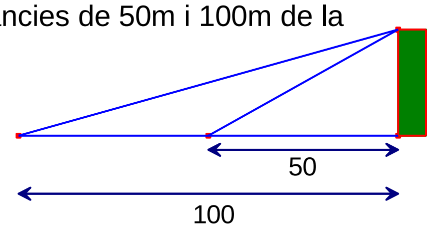
Problemes de Geometria per a l'ESO 189

1881.- Mesurem els angles d'elevació d'una torre a distàncies de 50m i 100m de la base de la torre i la suma de les dues mesures és 45º.
Determineu l'alçada de la torre.



Solució:

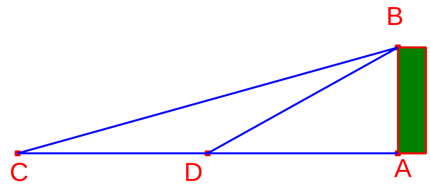
Siga $\overline{AB} = h$ altura de la torre.

Siguen $\overline{AC} = 100$, $\overline{AD} = 50$.

Siguen $\alpha = \angle BDA$, $\beta = \angle BCD$ els angles d'elevació:

$\alpha + \beta = 45^o$.

$\beta = 45^o - \alpha$.



Aplicant raons trigonomètriques als triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAB}$ i $\overset{\Delta}{CAB}$:

$$tg\alpha = \frac{h}{50}.$$

$$tg(45^o - \alpha) = \frac{h}{100}.$$

$$tg(45^o - \alpha) = \frac{tg45^o - tg\alpha}{1 + tg45^o \cdot tg\alpha} = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}.$$

$$\frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha} = \frac{h}{100}.$$

$$\frac{1 - \frac{h}{50}}{1 + \frac{h}{50}} = \frac{h}{100}.$$ Simplificant:

$$\frac{50 - h}{50 + h} = \frac{h}{100}.$$

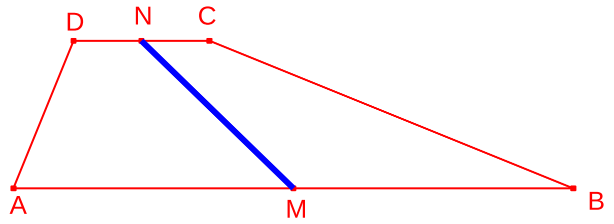
$h^2 + 150h - 5000 = 0$. Resolent l'equació:

$h = -75 + 25\sqrt{17} \approx 28.08m$.

1882.- Siga el trapezi ABCD tal que els angles A i B són complementaris.

Siguen M i N els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.

Proveu que el segment $\overline{MN}$ mesura la semidiferència de les bases paral·leles del trapezi.



Solució:

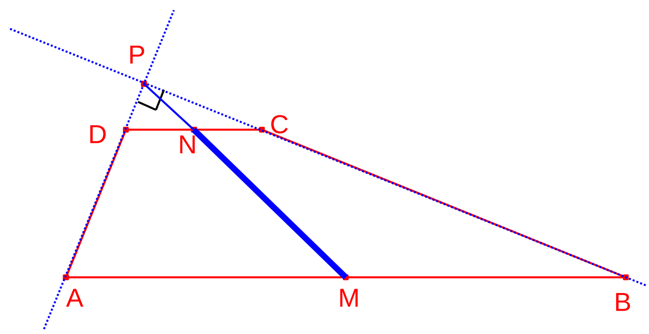
Siga P la intersecció de les rectes AD i BC.

Com que A i B són complementaris, $\angle APB = 90^{o}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABP}$ i $\overset{\Delta}{DCP}$ són paral·lels.

$\overline{PM}$ i $\overline{PN}$ són mitjanes dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$ i $\overset{\Delta}{DCP}$, respectivament.

Aleshores, $\overline{PM}$ i $\overline{PN}$ estan alineats.



Per ser $\overset{\Delta}{ABP}$ rectangle, la mitjana mesura la meitat de la hipotenusa:

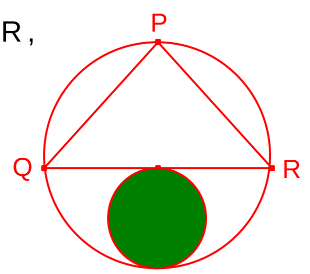
$$\overline{PM} = \frac{\overline{AB}}{2}.$$

Per ser $\overset{\Delta}{DCP}$ rectangle, la mitjana mesura la meitat de la hipotenusa:

$$\overline{PN} = \frac{\overline{CD}}{2}.$$

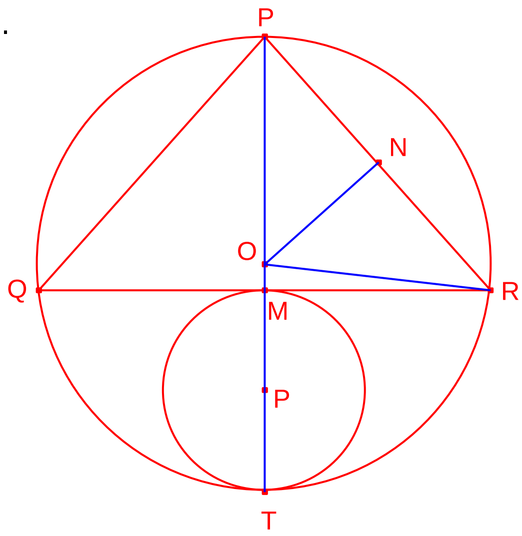
$$\overline{MN} = \overline{PM} - \overline{PN} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2}.$$

1883.- Una circumferència de radi 6 té inscrit el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overline{PQ} = \overline{PR} = 4\sqrt{5}$.



Una segona circumferència és tangent a la circumferència i al punt mig del costat $\overline{QR}$.
Determineu el radi de la circumferència menuda.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi $\overline{OP} = \overline{OR} = 6$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{QR}$
Siga P el centre de la circumferència menuda.
Siga $\overline{PM} = \overline{PT} = r$ el radi.
Siga N el punt mig del costat $\overline{PR}$.



$\overline{PM} = 12 - 2r$, $\overline{PN} = 2\sqrt{5}$.

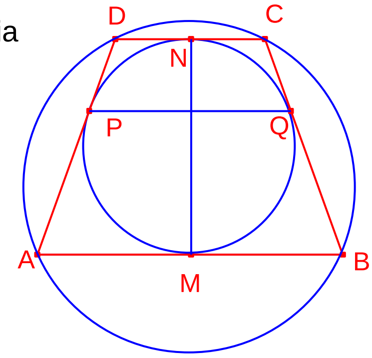
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PMR}$, $\overset{\Delta}{PNO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PN}}.$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{12-2r} = \frac{6}{2\sqrt{5}}.$$ Resolent l'equació:

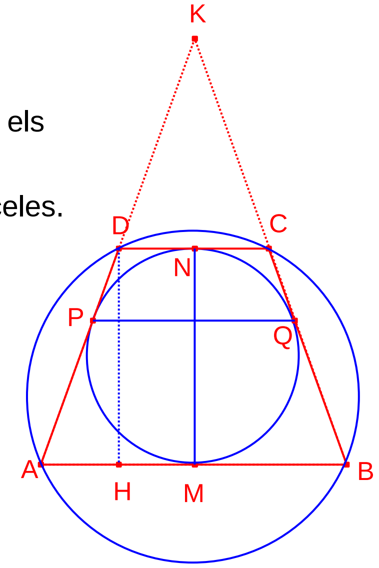
$$r = \frac{8}{3}.$$

1884.- Un trapezi inscrit en una circumferència té una circumferència inscrita.



Demostreu que un dels segments que uneix punts de tangència de costats oposats és la mitjana de les bases i l'altre segment és la mitjana harmònica.
KöMaL C1379.

Solució:
En el problema 189 resolíem que l'altura d'un trapezi que té circumferències inscrita i circumscrita és mitjana geomètrica de les bases paral·leles del trapezi.



Siga ABCD el trapezi de bases $a=\overline{AB}$, $b=\overline{CD}$.
Siguen M, N amb les base paral·leles del trapezi.
Siguen P, Q, els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats laterals Siga $h=\overline{DH}=\overline{MN}$ altura del trapezi.
Si un trapezi té una circumferència circumscrita el trapezi és isòsceles.
Si un trapezi té una circumferència inscrita, l'altura és igual a seu diàmetre de la circumferència inscrita.

$\overline{AM}=\overline{AP}=\overline{BM}=\overline{BQ}=\frac{a}{2}$. $\overline{CN}=\overline{CQ}=\overline{DP}=\overline{DN}=\frac{b}{2}$.

$\overline{AH}=\frac{a-b}{2}$. $\overline{AD}=\frac{a+b}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

Aleshores, $\overline{MN}$ és mitjana geomètrica de les bases paral·leles.
Siga K la intersecció dels costats no paral·lels del trapezi.
Siga $\overline{KD}=x$.

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{DCK}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

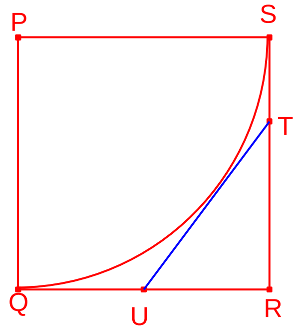
$$\frac{x}{b}=\frac{x+\frac{a+b}{2}}{a}$$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{b(a+b)}{2(a+b)}.$$

Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABK}$, $\overset{\Delta}{PQK}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PQ}}{x+\frac{b}{2}}=\frac{x+\frac{a+b}{2}}{a}$$. Resolent l'equació: $\overline{PQ}=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Aleshores, $\overline{PQ}$ és mitjana harmònica de les bases paral·leles.



1885.- En el dibuix, PQRS és un quadrat.

L'arc $\overset{\frown}{QS}$ és un quadrant de cercle.

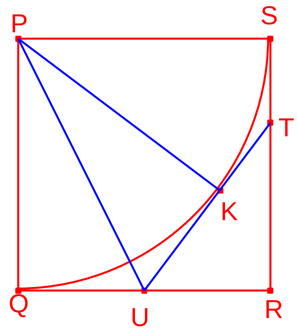
U és el punt mig del costat $\overline{QR}$.

T pertany al costat $\overline{RS}$ i el segment $\overline{UT}$ és tangent a l'arc $\overset{\frown}{QS}$.

Determineu la proporció de les longituds dels semgnets $\overline{TR}$ i $\overline{UR}$.

UKMT. Senior 2016.

Solució 1:



Siga K el punt de tangència de a l'arc $\overset{\frown}{QS}$ i el segment $\overline{UT}$.

$\overline{QU} = \overline{UK}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PQU}$, $\overset{\Delta}{PKU}$ són iguals.

Siga $\alpha = \angle QPU$.

Aleshores, $\angle TUR = 2\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{QU}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{UR}} = \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}.$$

Solució 2:

Siga K el punt de tangència de a l'arc $\overset{\frown}{QS}$ i el segment $\overline{UT}$.

Siga $\overline{PQ} = 2$, $\overline{QU} = \overline{UR} = 1$.

$\overline{QU}$ és tangent a l'arc $\overset{\frown}{QS}$.

$\overline{QU} = \overline{UK} = 1$.

$\overline{ST}$ és tangent a l'arc $\overset{\frown}{QS}$.

$\overline{ST} = \overline{KT}$.

Siga $\overline{TU} = x$, $\overline{ST} = \overline{KT} = 2 - x$.

$\overline{UT} = 1 + 2 - x = 3 - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{URT}$:

$(3-x)^2 = 1^2 + x^2$.

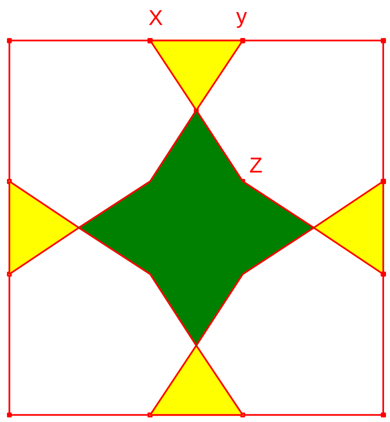
$9 - 6x = 1$.

Resolent l'equació:

$$x = \frac{4}{3}.$$

$$\frac{\overline{TU}}{\overline{UR}} = \frac{x}{1} = \frac{4}{3}.$$

1886.- Miquel estava caminant per Marràqueix quan va veure un sòl de rajoles format pel una rajola com és mostra:

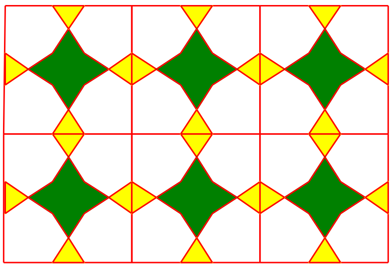


La rajola té quatre eixos de simetria i la longitud de cada costat és de 8 cm.

La longitud de $\overline{XY} = 2$ cm.

El punt Z és tal que XZ és una línia recta i YZ és paral·lela als costats del quadrat.

Calculeu l'àrea de l'octògon verd central.

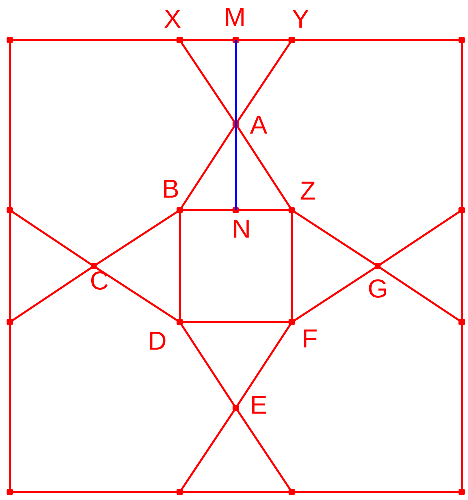


UKMT. Senior 2016.

Solució:

Siga ABCDEFGZ l'octògon.

BDFZ és un quadrat de costat 2.



Els triangles $\overset{\Delta}{XYA}$, $\overset{\Delta}{BZA}$ són iguals.

Siga M el punt mig de $\overline{XY}$.

Siga N el punt mig de $\overline{BZ}$.

$$\overline{MN} = \overline{YZ} = \frac{8-2}{2} = 3.$$

$$\overline{AN} = \frac{1}{2}\overline{MN} = \frac{3}{2}.$$

L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del quadrat més l'àrea de 4 triangles $\overset{\Delta}{BZA}$:

$$S_{ABCDEFGZ} = 2^2 + 4\left(\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{3}{2}\right)\right) = 10.$$

1887.- Les mesures d'un ortoedre són $10\times22\times2$ està inscrit en una esfera.

Determineu l'aresta del cub inscrit en la mateixa esfera.

UKMT. Senior 2016.

Solució:

La diagonal de l'ortoedre és igual al diàmetre de l'esfera:

$D=\sqrt{10^2+22^2+2^2}=14\sqrt{3}$.

El diàmetre de l'esfera és igual a la diagonal del cub.

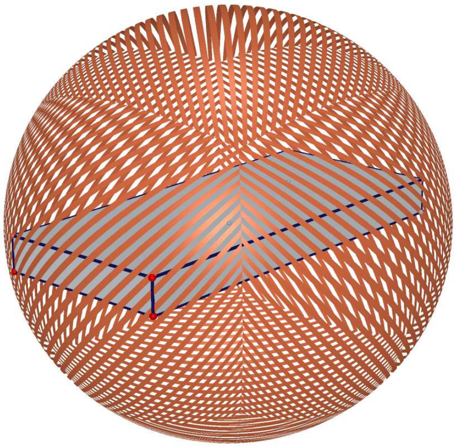
Siga a l'aresta del cub.

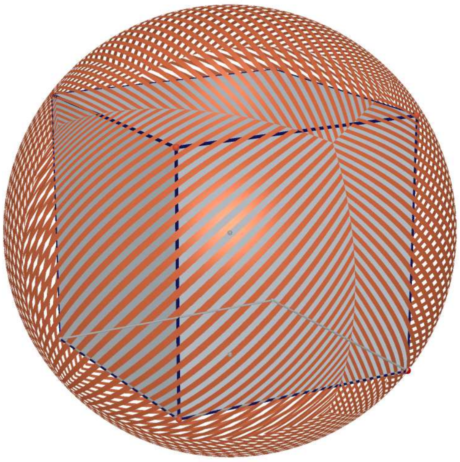
La diagonal del cub és:

$D=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

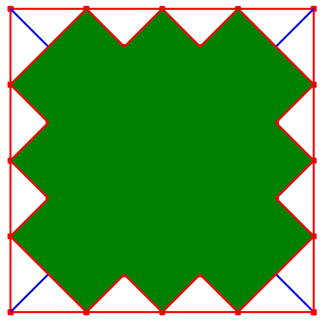
$D=a\sqrt{3}=14\sqrt{3}$.

$a=14$.





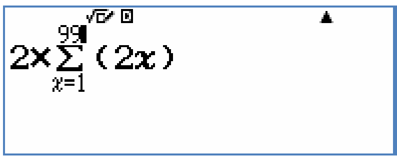
1888.- Els costats d'un quadrat és divideixen en n parts iguals (en la figura $n = 4$).

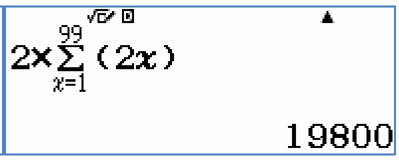


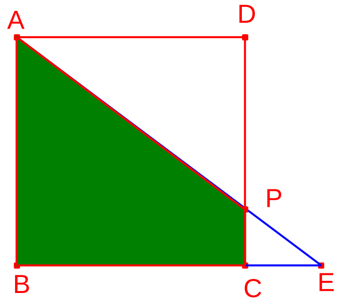
Els punts s'uneixen de la forma indicada, per formant diversos quadrats més menuts (24 en l'exemple de la figura) i alguns triangles.
Quants quadrats és formen si $n = 100$.
UKMT. Senior 2016.

Solució 1:
Suposem que el costat del quadrat de la figura és 1.
Cadascuna de les parts del costat del quadrat en que queda dividit mesura $\sqrt{2}$.
El costat del quadrat mesura:
$n\sqrt{2}$.
L'àrea del quadrat exterior és:
$S_q = \left(n\sqrt{2}\right)^2 = 2n^2$.
En la figura hi ha 4n triangles.
Dos triangles formen un quadrat de costat 1.
L'àrea de la figura ombrejada és:
$S_o = S_q - 2n = 2n^2 - 2n$.
Aleshores, en la figura ombrejada hi ha un total de $2n^2 - 2n$ quadrats.
Si $n = 100$, el total de quadrats és 19800.

Solució 2:
Notem que:
El total de la suma dels quadrat és: $2\sum_{x=1}^{n-1} 2x$.
Amb calculadora Classwiz:







1889.- En la figura ABCD és un quadrat i $\angle ABE = 90º$.

El segment $\overline{AE}$ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt P.

Si $\overline{BC} = 3$ i $\overline{BE} = 4$, calculeu l'àrea del quadrilàter ABCP.

UKMT. Senior 2016.

Solució:

Siga $\overline{CP} = x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$ i $\overset{\Delta}{PCE}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

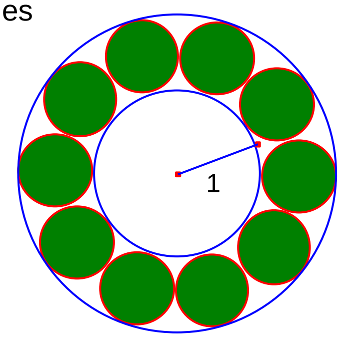
$$\frac{3}{4} = \frac{x}{1}.$$

El quadrilàter ABCP és un trapezi rectangle de bases paral·leles $\overline{AB} = 3$, $\overline{CP} = \frac{3}{4}$ i altura $\overline{BC} = 3$.

L'àrea del trapezi és:

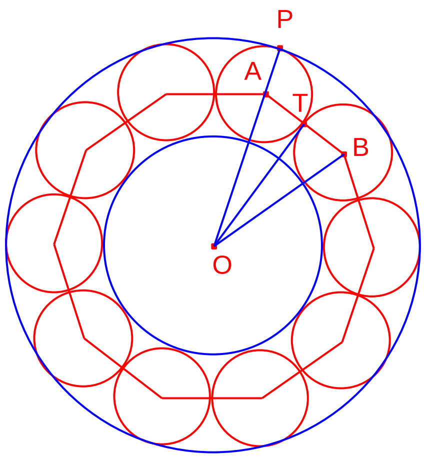
$$S_{ABCP} = \frac{3 + \frac{3}{4}}{2} 3 = \frac{45}{8}.$$

1890.- En la figura, 10 circumferències iguals són tangents a dues circumferències concèntriques. Cadascun dels 10 discs és tangents a dos veïns.



Si la circumferència concèntrica interior té radi 1, quin és el radi de la circumferència exterior.
UKMT. Senior 2016.

Solució:
Els centres de les 10 circumferències iguals són els vèrtexs d'un decàgon regular.
Siguen A i B els centres de dues circumferències i T el punt de tangència.
Siga $\overline{AT}=\overline{BT}=r$ el radi de les circumferències.
El radi de la circumferència exterior és:



$\overline{OP}=1+2r$.

$\angle AOB=\frac{360º}{10}=36º$.

$\angle AOT=\frac{36º}{2}=18º$.

$\overline{OA}=1+r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOT}$:

$\frac{r}{1+r}=\sin 180º$. Resolent l'equació:

$r=\frac{\sin 18º}{1-\sin 18º}$.

El radi de la circumferència exterior és:

$\overline{OP}=1+2r=1+\frac{2\sin 18º}{1-\sin 18º}=\frac{1+\sin 18º}{1-\sin 18º}$.