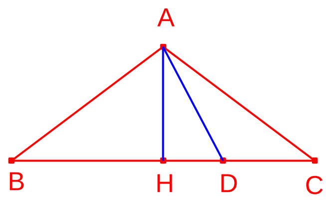
Problemes de Geometria per a l'ESO 188

1871.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Siga D un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD} = 56$, $\overline{DC} = 24$ i $\overline{AD} = 34$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Olimpíada d'Argentina. Nivell 2.

Solució.
$\overline{BC} = 80$.



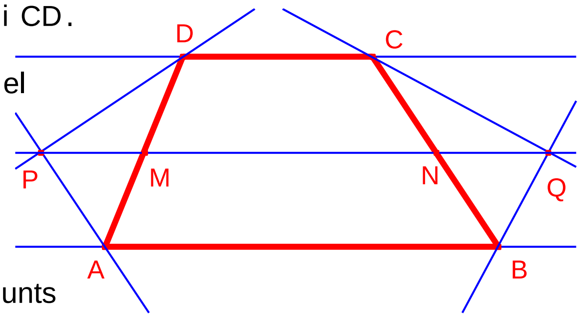
Siga H el punt mig del costat $\overline{BC}$. $\overline{AH}$ és l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{HD} = \overline{BD} - \overline{Bh} = 56 - 40 = 16$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:
$\overline{AH} = 30$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} = \frac{80 \cdot 30}{2} = 1200.$$

1872.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.

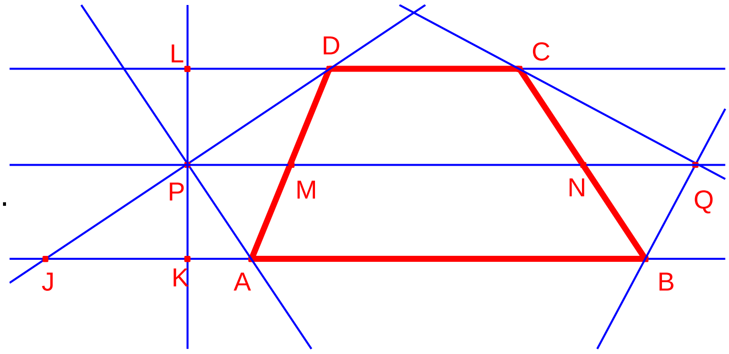


Les bisectrius externes dels vèrtexs D i A es tallen en el punt P.
Les bisectrius externes dels vèrtexs B i C es tallen en el punt Q.

a) Demostreu que el segment $\overline{PQ}$ és paral·lel a les bases del trapezi i tallen els costats $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ en els punts migs M i N.

b) Proveu que la mesura del segment $\overline{PQ}$ és igual al semiperímetre del trapezi.

Solució:
La recta perpendicular a les bases del trapezi que passa per P talla les rectes AB i CD en el punt K, L, respectivament.



Siga $\alpha = \angle DAB$, $\angle ADC = 180^{\circ} - \alpha$.

$\angle PAD = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2}$, $\angle PDA = \frac{\alpha}{2}$.

Aleshores, $\angle APD = 90^{\circ}$.

La bisectriu DP talla la recta AD en el punt J.

$\angle DJA = \angle PDL = \frac{\alpha}{2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{JAD}$ és isòsceles.

Aleshores, $\overline{AJ} = \overline{AD}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JPA}$, $\overset{\Delta}{DPA}$ són iguals.

$\overline{JP} = \overline{DP}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JKP}$, $\overset{\Delta}{DLP}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{PK} = \overline{DL}$.
Per tant P equidista de les bases.
Anàlogament Q equidista de les bases.
Aleshores, PQ és la paral·lela mitjana.
Aleshores, el segment $\overline{PQ}$ és paral·lel a les bases del trapezi i tallen els costats $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ en els punts migs M i N.

$\overline{MN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$.

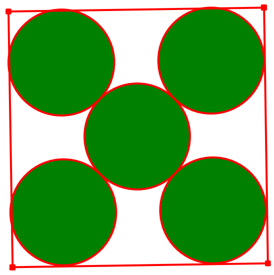
El triangle $\overset{\Delta}{JAD}$ és isòsceles. Aleshores, $\overline{PM} = \overline{DM} = \frac{\overline{AD}}{2}$.

Anàlogament, $\overline{QN} = \overline{CN} = \frac{\overline{BC}}{2}$.

$$\overline{PQ} = \overline{MN} + \overline{PM} + \overline{QN} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} + \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}}{2}.$$

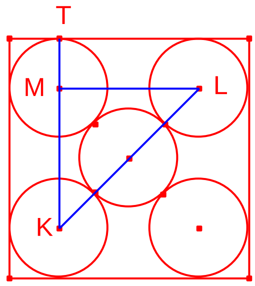
Aleshores, la mesura del segment $\overline{PQ}$ és igual al semiperímetre del trapezi ABCD.

1873.- En la figura, hi ha 5 circumferències de radis iguals.



La circumferència del centre és tangent a cadascuna de les altres quatre, i aquestes són tangents, cadascuna, a dos costats del quadrat.
Si el costat del quadrat mesura 40, calculeu el diàmetre de les circumferències.
Olimpíada d'Argentina. Nivell 3.

Solució:
Siga r el radi de les 5 circumferències.



$\overline{KL} = \overline{LM} = 40 - 2r$.

$\overline{KL} = 4r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KLM}$:

$(4r)^2 = 2(40-2r)^2$. Resolent l'equació:

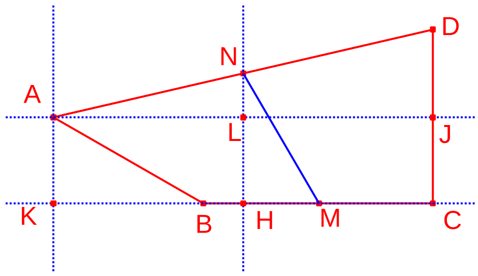
$r = 20\left(-1+\sqrt{2}\right)$.

El diàmetre de les circumferències és:

$2r = 40\left(-1+\sqrt{2}\right) \approx 16.57$.

1874.- En un quadrilàter ABCD, tenim que $B = 150^o$, $C = 90^o$ i els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ són iguals. Determineu l'angle que formen la recta BC i la recta que passa pels punts migs dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.

Solució:



Siguem M, N els punts migs del costats $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.

Siga H la projecció de N sobre $\overline{BC}$.

Siga K la projecció de A sobre $\overline{BC}$.

Siga L la projecció de A sobre $\overline{HN}$.

Siga J la projecció de A sobre $\overline{CD}$.

Siga $\overline{AB} = \overline{CD} = 2x$.

$\angle KBA = 30^o$.

$\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AB} = x$. $\overline{BK} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = \sqrt{3}x$.

$\overline{CJ} = \overline{AK} = x$.

$\overline{DJ} = x$.

$\overline{LN}$ és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{AJD}$, aleshores:

$\overline{LN} = \frac{1}{2}\overline{DJ} = \frac{1}{2}x$.

$\overline{NH} = \frac{3}{2}x$.

$\overline{HN}$ és la paral·lela mitjana del trapezi AKCD, aleshores:

$\overline{KH} = \overline{HC}$.

$\overline{HM} = \overline{HC} - \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{CK} - \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x + \overline{BC}\right) - \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Siga $\angle HMN = \alpha$ angle la recta BC i la recta MH.

$tg\alpha = \frac{\overline{NH}}{\overline{\overline{HM}}} = \sqrt{3}$, aleshores, $\alpha = 60^o$.

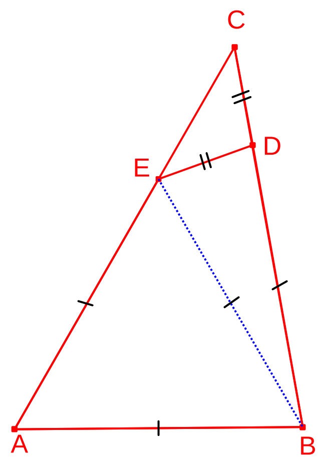
1875.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siguen D i E els punts sobre els costats $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, respectivament, tals que $\overline{AB}=\overline{BD}=\overline{AE}$.

Si $\angle BAE=60^o$ i $\overline{DE}=\overline{DC}$, determineu la mesura de l'angle $\angle EDC$.

Solució:

Siga $\alpha=\angle EDC$.

$\angle CED=\angle ECD=90^o-\frac{\alpha}{2}$. $\angle EDB=180^o-\alpha$.



$\angle DEA=90^o+\frac{\alpha}{2}$.

Si $\angle BAE=60^o$ i $\overline{AB}=\overline{AE}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és equilàter.

Aleshores, $\overline{BE}=\overline{AB}$.

$\angle DEB=\angle DEA-60^o=30^o+\frac{\alpha}{2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{EBD}$ és isòsceles:

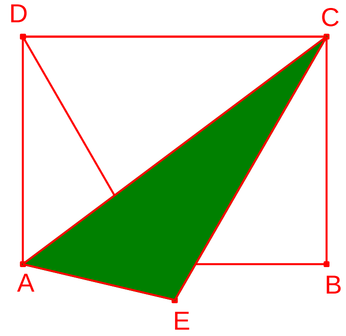
$\angle DEB=\angle EDB$, aleshores:

$30^o+\frac{\alpha}{2}=180^o-\alpha$. Resolent l'equació:

$\alpha=100^o$.

Els angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són: $A=60^o$, $C=\frac{180^o-100^o}{2}=40^o$, $B=80^o$.

1876.- Siga el rectangle ABCE de costats $\overline{AD}=6$ i $\overline{CD}=8$.



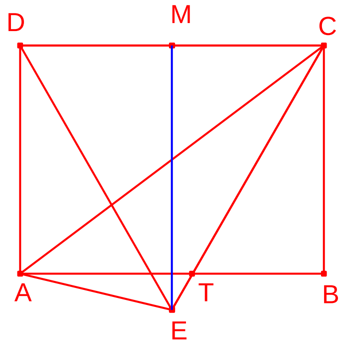
Construïm el triangle equilàter $\overset{\Delta}{CED}$ tal que E, A i B pertanyen al mateix semiplànol determinat per la recta CD.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$.

Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siga T la intersecció dels segments $\overline{AB}$, $\overline{CE}$.



$\overline{ME}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{CD}=4\sqrt{3}$.

$\angle CTB=60^{o}$.

$\overline{BT}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC}=2\sqrt{3}$.

$\overline{AT}=\overline{AB}-\overline{BT}=8-2\sqrt{3}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$ és:

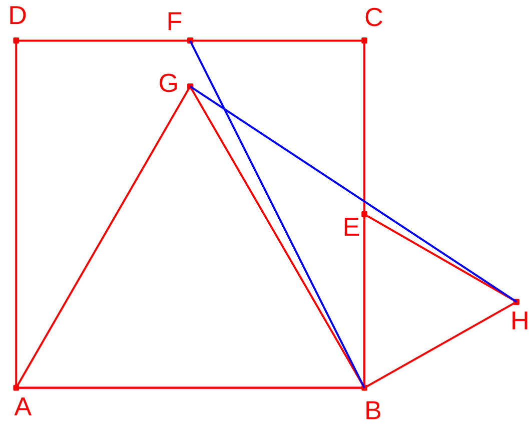
$$S_{AEC}=\frac{1}{2}\overline{AT}\cdot\overline{ME}=\frac{1}{2}\left(8-2\sqrt{3}\right)4\sqrt{3}=16\sqrt{3}-12.$$

1877.- Siga ABCD un quadrat.

Siga E el punt mig del costat $\overline{BC}$ i F el punt mig del costat $\overline{CD}$.

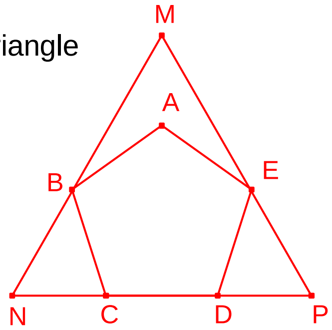
Construïm els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABG}$ i BEH tal que G està a l'interior del quadrat i H a l'exterior.
Determineu l'angle agut en tre les rectes BF i GH.

Solució:
Notem que $\angle GBH = 90^{\circ}$.
$\overline{BC} = \overline{BG}$, $\overline{CF} = \overline{BH}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{GBH}$ i $\overset{\Delta}{BCF}$ són iguals.
Els costats $\overline{BH}$ i $\overline{CF}$ formen 150º.
Aleshores, els costats $\overline{GH}$ i $\overline{BF}$ formen 150º o el suplementari 30º.

1878.- En la figura, ABCDE és un pentàgon regular inscrit en el triangle equilàter $\overset{\Delta}{MNP}$.



Calculeu la mesura de l'angle $\angle CMD$.

Solució:

$\angle CDE = \angle AED = 108^{o}$.

$\angle EDP = 72^{o}$.

$\angle DPE = 60^{o}$.

$\angle DEM = \angle EDP + \angle DPE = 132^{o}$.

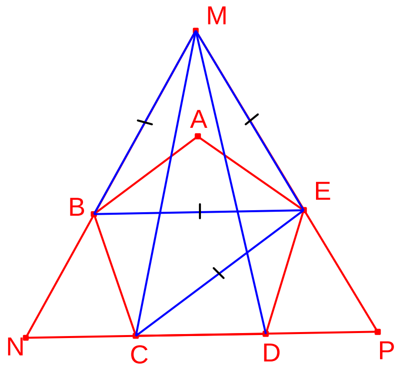
$\angle DEM = \angle DEM - \angle CED = 132^{o} - 36^{o} = 96^{o}$.

$\overset{\Delta}{BEM}$ és un triangle equilàter.

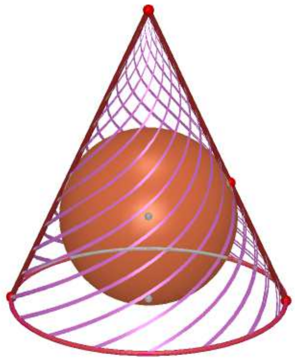
Aleshores, $\overline{BE} = \overline{ME} = \overline{CE}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CEM}$ és isòsceles.

$\angle CME = \angle MCE = \dfrac{180^{o} - \angle CEM}{2} = \dfrac{180^{o} - 96^{o}}{2} = 42^{o}$.

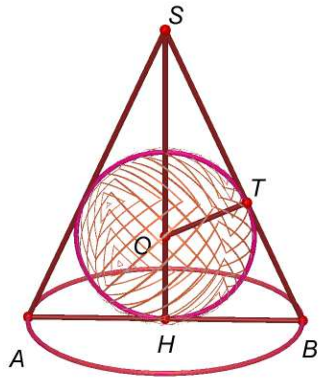


1879.- En un con recte l'angle que forma l'altura i la generatriu és α.
Calculeu la raó entre els volums de l'esfera inscrita i el con.



Solució:

Siga el con recte de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$ i altura $\overline{AH} = h$.
Siga $\alpha = \angle HSB$ angle que forma l'altura i la generatriu.
Siga l'esfera inscritya en el con de centre O i radi $\overline{OT} = \overline{OH} = r$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SHB}$:

$R = h \cdot \mathrm{tg}\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{STO}$:

$$\frac{r}{h-r} = \sin\alpha .$$

$$r = \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} h .$$

El volum de l'esfera és:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^3 h^3 .$$

El volum del con és:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi(h \cdot \mathrm{tg}\alpha)^2 h .$$

La proporció entre els dos volums és:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)^3 h^3}{\frac{1}{3}\pi(h \cdot \mathrm{tg}\alpha)^2 h} = \frac{4\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^3} .$$

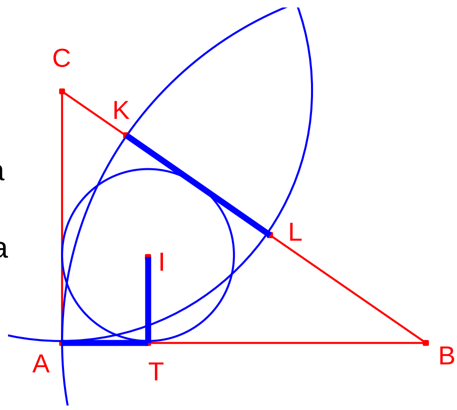
1880.- Siguen b i c els catets del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.

En un extrem de la circumferència dibuixen una circumferència de radi b i en l'altre extrem una circumferència de radi c.
Demostreu que la mesura del segment intersecció de les dues circumferències i la hipotenusa és igual diàmetre de la circumferència inscrita al triangle.

Solució:
Siga I l'incentre de la circumferència inscrita al triangle.

$r = \overline{IT} = \overline{AT} = \dfrac{b+c-a}{2}$.

Siga la intersecció de la circumferència de centre B i radi c i la hipotenusa.
Siga la intersecció de la circumferència de centre C i radi b i la hipotenusa.



$\overline{CL} + \overline{BK} = \overline{BC} + \overline{KL}$.

$b + c = a + \overline{KL}$.

$\overline{KL} = b + c - a = 2r$.