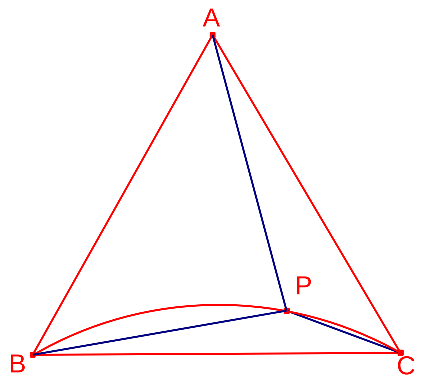
$\angle PGE = \pi - \left(\angle PEG + \angle GPG\right) = \frac{3}{8}\pi$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{GPE}$ és isòsceles, $\overline{PE} = \overline{GE}$.

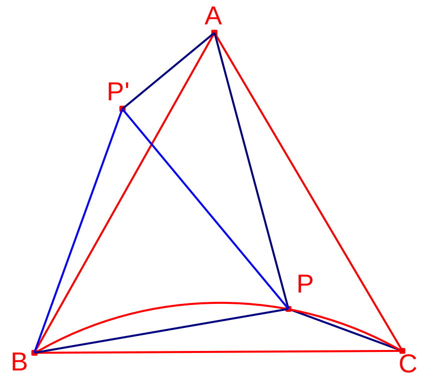
Els triangles $\overset{\Delta}{APE}$, $\overset{\Delta}{AFC}$ són semblants i de raó 1:2.
Aplicant el teorema de tales:
$\overline{FC} = 2 \cdot \overline{PE} = 2 \cdot \overline{GE} = 48$.

1837.- Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga P un punt interior al triangle tal que $\angle BPC = 150^o$.
Proveu que els segments $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ són els costats d'un triangle rectangle.



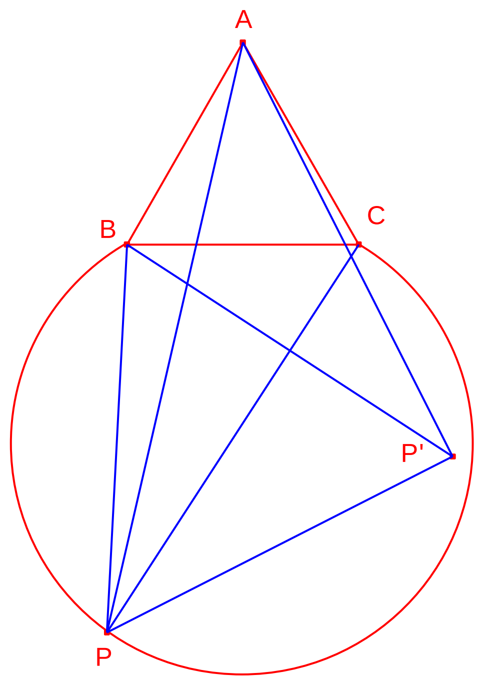
Solució:
Siga $\alpha = \angle PBC$.
El gir de centre B I 60º transforma el punt P en P'.
$\angle P'BP = \angle PBC$.
Els triangles $\overset{\Delta}{BPC}$, $\overset{\Delta}{BP'A}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{P'A} = \overline{PC}$, $\angle BP'A = \angle BPC = 150^o$.
El triangle $\overset{\Delta}{BPP'}$ és equilàter:
$\overline{PP'} = \overline{PB}$.
$\angle AP'P = \angle BP'A - \angle BP'P = 150^o - 60^o = 90^o$.
Aleshores, els triangle $\overset{\Delta}{AP'P}$ és rectangle:
$\angle AP'P = 90^o$, $\overline{PP'} = \overline{PB}$, $\overline{P'A} = \overline{PC}$.



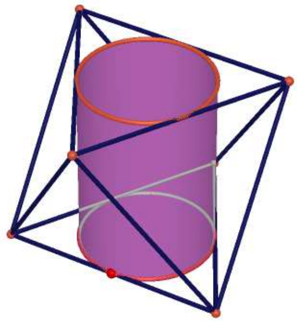
Problema 1837b

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga P un punt exterior al triangle tal que $\angle BPC = 30^o$.
Proveu que els segments $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ són els costats d'un triangle rectangle.

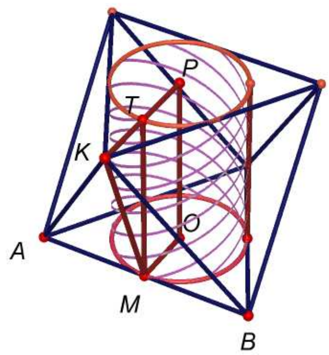
Solució:
Siga $\alpha = \angle PBC$.
El gir de centre B I 60º transforma el punt P en P'.
$\angle P'BP = \angle PBC$.
Els triangles $\overset{\Delta}{BPC}$, $\overset{\Delta}{BP'A}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{P'A} = \overline{PC}$, $\angle BP'A = \angle BPC = 30^o$.
El triangle $\overset{\Delta}{BPP'}$ és equilàter:
$\overline{PP'} = \overline{PB}$.
$\angle AP'P = \angle BP'A + \angle BP'P = 30^o + 60^o = 90^o$.
Aleshores, els triangle $\overset{\Delta}{AP'P}$ és rectangle:
$\angle AP'P = 90^o$, $\overline{PP'} = \overline{PB}$, $\overline{P'A} = \overline{PC}$.



1838.- Calculeu el volum d'un cilindre que té inscrites les bases en dues cares oposades d'un octàedre regular d'aresta a.



Solució:
Siguen O, P els centres de les bases del cilindre (centres a la vegada de les cares de l'octàedre)
Siga K vèrtex de l'octàedre (veure figura).



Siga T la intersecció del segment $\overline{PK}$ i la circumferència de la base superior.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB} = a$.

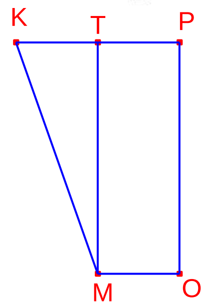
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMK}$:

$$\overline{KM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Siga $\overline{PT}$ radi de la circumferència inscrita a la cara superior.
Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{PT} = \overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{KM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a. \quad \overline{PK} = \frac{2}{3}\overline{KM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aleshores, $\overline{TK} = \overline{PK} - \overline{PT} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.



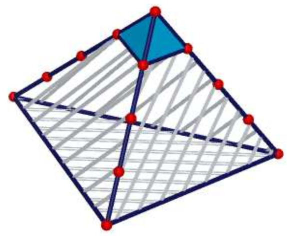
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTK}$:

$\overline{MT} = \overline{OP} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$, altura del cilindre.

El volum del cilindre és:

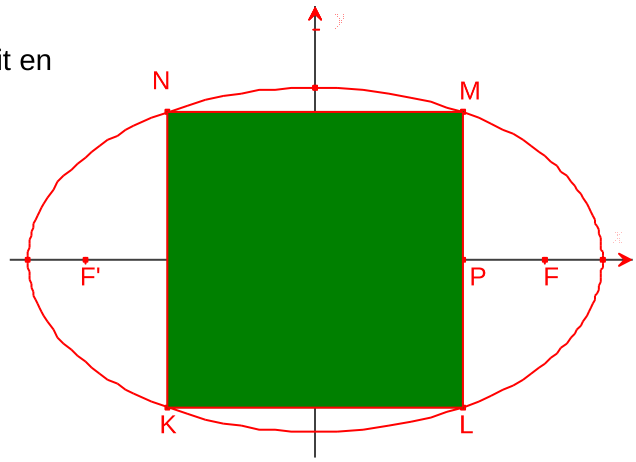
$$V_{cilindre} = \pi \cdot \overline{PT}^2 \cdot \overline{OP} = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2 \frac{2\sqrt{2}}{3}a = \frac{\pi\sqrt{2}}{18}a^3.$$

1839.- Una piràmide triangular buida està seccionada a $\frac{3}{4}$ de la seua altura amb un plànol paral·lel a la base.



La part superior de la secció s'utilitzarà per omplir la part truncada amb aigua.
Quantes vegades haurà d'omplir el recipient superior per omplir totalment la piràmide truncada inferior.

Solució:
La piràmide superior i la piràmide inferior són semblants i estan en relació 1:4.
Aleshores els seus volums estan en proporció 1:64.
Aleshores, el volum de la piràmide superior i la piràmide truncada estan en relació 1:63.
Aleshores s'ha d'omplir 63 vegades la part superior per omplir la part inferior.



1840.- Determineu l'àrea del quadrat KLMN inscrit en l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Solució:
Siga P la projecció de M sobre l'eix focal FF'.
Siga $\overline{OP}=\overline{PM}=x$.
L'àrea del quadrat KLMN és $S_{KLMN}=4x^2$.
El punt M pertany a l'el·lipse aleshores:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Resolent l'equació:

$$x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

L'àrea del quadrat KLMN és:

$$S_{KLMN}=4x^2=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$