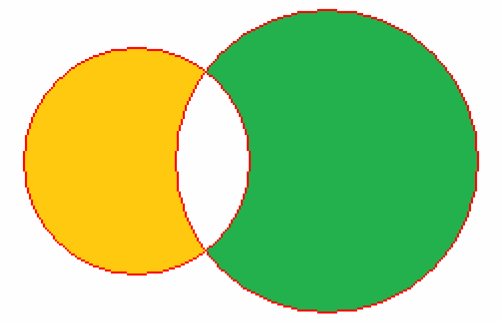
Problemes de Geometria per a l'ESO 187

1861.- En la figura dues circumferències de radis 3 i 4 Si la distància entre els seus centres és 5. Calculeu la diferencia entre les àrees de les dues zones ombrejades.



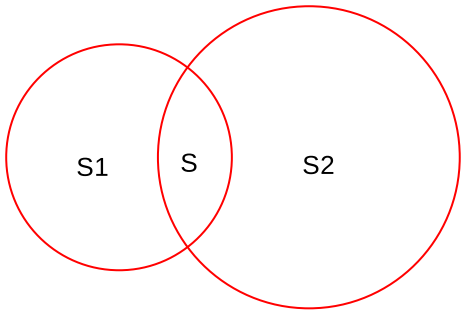
Solució:

Siguen S_2 l'àrea de la zona ombrejada gran.

Siga S_1 l'àrea de la zona ombrejada menuda.

Siga S l'àrea no ombrejada:

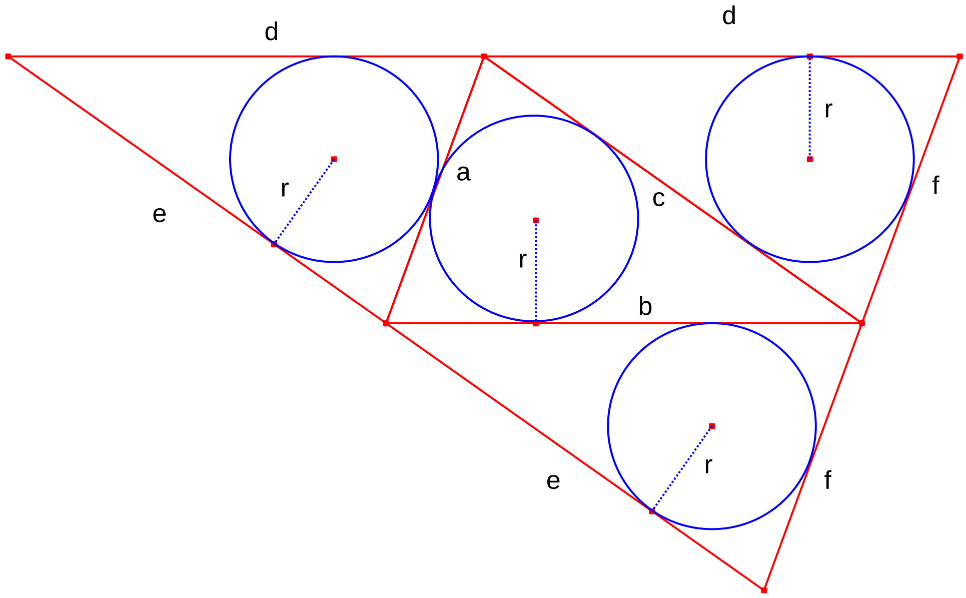
$S_2 - S_1 = (S_2 + S) - (S_1 + S) = \pi 4^2 - \pi 3^2 = 7\pi$.



1862.- Totes les cares d'un tetraedre tenen la mateixa àrea i el mateix radi de la circumferència circumscrita.

Proveu que totes les cares són iguals.

Solució:



Siga r el radi de la circumferència inscrita a les quatre cares del tetraedre.
Considerem el desenvolupament del tetraedre.
Siguen els costats dels triangles (a, b, c), (a, d, e), (b, e, f), (c, f, d), (veure figura).
Les àrees dels tres triangles són iguals:

$$S=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{a+d+e}{2}r=\frac{b+e+f}{2}r=\frac{c+d+f}{2}r.$$

$$\begin{cases} a+b+c=a+d+e \\ a+b+c=b+e+f \\ a+b+c=c+d+f \end{cases}.$$

Simplificant:

$$\begin{cases} b+c=d+e \\ a+c=e+f \\ a+b=d+f \end{cases}.$$

Sumant les tre equacions:

$a+b+c=d+e+f$.

$\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ b+c=d+e \end{cases}$, restant les dues equacions: $a=f$.

$\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ a+c=e+f \end{cases}$, restant les dues equacions: $b=d$.

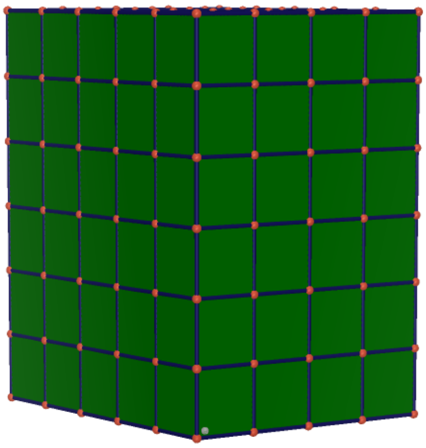
$\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ a+b=d+f \end{cases}$, restant les dues equacions: $c=e$.

Aleshores, el quatre cares del tetraedre són iguals.

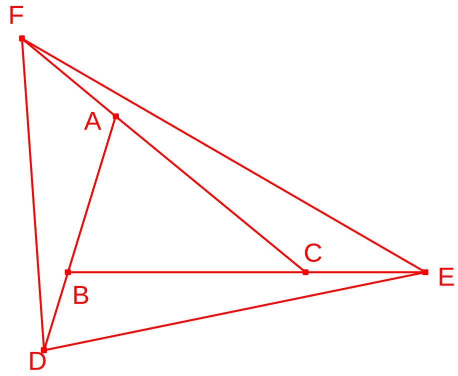
1863.- Un bloc de fusta té forma de prisma recte rectangular de dimensions $4\times5\times6$.

Pintem tot el sòlid amb pintura verda i després el tallem amb cubs d'aresta 1.
Determineu la raó entre el nombre de cubs que tenen exactament dues cares verdes i el nombre de cubs que tenen exactament 3 cares verdes.
Crux Mathematicoum C219.

Solució:
Els cubs que contenen exactament tres cares pintades de verd són els que ocupen els vèrtexs del prisma.
$C_3=8$.
Els cubs que contenen exactament dues cares de verd són els que contenen arestes del prisma i no són vèrtexs del prisma.
$C_2=4(2+3+4)=36$.
La raó entre el nombre de cubs que tenen exactament dues cares verdes i el nombre de cubs que tenen exactament 3 cares verdes és:
$\frac{C_2}{C_3}=\frac{36}{8}=\frac{9}{2}$.



1864.- Els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'han prolongat com mostra la figura de forma que $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{CE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ i $\overline{AF}=\frac{1}{2}\overline{CA}$.



Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$ i del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Crux Mathematicorum CC225.

Solució:

Siga m $S=S_{ABC}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$$S_{BDC}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S.$$

$$S_{ECD}=\frac{1}{2}S_{BDC}=\frac{1}{4}S.$$

$$S_{ECA}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S.$$

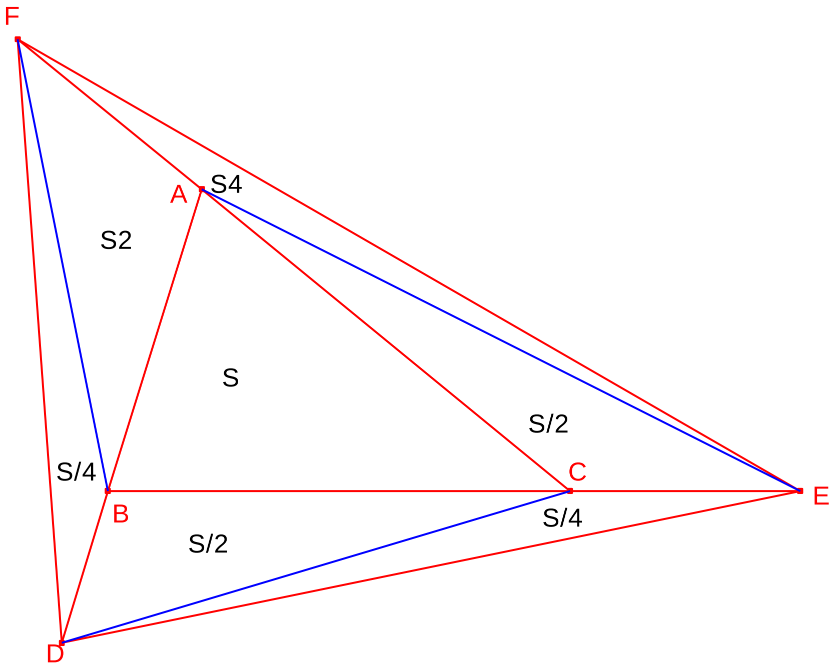
$$S_{EAF}=\frac{1}{2}S_{ECA}=\frac{1}{4}S.$$

$$S_{FAB}=\frac{1}{2}S_{ABC}=\frac{1}{2}S.$$

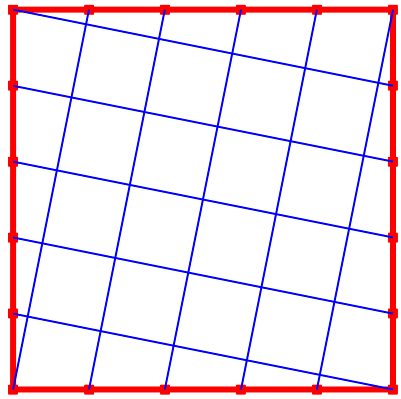
$$S_{FBD}=\frac{1}{2}S_{FAB}=\frac{1}{4}S.$$

$$S_{DEF}=S+3\left(\frac{1}{2}S+\frac{1}{4}S\right)=\frac{13}{4}S.$$

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}}=\frac{13}{4}.$$

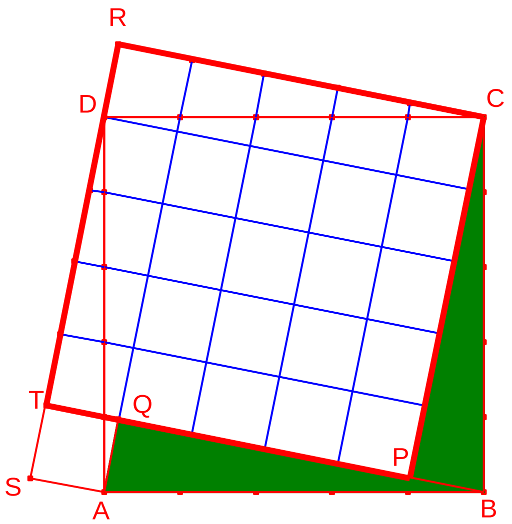


1865.- Cada costat d'un quadrat és divideix en n parts iguals. Els punts de costats oposats estan connectats d'una manera desplaçada com mostra la figura (en la figura es representa el cas $n=5$).



Demostreu que es possible obtenir n^2+1 quadrats iguals.
KöMaL, C1371.

Solució:



Siga el quadra inicial ABCD.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCP}$ el girem 270º amb centre C, donant lloc al triangle $\overset{\Delta}{DCR}$.

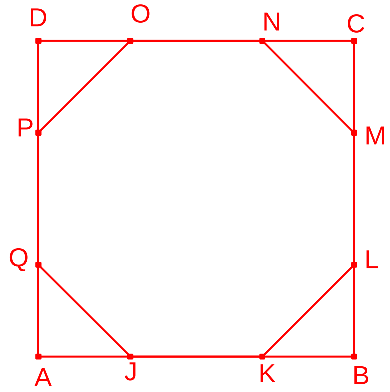
El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABQ}$ el girem 90º amb centre A, donant lloc al triangle $\overset{\Delta}{ADS}$.

L'àrea del quadrat ABCD és igual a l'àrea del quadrat PCRT més l'àrea del quadrat AQTS.

L'àrea del quadrat PCRT més l'àrea del quadrat AQTS és n^2+1.

1866.- Un octògon regular està format per tallar les cantonades d'un quadrat de manera adequada.

Què és més gran la disminució del percentatge del perímetre del quadrat o la disminució del percentatge de l'àrea.
KöMaL, C1372.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.
El perímetre del quadrat és $P_4=4$.
L'àrea del quadrat és $S_4=1$.
Siga JKLMNOPQ l'octògon regular inscrit en el quadrat ABCD.

Siga $\overline{AJ}=x$.
El costat de l'octògon és $\overline{JK}=\overline{JQ}=1-2x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJQ}$:
$x^2+x^2=(1-2x)^2$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

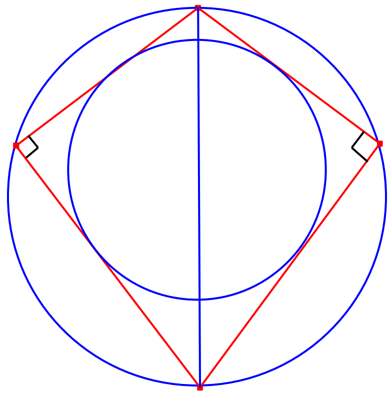
El perímetre de l'octògon regular és:
$P_8=8\left(\sqrt{2}-1\right)$.
La proporció entre la disminució del perímetre del quadrat i el quadrat és:

$$\frac{P_4-P_8}{P_4}=\frac{4-8\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}=3-2\sqrt{2}.$$

La disminució de l'àrea del quadrat és:
$S_4-S_8=2x^2=3-2\sqrt{2}$.
La proporció entre la disminució de l'àrea del quadrat i el quadrat és:

$$\frac{S_4-S_8}{S_4}=\frac{3-2\sqrt{2}}{1}=3-2\sqrt{2}.$$

Aleshores les dues proporcions són iguals.

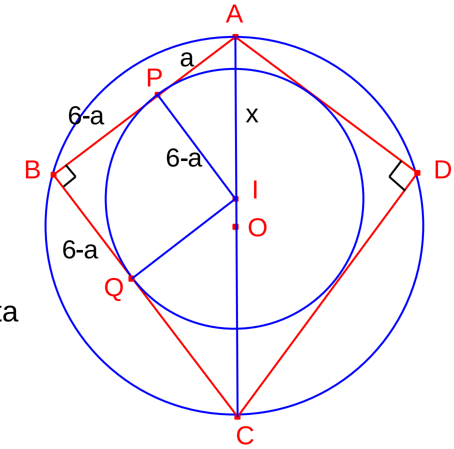


1867.- Els costats d'un cometat són 6 cm i 8cm i els costats diferents formen un angle recte.

Determineu la distancia entre els circumferència inscrita i circumscrita al cometa.
KöMaL, C1374

Solució:

Siga ABCD el cometa tal que $\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{CB}=\overline{CD}=8$, $B=D=90^{\circ}$.
Siga O el centre de la circumferència circumscrita al cometa.
Siga I el centre de la circumferència inscrita al cometa.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}=10cm$.

El centre de la circumferència circumscrita a un triangle rectangle és el punt mig de la hipotenusa.

$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=5$.

Siga P i Q els punts de tangència de la circumferència inscrita al cometa i els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$, respectivament.

Siga $\overline{AP}=a$, $\overline{AI}=x$.

$\overline{BP}=\overline{BQ}=6-a$.

IPBQ és un quadrat.

$\overline{QI}=6-a$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{API}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{a}{6-a}=\frac{6}{8}$. Resolent l'equació, $a=\frac{18}{7}$.

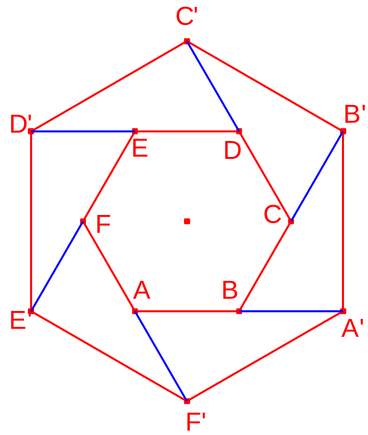
$\frac{a}{x}=\frac{6}{10}$, $\frac{\frac{18}{7}}{x}=\frac{6}{10}$. Resolent l'equació, $x=\frac{30}{7}$.

La distancia entre els circumferència inscrita i circumscrita al cometa és:

$\overline{AO}-\overline{AI}=5-x=5-\frac{30}{7}=\frac{5}{7}$.

1868.- Cada costat d'un hexàgon regular s'estén el doble de la seua longitud en la mateixa direcció que les agulles del rellotge. Els punts obtinguts estan connectats per formar un nou hexàgon.

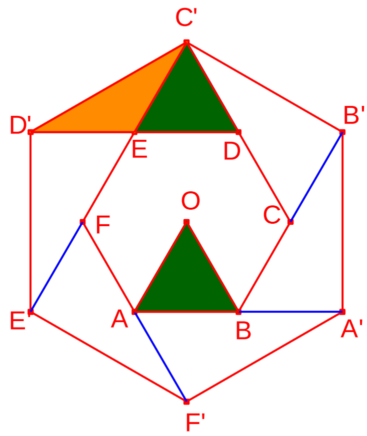
Quina és la proporció entre les àrees del nou hexàgon i l'àrea de l'hexàgon original.
KöMaL, K515.



Solució 1:
Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$.
Siga A'B'C'D'E'F' el nou hexàgon regular.
$\overline{AA'} = 2c$, $\overline{AF'} = c$, $\angle A'AF' = 180º - \angle FAB = 180º - 120º = 60º$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AF'A}$ és rectangle 30º, 60º, 90º.
Aleshores, $\overline{A'F'} = \sqrt{3}\,\overline{AF'} = c\sqrt{3}$.
Els dos hexàgons són semblants i la proporcionalitat de les àrees és igual al quadrat de la proporcionalitat dels costat:

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}} = \left(\frac{c\sqrt{3}}{c}\right)^2 = 3.$$



Solució 2:
Siga ABCDEF l'hexàgon regular inicial de centre O.
Siga A'B'C'D'E'F' el nou hexàgon regular.

Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura, tenen la mateixa àrea:

$S_{D'DC'} = S_{EDC'}$.

$S_{ABO} = S_{EDC'}$.

$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{ABO}$.

$S_{A'B'C'D'E'F'} = S_{ABCDEF} + 6 \cdot S_{D'EC'} + 6 \cdot S_{EDC'} = 18 \cdot S_{ABO}$.

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'F'}}{S_{ABCDEF}} = \frac{18 \cdot S_{ABO}}{6 \cdot S_{ABO}} = 3.$$

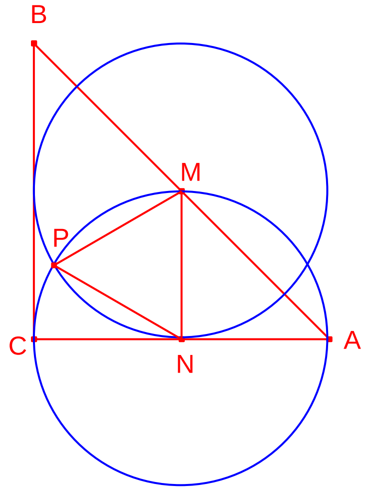
1869.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle rectangle i isòsceles, $C = 90º$.

Siguen M el punt mig del costat $\overline{AB}$ i N el punt mig del costat $\overline{AC}$.

Siga P el punt tal que $\overset{\Delta}{MNP}$ és un triangle equilàter en l'interior del quadrilàter MBCN.
Calculeu la mesura dels angles $\angle CAP$, $\angle CPA$.

Solució:

$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle aleshores, $\overset{\Delta}{MNA}$ és un triangle isòsceles,
$\overline{MN} = \overline{NA} = \overline{CN}$.
$\overline{PN} = \overline{MN}$.



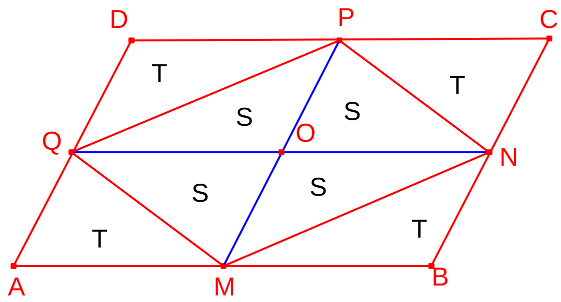
Aleshores, P pertany a la circumferència de centre N el diàmetre del quan és $\overline{AC}$.
Aleshores, $\angle CPA = 90º$.
$\angle PNM = 60º$.
$\angle CNP = 90º - \angle PNM = 90º - 60º = 30º$.
$\angle CPA$ és inscrit en la circumferència de centre N i diàmetre $\overline{AC}$ i abraça un arc $\angle CNP = 30º$.
Aleshores, $\angle CAP = \frac{1}{2}\angle CNP = \frac{1}{2}30º = 15º$.

1870.- Siga ABCD un quadrilàter convex.

Siguen M, N, P, Q els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, respectivament.
Si els segments $\overline{MP}$ i $\overline{NQ}$ divideixen ABCD en quatre quadrilàters de la mateixa àrea, demostreu que ABCD és un paral·lelogram.

Solució:

Siga O la intersecció dels segments $\overline{MP}$ i $\overline{NQ}$.
Pel teorema de Varignon el quadrilàter MNPQ és un paral·lelogram.
Les diagonals d'un paral·lelogram divideixen el paral·lelogram en quatre triangles de la mateixa àrea.
Siga $S = S_{OQM} = S_{ONM} = S_{ONP} = S_{OQP}$.
Per hipòtesi els quadrilàters AMOQ, MBNO, QOPD. ONCP tenen la mateixa àrea.



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{AMQ}$, $\overset{\Delta}{MBN}$, $\overset{\Delta}{CPN}$, $\overset{\Delta}{PDQ}$ tenen la mateixa àrea.
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa àrea tenen la mateixa altura.

Els triangles $\overset{\Delta}{MBN}$, $\overset{\Delta}{CPN}$ tenen la mateixa àrea i $\overline{BN} = \overline{CN}$.
Aleshores, P i M equidisten del segment $\overline{BC}$.
Aleshores, $\overline{PM}$ és paral·lel al segment $\overline{BC}$.
Anàlogament $\overline{PM}$ és paral·lel a $\overline{DA}$.
Aleshores $\overline{BC}$ és paral·lel a $\overline{DA}$.
Anàlogament $\overline{AB}$ és paral·lel a $\overline{CD}$.
Aleshores, ABCD és un paral·lelogram.