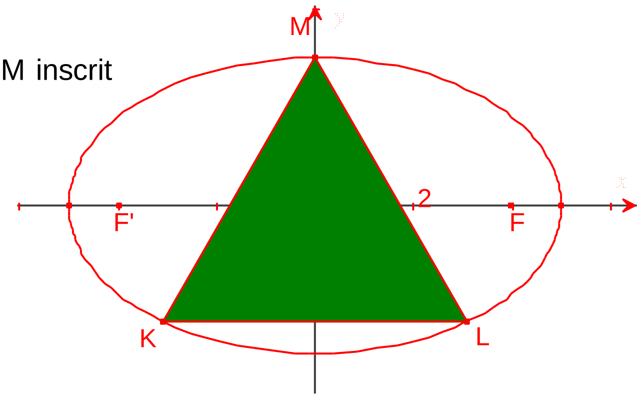
Problemes de Geometria per a l'ESO 185

1841.- Determineu l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ inscrit en l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



Solució:

Siga O el centre de l'el·lipse.

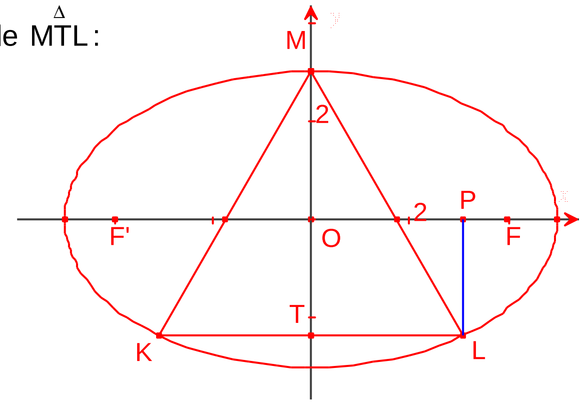
$\overline{OM}=b$.

Siga P la projecció de L sobre l'eix focal FF'.

Siga T el punt mig del costat $\overline{KL}$

Siga $\overline{TL}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTL}$:



$\overline{TM}=x\sqrt{3}$.

$\overline{PL}=\overline{OT}=x\sqrt{3}-b$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2x)^2.$$

El punt L pertany a l'el·lipse aleshores:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\left(x\sqrt{3}-b\right)^2}{b^2}=1.$$

Resolent l'equació:

$$x=\frac{2a^2b\sqrt{3}}{3a^2+b^2}.$$

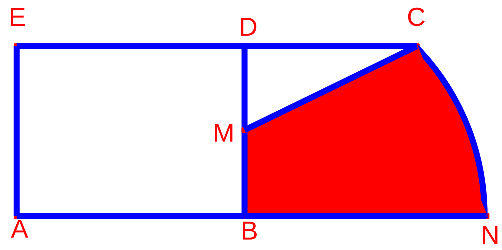
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$$S_{KLM}=\frac{\sqrt{3}}{4}(2x)^2=\frac{12\sqrt{3}\cdot a^4b^2}{\left(2a^2+b^2\right)^2}.$$

1842.- En la figura, ABDE és un rectangle. C, N pertanyen la la circumferència de centre B. A, B i N pertanyen a la mateixa recta. E, D i C pertanyen a la mateixa recta.

M és el punt mig del segment $\overline{BD}$.

$\overline{DC} = \overline{DB}$, $\overline{DB} = \frac{3}{4}\overline{ED}$. L'àrea de ABCE és $594 cm^2$.



a) Calculeu l'àrea del polígon ABCD.
b) Calculeu el perímetre del polígon ABCD.
c) Calculeu el perímetre de la regió ombrejada.
d) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

Solució:

Siga $\overline{AB} = \overline{ED} = x$, $\overline{BD} = \overline{DC} = \frac{3}{4}x$. $\overline{DC} = \overline{DB}$, aleshores, $\angle DBC = \angle CBN = 45^o$.

$S_{ABCE} = S_{ABDE} + S_{BDC}$. $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 594$. Resolent l'equació: $x = 24 cm$.

a)
L'àrea del polígon ABCD és:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2}\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)^2 = 378 cm^2.$$

b)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$: $\overline{AD} = \frac{5}{4}x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDC}$: $\overline{BC} = \overline{BN} = \frac{3\sqrt{2}}{4}x$.

El perímetre del polígon ABCD és:

$$P_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = x + \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = \left(3 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)x = 72 + 18\sqrt{2} \approx 97.45cm$$

c)

$\overline{DM} = \overline{BM} = \frac{3}{8}x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MDC}$: $\overline{CM} = \frac{3}{8}\sqrt{5}\cdot x$.

L'arc $\overset{\frown}{CN}$ és un vuitè de circumferència de radi $\overline{BC} = \overline{BN} = \frac{3\sqrt{2}}{4}x = 18\sqrt{2}$.

El perímetre de la regió ombrejada és:

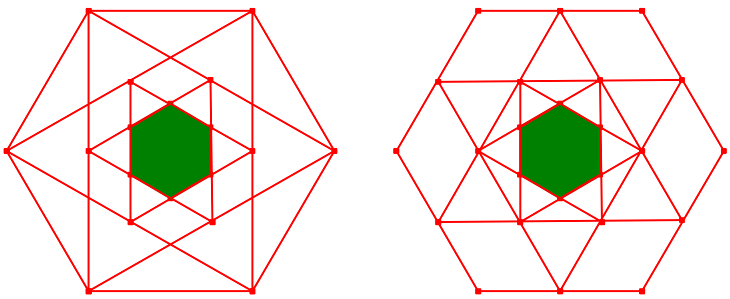
$$P_{om} = \overline{BN} + \overset{\frown}{CN} + \overline{CM} + \overline{BM} = \frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{4}2\pi\frac{3\sqrt{2}}{4}x + \frac{3}{8}\sqrt{5}x + \frac{3}{8}x = \left(\frac{3 + 6\sqrt{2} + 3\sqrt{5} + 3\pi\sqrt{2}}{8}\right)24 \approx 87.10cm$$

d)

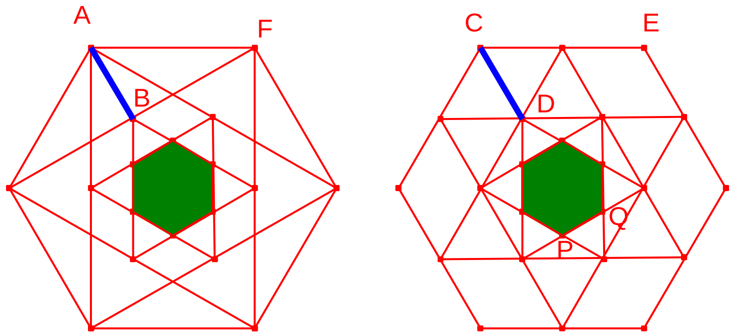
L'àrea de la regió ombrejada és la suma de les àrees del triangle $\overset{\Delta}{BMC}$ i el sector CBN.

$$S_{om} = \frac{1}{2}\overline{BM}\cdot\overline{CD} + \frac{1}{4}\pi\overline{BN}^2 = 81 + 81\pi \approx 335.47 cm^2.$$

1843.- Sobre dos hexàgons regulars iguals s'han ombrejat dos hexàgons.
Compareu les seues àrees.



Solució:



$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AF}.$$

$$\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{CE}$$

Aleshores, $\overline{AB} = \overline{CD}$.
Per tant, els dos hexàgons regulars ombrejats són iguals.

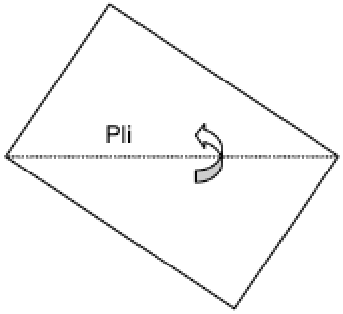
$$\overline{PQ} = \frac{1}{4\sqrt{3}}\overline{CD} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\overline{CE}.$$

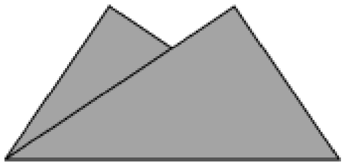
La proporció entre les àrees de l'hexàgon ombrejat i l'exterior és:

$$\frac{S_{ombrejat}}{S_{exterior}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{CE}}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{12}.$$

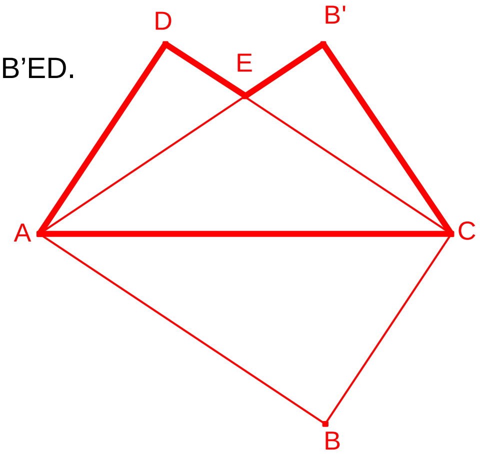
1844.- Un full rectangular 12×18 l'hem doblegat per la diagonal formant una regió en forma de M com es veu en la figura.

Calculeu l'àrea de la la regió ombrejada.
Crux Mathematicorum CC211.





Solució:
Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB}=18$, $AD=12$.



Al doblegar el full per la diagonal $\overline{AC}$ es forma el polígon ACB'ED.
Siga $\alpha=\angle BAC=\angle B'AC$.
$\angle DAC=90º-\alpha$.
Aleshores, $\angle DAE=90º-2\alpha$.

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}.$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{5}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\mathrm{tg}2\alpha=\frac{12}{5}.$$

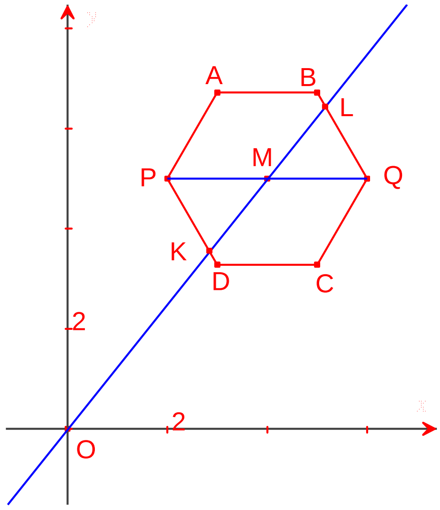
$\frac{12}{\overline{DE}}=\frac{12}{5}$. Aleshores, $\overline{DE}=5$.

L'àrea del polígon ACB'ED és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{ADE}$.

$$S_{ACB'ED}=S_{ABC}+S_{ADE}=\frac{1}{2}\cdot 81\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5=138.$$

1845.- Els punts $(2,5)$ i $(6,5)$ són dos vèrtexs d'un hexàgon regular de costat 2.

Una recta que passa per l'origen de coordenades $(0,0)$ talla l'hexàgon regular en dos parts d'igual àrea.
Determineu el pendent de la recta.
Crux Mathematicorum CC214.



Siguen
$P(2,5)$ i $Q(6,5)$.

Calculem la mesura del segment $\overline{PQ}$:
$\overline{PQ}=4=2\cdot 2$. La mesura del segment és el doble que el costat aleshores, P i Q són vèrtexs oposats de l'hexàgon regular.
El centre de l'hexàgon regular és el punt mig del segment $\overline{PQ}$.
Les seues coordenades són: $M(4,5)$.
Siga l'hexàgon regular PABQCD de costat 2 i centre M.
Vegem que la recta que passa pels punts $(0,0)$, M divideix l'hexàgon en dues parts d'igual àrea.
La recta anterior talla l'hexàgon regular en els punt K, L.

$\angle LMQ=\angle KMP$, $\angle MQL=\angle KPM=60^{\circ}$, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{LMQ},\overset{\Delta}{KMP}$ són iguals per tant tenen la mateixa àrea.

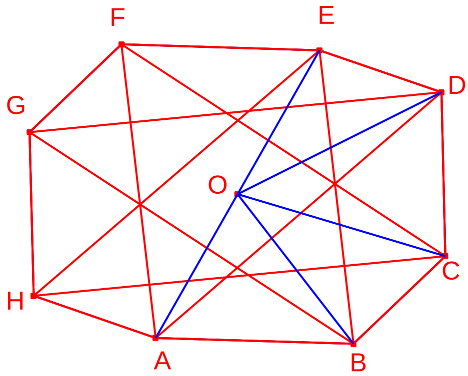
$S_{KPABL}=S_{PABA}=\frac{1}{2}S_{PABQCD}$.

Aleshores, la recta OM talla l'hexàgon regular en dues parts d'igual àrea.
El pendent de la recta OM és:

$m=\frac{5}{4}$.

1846.- L'octògon convex ABCDEFGH té centre de simetria.

Proveu que la suma dels quadrilàters ABEF, BCFG, CDGH i CEHA és igual al doble de l'àrea de l'octògon ABCDEFGH.
KöMaL, C1367.



Solució:
Siga O en centre de simetria.
Els costats oposats són iguals i paral·lels.
Aleshores, els quadrilàters ABEF, BCFG, CDGH i CEHA són paral·lelograms.

$$S_{ABO} = \frac{1}{4} S_{ABEF}.$$

$$S_{BCO} = \frac{1}{4} S_{BCFG}.$$

$$S_{CDO} = \frac{1}{4} S_{CDGH}.$$

$$S_{DEO} = \frac{1}{4} S_{DEHA}.$$

Sumant les quatre expressions:

$$S_{ABCDE} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CDO} + S_{DEO} = \frac{1}{4} S_{ABEF} + \frac{1}{4} S_{BCFG} + \frac{1}{4} S_{CDGH} + \frac{1}{4} S_{DEHA}.$$

Multiplicant l'expressió per 2:

$$S_{ABCDEFGH} = 2 \cdot S_{ABCDE} = \frac{1}{2}\left(S_{ABEF} + S_{BCFG} + S_{CDGH} + S_{DEHA}\right).$$

Aleshores:

$$S_{ABEF} + S_{BCFG} + S_{CDGH} + S_{DEHA} = 2 \cdot S_{ABCDEFGH}.$$

1847.- Dibuixem un quadrat a l'exterior de cadascun dels costats d'un polígon regular de n costats.

Els vèrtexs exteriors dels quadrats formen un polígon regular de 2n costats.
Calculeu els nombre de costats del polígon original:
KöMaL, C1365.

Solució:
Siguen A, B i C tres vèrtexs consecutius del polígon regular de n costats.
L'angle interior del polígon regular és:

$\angle ABC = 180^{o} - \dfrac{360^{o}}{n}$.

Siguen ABQP i BCSR els quadrats exteriors.
Si el polígon regular exterior és regular:

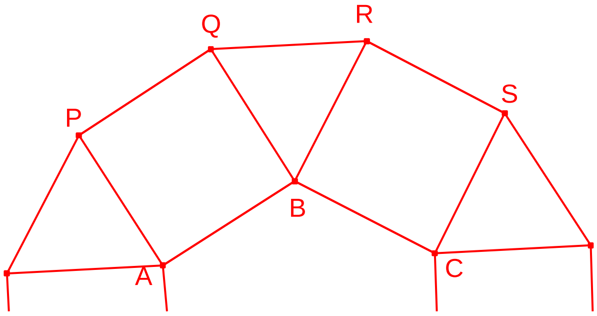
$\overline{BQ} = \overline{QR} = \overline{AB}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BQR}$ és equilàter.

$\angle ABC = 360^{o} - (\angle ABQ + \angle QBR + \angle RBC)$.

$\angle ABC = 360^{o} - (90^{o} + 60^{o} + 90^{o})$.

$\angle ABC = 120^{o}$.

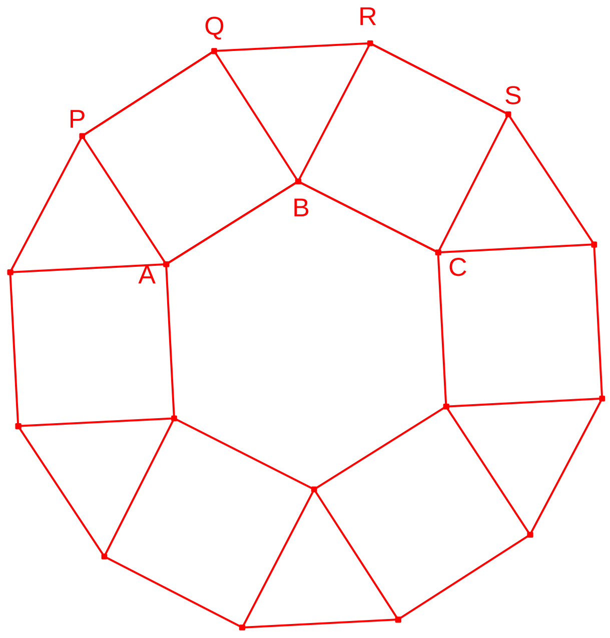


Aleshores, $\angle ABC = 180^{o} - \dfrac{360^{o}}{n} = 120^{o}$. Resolent l'equació:

$n = 6$, el polígon inicial és un hexàgon regular.

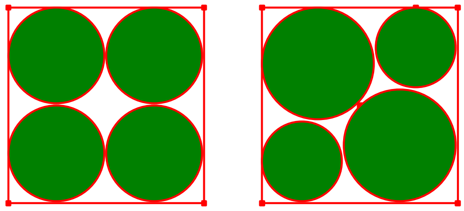
Notem que el polígon exterior és regular ja que a més a més els angles són iguals:

$\angle PQR = \angle QRS = 90^{o} + 60^{o} = 150^{o}$.



1848.- Els quadrats de les dues figures són iguals i costat unitat.

En una figura de l'esquerra hi ha 4 circumferències iguals i tangents dos a dos i tangents als costats.
En l'altra figura hi ha dos circumferències tangents d'igual radi que passen pel centre del quadrat i tangents al costats i altres dues circumferències més menudes i tangents a les dues anterior i als costats del quadrat.
Quin dels dos dibuixos té més àrea ombrejada?.



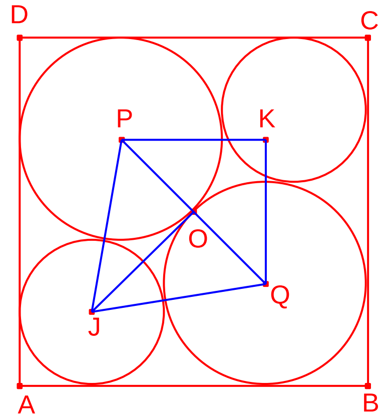
Solució:

El radi de les circumferències de la figura de l'esquerra és: $a=\frac{1}{4}$.

L'àrea de la zona ombrejada de l'esquerra és:

$$S_e=4\left(\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}\approx 0.785398.$$

Siga ABCD el quadrat de la figura de la dreta.
Siguen P i Q els centres de les circumferències que passen pel centre O del quadrat.
Siga r el radi de les dues circumferències.
Pel centre P tracen una recta paral·lela al costat $\overline{AB}$.
Pel centre Q tracem una recta paral·lela al costat $\overline{AD}$.
Les dues rectes s'intersecten en el punt K.



En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$: $\overline{PQ}=2r$, $\overline{PK}=\overline{QK}=1-2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKQ}$:

$2r=(1-2r)\sqrt{2}$. Resolent l'equació: $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Siga J el centre de la circumferència menuda i s el seu radi.

$\overline{AJ}=s\sqrt{2}$, $\overline{AO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{JOP}$:

$\overline{OJ}=\frac{\sqrt{2}}{2}-s\sqrt{2}$, $\overline{OP}=r$, $\overline{JP}=r+s$.

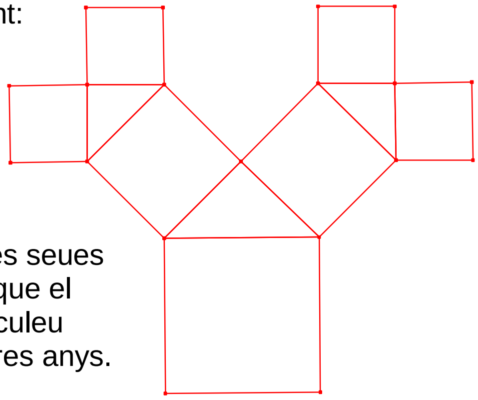
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JOP}$:

$(r+s)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-s\sqrt{2}\right)^2+r^2$. Simplificant:

$s^2+\left(-4+\sqrt{2}\right)s+\frac{1}{2}=0$. Resolent l'equació: $s=\frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$.

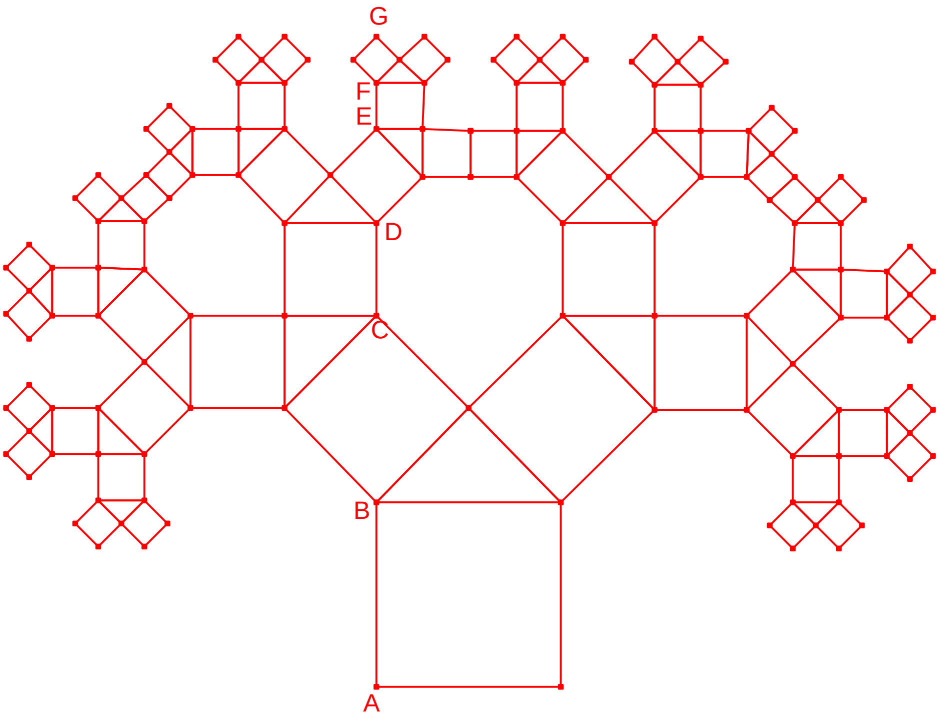
L'àrea de la zona ombrejada de la dreta és:

$$S_d=2\left(\pi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)+2\left(\pi\left(\frac{4-\sqrt{2}-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}\right)^2\right)\approx 0.817424.$$



1849.- El creixement d'un arbre de Pitàgores té el patró següent:
En el primer any, l'arbre creix el seu tronc, que és un quadrat.
En el segon any, un vèrtex d'un triangle rectangle i isòsceles creix a la part superior, tal que la hipotenusa és la part superior del quadrat, i llavors les dues primeres branques, també de forma quadrada, creixen des dels catets del triangle.
Llavors aquest patró es repeteix cada any, és a dir, un triangle rectangle isòsceles creix en la part superior de cada branca i les seues bases creixen dues branques de forma quadrada noves. Atès que el tronc (és a dir, el primer quadrat) és de 1 metre d'amplada, calculeu l'altura de l'arbre al final del quart any. L'arbre de la imatge té tres anys.
Generalitzeu el resultat.
Quina és l'altura si l'arbre no morira mai?.

Solució:

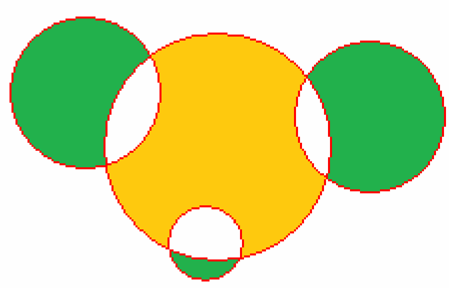


Hem dibuixat l'arbre amb 6 anys de vida.
L'altura al cap de quatre anys de vida és igual a la mesura del segment $\overline{AE}$.
Les longituds que creix l'arbre cada anys és:
$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, ...
$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$
Siga $n = 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots$ els anys transcorreguts.
L'altura de l'arbre pitagòric a cada any és:

$H_{2n-1} = 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}$. $H_{2n} = 2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$H_4 = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 3m$. $H_\infty = 2\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4m$.

1850.- En la figura hi ha 4 circumferències dues iguals de radi 2 i una menuda de radi 1.



Si la suma de les àrees ombrejades de verd i igual a la zona ombrejada de groc, determineu el radi de la circumferència gran.

Solució:
Siga S_{verd} el total de les àrees de les regions ombrejades de verd.
Siga S_{blanc} el total de les àrees de les regions en blanc dins del cercle gran.
Siga S_{grog} l'àrea interior al cercle gran ombrejada de groc.
Per hipòtesi $S_{verd} = S_{groc}$.
$S_{verd} + S_{blanc}$ és igual a l'àrea de tres cercles de radis 2, 2, 1:
$S_{verd} + S_{blanc} = 2\left(\pi \cdot 2^2\right) + \pi \cdot 1^2 = 9\pi$.
$S_{gran} = S_{groc} + S_{blanc}$, àrea del cercle gran.
$S_{gran} = S_{groc} + S_{blanc} = S_{verd} + S_{blanc} = 9\pi$.
Siga r l'àrea del cercle gran:
$S_{gran} = \pi \cdot r^2 = 9\pi$.
$r^2 = 9$.
$r = 3$.