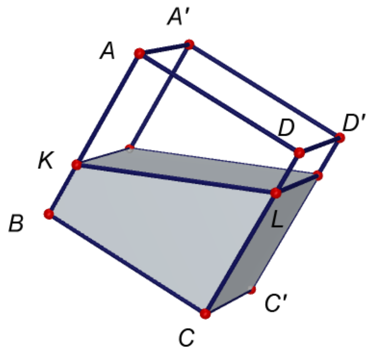
Problemes de Geometria per a l'ESO 186



1851.- Un contenidor és un cub ABCDA'B'C'D' d''aresta 12 està ple de líquid $\frac{5}{8}$ parts.

El cub s'ha decantat sobre una aresta $\overline{CC'}$.

El diagrama mostra l'envàs i el líquid en ell.

Atés que el segment $\overline{LC}$ és el doble del segment $\overline{KB}$.

Trobeu la longitud del segment $\overline{LC}$.

Solució:

Siguen $\overline{BK} = x$, $\overline{CL} = 2x$.

El volum del cub ABCDA'B'C'D' és:

$V_{cub} = 12^3$.

El volum que ocupa l'aigua és:

$V_{aigua} = \frac{5}{8} V_{cub} = \frac{5}{8} 12^3 = 1080$.

$V_{aigua} = S_{BCLK} \cdot \overline{CC'}$.

$V_{aigua} = \frac{2x + x}{2} 12 \cdot 12 = 216x$.

Igualant els volums:

$216x = 1080$.

Resolent l'equació:

$x = 5$.

$\overline{CL} = 2x = 10$.

1852.- Un rectangle i un rombe amb un angle de 30º tenen el mateix perímetre i la mateixa àrea.

Determineu la proporció entre els costats del rectangle.

Solució:

Siga ABCD el rectangle de costats $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$.

Podem suposar $a \geq b$.

Siga el rombe KLMN $\overline{KL} = c$, $\angle LKN = 30^\circ$.

El perímetre del rectangle i el rombe són iguals, aleshores:

$$a + b = 2c \qquad (1)$$

L'àrea del rectangle i el rombe són iguals:

$ab = c^2 \sin 30^\circ$. Simplificant:

$$c^2 = 2ab \qquad (2)$$

Elevant al quadrat l'expressió (1)

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4c^2 \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$a^2 + 2ab + b^2 = 8ab$. Simplificant:

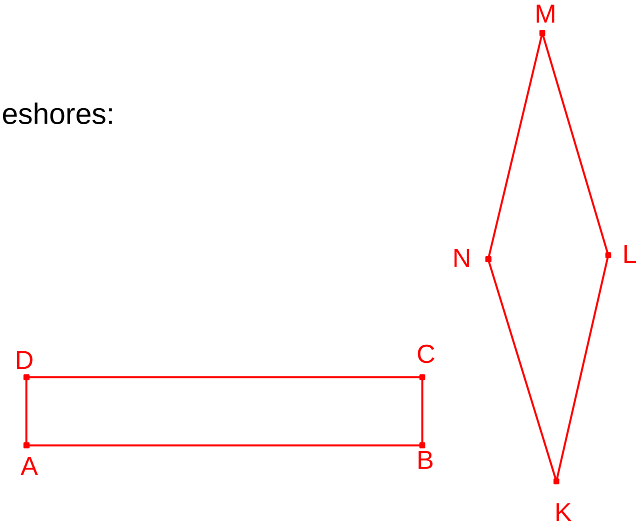
$$a^2 - 6ab + b^2 = 0 \qquad (4)$$

Dividint l'expressió (4) per b^2:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \qquad (5)$$

Resolent l'equació:

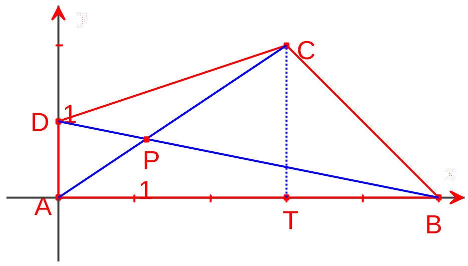
$$\frac{a}{b} = 3 + 2\sqrt{2}.$$



1853.- Siga el quadrilàter de vèrtexs $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(3,2)$, $D(0,1)$.

Proveu que les diagonals del quadrilàter formen 45º.

Solució 1:



Siga P la intersecció de les dues diagonals.
Siga T la projecció de C sobre $\overline{AB}$.
Siguen $\alpha = \angle ADB$, $\beta = \angle DAP$.
$\angle ACT = \angle DAP = \beta$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAB}$:
$tg\alpha = 5$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATC}$: $tg\beta = \frac{3}{2}$.

Aplicat les relacions de l'angle $\alpha + \beta$:

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{5 + \frac{3}{2}}{1 - 5 \cdot \frac{3}{2}} = -1.$$

Aleshores, $\alpha + \beta = 135°$. $\angle APD = 180° - (\alpha+\beta) = 180° - 135° = 45°$.

Solució 2:
Utilitzarem el producte escalar de dos vectors.
Siga α l'angle que formen les diagonals.

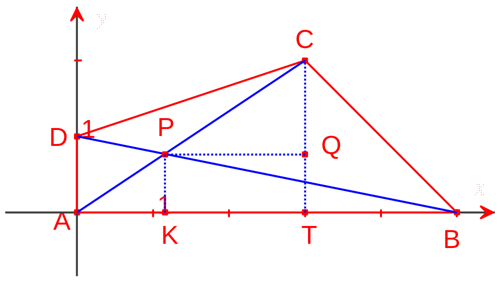
$\alpha = \angle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{DB} = (5,-1)$. $\overrightarrow{AC} = (3,2)$.

$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{DB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cdot \cos\alpha$.

$15 - 2 = \sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2} \cos\alpha$.

$13 = 13\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Aleshores, $\alpha = 45°$.

Solució 3:
Notem que $\angle ABC = 45°$.
Siga P la intersecció de les dues diagonals. Siga T la projecció de C sobre $\overline{AB}$.
Siga K la projecció de P sobre $\overline{AB}$. Siga Q la projecció de P sobre $\overline{AB}$.



Siga $\overline{AK} = x$.
$\overline{BC} = 2\sqrt{8}$, $\overline{AC} = \sqrt{13}$.

$\frac{\overline{PK}}{x} = \frac{2}{3}$, $\frac{\overline{PK}}{5-x} = \frac{1}{5}$. Resolent el sistema: $\overline{PK} = \frac{10}{13}$, $x = \frac{15}{13}$.

$\frac{\overline{PC}}{\overline{PQ}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$. Aleshores, $\overline{PC} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}$, $\frac{\overline{PC}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}$. Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ són semblants:
Aleshores, $\angle CPB = \angle ABC = 45°$.

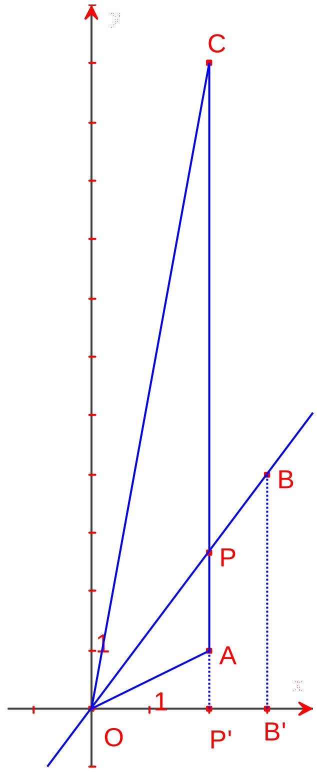
1854.- Siguen els punts $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(2,11)$.

Proveu que la recta OB és bisectriu de l'angle $\angle AOC$.

Solució:

Siga P la intersecció de les rectes OB i AC.

Siga P' La projecció de P sobre l'eix d'abscisses.



$\overline{OA}=\sqrt{5}$, $\overline{OC}=5\sqrt{5}$.

$\frac{\overline{PP'}}{2}=\frac{4}{3}$. Aleshores, $\overline{PP'}=\frac{8}{3}$.

$\overline{CP}=\overline{CP'}-\overline{PP'}=11-\frac{8}{3}=\frac{25}{3}$.

$\overline{AP}=\overline{PP'}-\overline{AP'}=\frac{8}{3}-1=\frac{5}{3}$.

Vegem que el punt P compleix la propietat de la bisectriu del triangle $\overset{\Delta}{OAC}$: $\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{OC}}$.

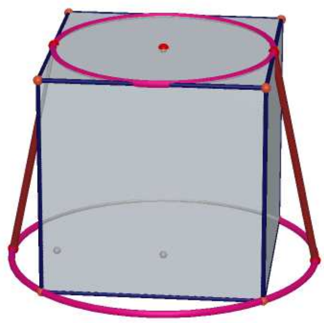
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}}=\frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{OC}}=\frac{\frac{25}{3}}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Aleshores, OB és bisectriu de l'angle $\angle AOC$.

1855.- La base inferior d’un con truncat està circumscrita a la cara d’un cub i la cara superior inscrita a la cara oposada del cub.

Determineu la proporció entre el volum del con truncat i el volum del cub.

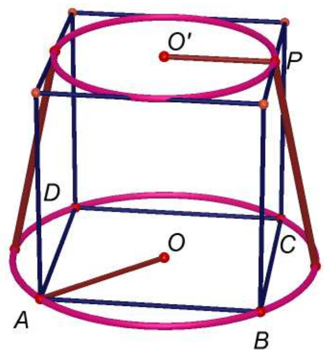


Solució:

Siga $\overline{OA} = R$ radi de la base inferior del con truncat.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOB}$ l’aresta del cub és:

$\overline{AB} = R\sqrt{2}$.



El radi de la base superior és:

$r = \overline{O'P} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

L’altura del con truncat és:

$h = \overline{OO'} = \overline{AB} = R\sqrt{2}$.

El volum del con truncat és:

$$V_{conT} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right).$$

$$V_{conT} = \frac{\pi R\sqrt{2}}{3}\left(R^2 + \frac{1}{2}R^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}R^2\right) = \frac{\pi R^3 \cdot \sqrt{2}}{6}\left(3 + \sqrt{2}\right).$$

El volum del cub és:

$$V_{cub} = \left(R\sqrt{2}\right)^3 = 2R^3\sqrt{2} .$$

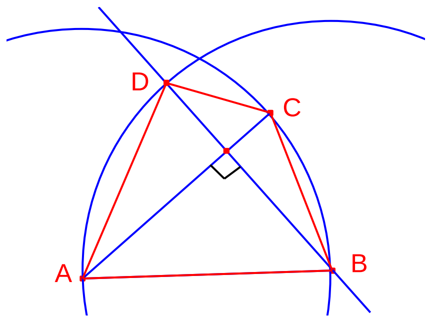
La proporció entre el volum del con truncat i el volum del cub és:

$$\frac{V_{conT}}{V_{cub}} = \frac{\frac{\pi R^3 \cdot \sqrt{2}}{6}\left(3 + \sqrt{2}\right)}{2R^3\sqrt{2}} = \frac{\pi\left(3 + \sqrt{2}\right)}{12} \approx 1.1556 .$$

1856.- Siga ABCD un quadrilàter tal que $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BD}$, tal que les diagonals són perpendiculars. Calculeu la suma dels angles $\angle ABC$ i $\angle ADB$.

Solució:

Siguen $\angle ABC=\alpha$ i $\angle ADB=\beta$.



El triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, $\overline{AB}=\overline{AC}$.

$\angle CAB=180º-2\alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles, $\overline{AB}=\overline{BD}$.

$\angle ABD=180º-2\beta$.

Els angles $\angle CAB$, $\angle ABD$ són complementaris, aleshores:

$180º-2\alpha+180º-2\beta=90º$.

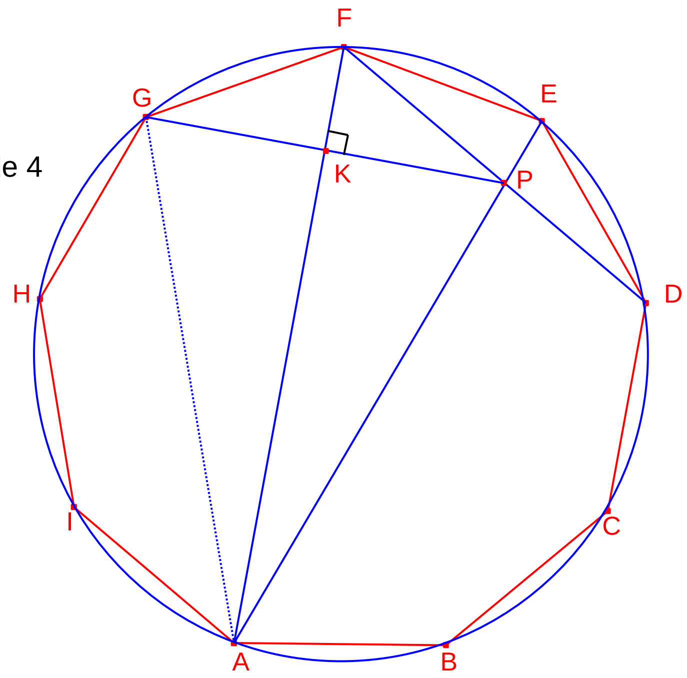
$2(\alpha+\beta)=270º$.

$\alpha+\beta=135º$.

1857.- Siga ABCDEFGHI un polígon regular de 9 costats.

Els segments $\overline{AE}$ i $\overline{DF}$ es tallen en P.
Demostreu que els segments $\overline{PG}$ i $\overline{AF}$ són perpendiculars.

Solució:
Per ser angles inscrit del polígon regular de 9 costats:
$\angle FAE = \angle GAF = \angle FDE = 20^o$.
$\angle FGA = 100^o$, $\angle FEA = 80^o$.
$\angle AFD = \angle GFA = 60^o$.
$\angle GFD = 120^o$.
Per ser P interior a polígon i abraçar una suma de 4 arcs:
$\angle APD = \angle FPE = 80^o$.



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PEF}$ és isòsceles,
$\overline{EF} = \overline{PF}$.

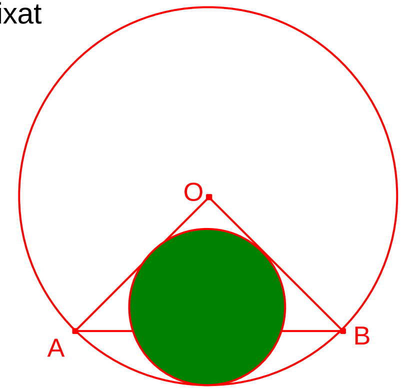
$\overline{GF} = \overline{EF} = \overline{PF}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{GPF}$ és isòsceles:

$$\angle FGP = \angle GPF = \frac{180^o - \angle GFD}{2} = 30^o.$$

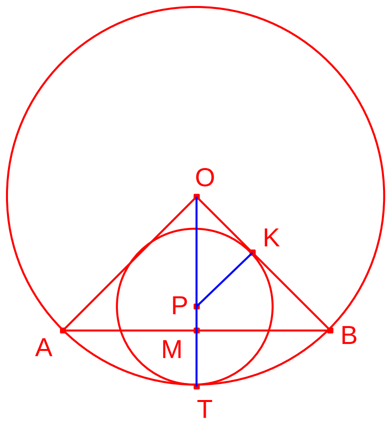
Siga K la intersecció de $\overline{PG}$ i $\overline{AF}$.
$\angle KFP = 60^o$, $\angle KPF = 30^o$.
Aleshores, $\overline{AF}$ i $\overline{PG}$ són perpendiculars.

1858.- En una circumferència de centre O i radi r s'ha dibuixat una corda $\overline{AB}$ menor que el diàmetre.

En el sector menor que determina la corda s'ha dibuixat una circumferència inscrita que té radi s.
Calculeu la mesura de la corda $\overline{AB}$ en funció de r, s.



Solució:
Siga P el centre de la circumferència inscrita en el sector.
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga K el punt de tangència de la circumferència i el radi $\overline{OB}$.
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.



$\overline{OB} = \overline{OT} = r$

$\overline{PT} = \overline{PK} = s$.

$\overline{OP} = r - s$

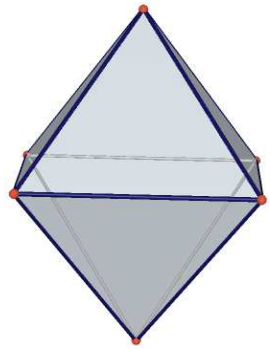
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PKO}$, $\overset{\Delta}{BMO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{s}{r-s} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2}}{r}$. Resolent l'equació:

$\overline{B} = \frac{2rs}{r-s}$.

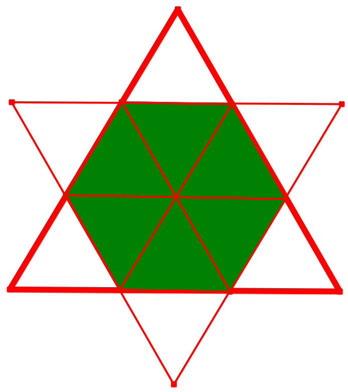
1859.- La cara d'un octaedre regular es projecta sobre la cara oposada.

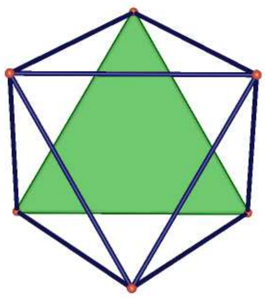
Quina part de la cara oposada està ocupada per la projecció?



Solució:
Un octaedre regular és un antiprisma de base triangular (triangles equilàtes).
Les cares oposades estan girades 60º respecte del centre de les cares.

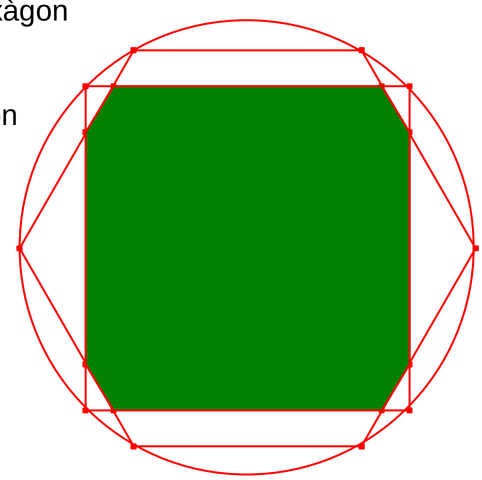
La part de la cara oposada ocupada (hexàgon regular) per la projecció és $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.





1860.- En una circumferència de radi 6 hi ha inscrit un hexàgon regular i un quadrat.

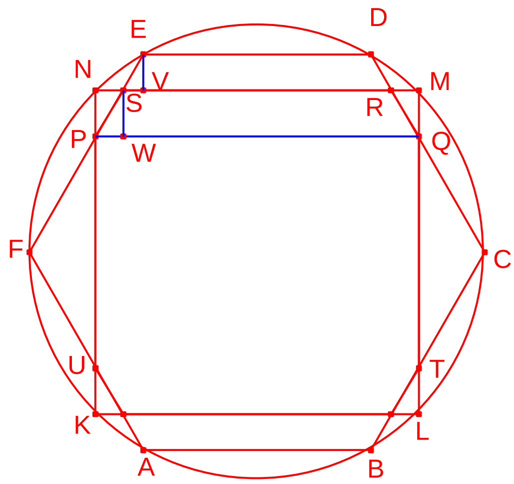
Un costat d'un quadrat és paral·lel a un costat de l'hexàgon regular.
Calculeu l'àrea intersecció de l'hexàgon regular i el quadrat.



Solució:

Siga ABCDEF l'hexàgon regular, $\overline{AB}=6$.

Siga KLMN el quadrat de costat $\overline{KL}=\overline{TU}=\overline{KN}=6\sqrt{2}$.



$\overline{AE}=6\sqrt{3}$.

$\overline{EV}=\dfrac{\overline{AE}-\overline{KN}}{2}=3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$.

$\dfrac{\overline{SV}}{\overline{EV}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, aleshores, $\overline{SV}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)=3-\sqrt{6}$.

$\overline{SR}=\overline{DE}+2\overline{SV}=6+2\left(3-\sqrt{6}\right)=12-2\sqrt{6}$.

$\overline{PW}=\dfrac{\overline{PQ}-\overline{SR}}{2}\dfrac{6\sqrt{2}-12+2\sqrt{6}}{2}=3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}$.

$\dfrac{\overline{SW}}{\overline{PW}}=\sqrt{3}$, aleshores,

$\overline{SW}=\sqrt{3}\left(3\sqrt{2}-6+\sqrt{6}\right)=3\sqrt{6}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

$\overline{PT}=\overline{KN}-2\overline{SW}=6\sqrt{2}-2\left(3\sqrt{6}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)=-6\sqrt{6}+12\sqrt{3}$.

L'àrea de la intersecció del quadrat i l'hexàgon regular és igual al doble de l'àrea del trapezi PQRS més l'àrea del rectangle TUQP:

$$S_{\text{ombrejada}}=2\frac{6\sqrt{2}+12-2\sqrt{6}}{2}\left(3\sqrt{6}-6\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)+6\sqrt{2}\left(-6\sqrt{6}+12\sqrt{3}\right)=72\sqrt{2}+72\sqrt{6}-120\sqrt{3}\approx 70.3405$$