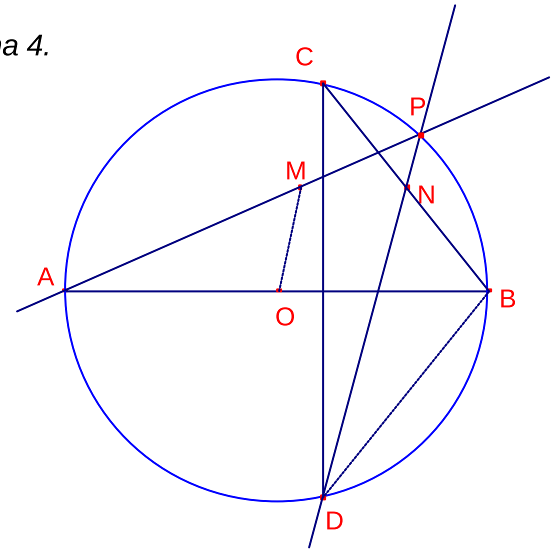
Problemes de Geometria per a l'ESO 19

181.- Siga la circumferència de centre O i diàmetre $\overline{AB}$.
Siga la corda $\overline{CD}$ perpendicular al diàmetre anterior. Siga M el punt mig de $\overline{OC}$ i N el punt mig de $\overline{BC}$. Siga P la intersecció de les rectes AM i DN.
Proveu que $\angle APD = \angle ABD$.
20ª Competició Cabri Argentina. Nivell menor. Problema 4.



Solució:
Siga $\alpha = \angle BOC$.
Vegem que P pertany a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$.

Vegem que els triangles $\overset{\Delta}{AOM}$, $\overset{\Delta}{DBN}$ són semblants:

$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{BN}}{\overline{BD}} = \frac{1}{2}$.

$\angle AOM = 180º - \alpha$.

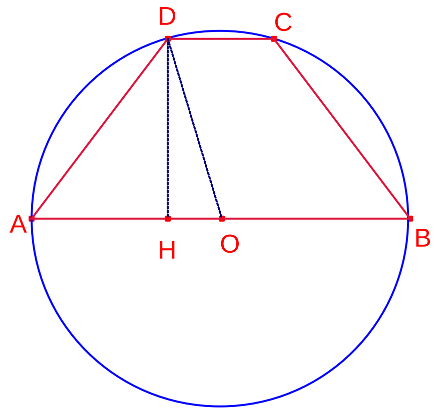
$\angle ABN = \frac{1}{2}(\angle AOC) = 90º - \frac{\alpha}{2}$. Aleshores,

$\angle DBN = 2\angle ABN = 180º - \alpha$.

Per tant, els triangles $\overset{\Delta}{AOM}$, $\overset{\Delta}{DBN}$ són semblants són semblants.
Aleshores, $\angle MAB = \angle NDB$. Aleshores els dos angles abracen el mateix arc per tant les rectes AM, DN s'intersecten en la circumferència.
Aleshores, P pertany a la circumferència, per tant, $\angle APD = \angle ABD$ ja que són inscrits en la circumferència i abracen el mateix arc AD.

182.- Siga el quadrilàter ABCD convex tal que $\overline{AD}=\overline{BC}=15$, $\overline{AB}=25$ i $\angle ADB=\angle ACB=90^o$. Calculeu la mesura del segment $\overline{CD}$.
20ª Competició Cabri Argentina. Nivell menor. Problema 1.

Solució:
Com que $\angle ADB=\angle ACB=90^o$ aleshores, C i D pertanyen a la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$. Siga O el punt mig (centre de la circumferència).
Com que el quadrilàter ABCD és convex C i D pertanyen al mateix semiplànol que determina la recta AB.



Com que $\overline{AD}=\overline{BC}$.
El quadrilàter és un trapezi isòsceles.
$\overline{OA}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{25}{2}$.

Siga H la projecció de D sobre el segment $\overline{AB}$
Siga $x=\overline{OH}$, $h=\overline{DH}$.
Notem que $\overline{CD}=2x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DHO}$:

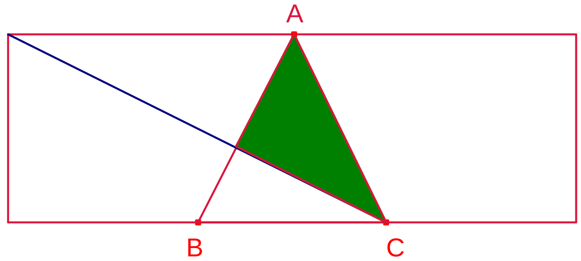
$$h^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2-x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DHO}$:

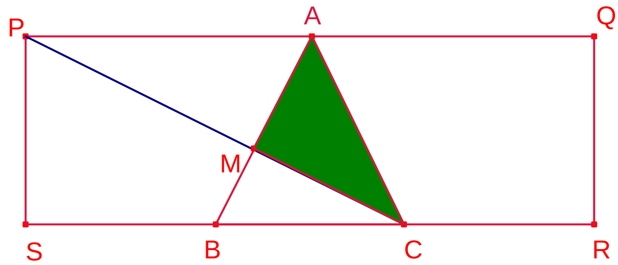
$$h^2=15^2-\left(\frac{25}{2}-x\right)^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):
$\left(\frac{25}{2}\right)^2-x^2=15^2-\left(\frac{25}{2}-x\right)^2$. Resolent l'equació:
$x=\frac{7}{2}$.
Aleshores, $\overline{CD}=2x=7$.

183.- En un rectangle de 30 per 10 centímetres es marca el punt mig B del costat superior i els punts A, C que divideixen en tres segments iguals el costat inferior. Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.
IES Miguel Hernández, Alacant, 2009.



Solució:
Siga el rectangle PQRS.



$\overline{PQ} = \overline{SR} = 30$, $\overline{PS} = \overline{QR} = 10$.

$\overline{PA} = 15$, $\overline{BC} = 10$.

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{PS}}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50.$$

Siga M la intersecció dels segments $\overline{PC}$, $\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{APM}$, $\overset{\Delta}{CBM}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{\overline{PA}}{\overline{CB}} = \frac{3}{2}$.

Aplicant el teorema de Tales al dos triangles $\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{3}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AMC}$ tenen la mateixa altura sobre el costat $\overline{AB}$, les àrees són proporcionals a les bases:

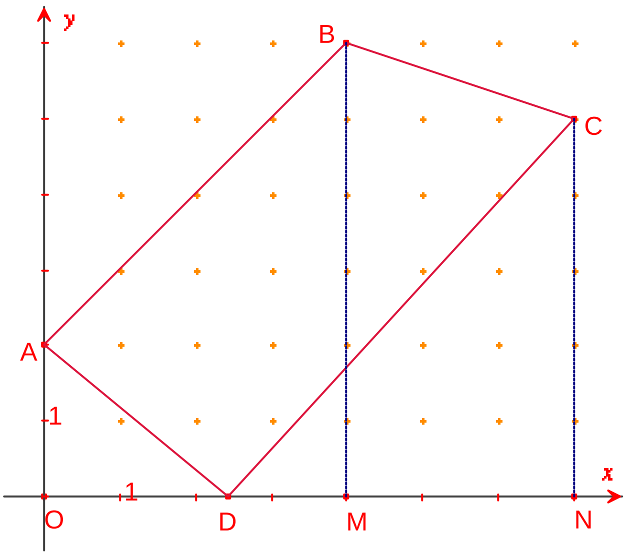
$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AM} + \overline{BM}}{\overline{AM}} = 1 + \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Aleshores, $S_{AMC} = \frac{3}{5} S_{ABC} = \frac{3}{5} \cdot 50 = 30\text{cm}^2$.

184.- Determineu el valor $d>0$ tal que l'àrea del quadrilàter de vèrtexs $A(0,2)$, $B(4,6)$, $C(7,5)$, $D(d,0)$ és 24.
Crux Mathematicorum M432.

Solució
Siga M la projecció de B sobre l'eix d'abscisses.
Siga N la projecció de C sobre l'eix d'abscisses.

Suposem que $0 \le d \le 7$.
L'àrea del quadrilàter ABCD és igual l'àrea dels trapezis AOMB i BMNC menys l'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{OAD}$ i $\overset{\Delta}{CDN}$.



$S_{AOMB} = \frac{6+2}{2}4 = 16$.

$S_{BMNC} = \frac{6+5}{2}3 = \frac{33}{2}$.

$S_{OAD} = \frac{2d}{2} = d$.

$S_{CDN} = \frac{5(7-d)}{2}$.

Per hipòtesi $S_{ABCD} = 24$.

$S_{ABCD} = S_{AOMB} + S_{BMNC} - S_{OAD} - S_{CDN}$.

$16 + \frac{33}{2} - d - \frac{5(7-d)}{2} = 24$.

Simplificant:
$3d = 18$.
Aleshores, $d = 6$.

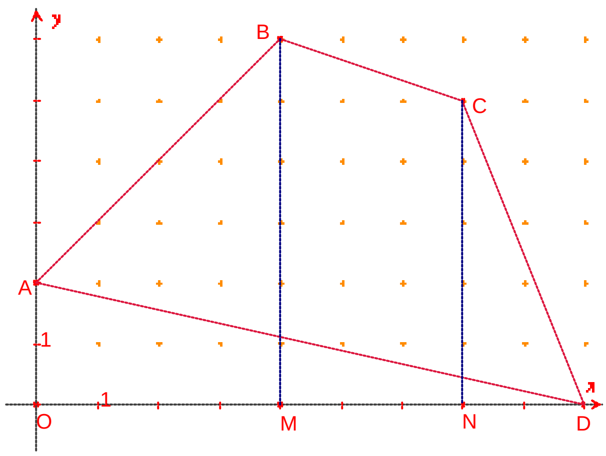
Suposem que $d > 7$.
L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a l'àrea dels trapezis AOMB i BMNC més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDN}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAD}$.

En aquest cas $S_{OAD} = \frac{2d}{2} = d$. $S_{CDN} = \frac{5(d-7)}{2}$.

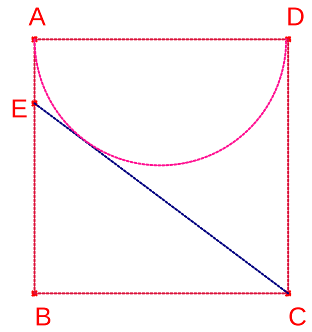
$S_{ABCD} = S_{AOMB} + S_{BMNC} + S_{CDN} - S_{OAD}$.

$16 + \frac{33}{2} + \frac{5(d-7)}{2} - d = 24$.

Aleshores $d = -2$ que és absurda ja que $d > 7$.



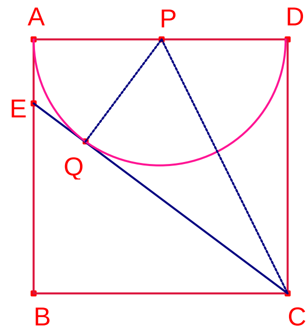
185.- ABCD és un quadrat de costat 1. Una semicircumferència de diàmetre $\overline{AD}$ està continguda en el quadrat.
Siga E un punt del costat $\overline{AB}$ tal que el segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència. Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CBE}$.



Solució 1:
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga Q el punt de tangència del segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència.
Siga $\alpha = \angle DCP$.

$\overline{PD} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CPD}$, $\overset{\Delta}{CPQ}$ són iguals.
El punt A és el punt de tangència del segment $\overline{BA}$ i la semicircumferència.
Aleshores, $\overline{AE} = \overline{EQ}$.
$\angle APQ = 2\alpha$. $\angle APE = \alpha$.
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{CPD}$, $\overset{\Delta}{PAE}$ són semblants i la raó de semblança és 2:1



Aleshores, $\overline{AE} = \frac{1}{4}$, Per tant, $\overline{BE} = \frac{3}{4}$.

Aleshores, $S_{CEB} = \frac{3}{8}$.

Solució 2:
Siga P el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga Q el punt de tangència del segment $\overline{CE}$ és tangent a la semicircumferència.
Siga $\alpha = \angle DCP$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CPD}$, $\overset{\Delta}{CPQ}$ són iguals.

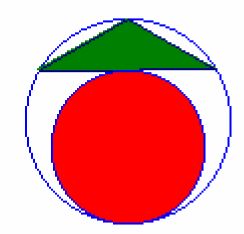
$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Aleshores, $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3}$.

$\angle BCE = 90^o - 2\alpha$.

$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \mathrm{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$. Aleshores, $\overline{BE} = \frac{3}{4}$.

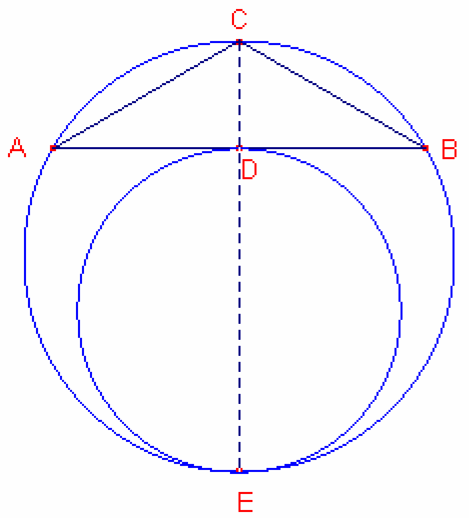
Aleshores, $S_{CEB} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BE}}{2} = \frac{3}{8}$.

186.- Una circumferència té un triangle isòsceles inscrit que els costats iguals mesuren 10cm i els angles iguals són de 30º.
La circumferència té una altra circumferència tangent interior i tangent al triangle en el punt mig del costat desigual.
Calculeu el radi de la circumferència tangent interior.



Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC}=\overline{BC}=10$, $A=B=30º$.
Siga D el punt mig del costat $\overline{AB}$.
$\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{AC}=5$.
Siga E el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga $2r=\overline{DE}$ diàmetre de la circumferència tangent interior.



Per ser A, B angles interiors, i ser $A=B=30º$, els arcs $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ abracen la sisena part de la circumferència aleshores, $\overline{AC}=\overline{BC}=10$ és el radi de la circumferència circumscrita al triangle.
$\overline{CE}=20$.
$\overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}=20-5=15$.
$2r=15$.
$r=\frac{15}{2}=7.5\text{cm}$.

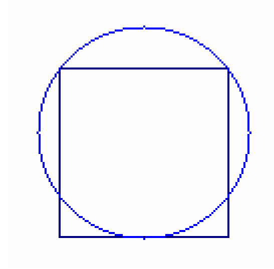
Generalització:
Una circumferència té un triangle isòsceles inscrit que els costats iguals mesuren b i els angles iguals són α.
La circumferència té una altra circumferència tangent interior i tangent al triangle en el punt mig del costat desigual.
Calculeu el radi de la circumferència tangent interior.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC}=\overline{BC}=b$, $A=B=\alpha$.
Siga D el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga E el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga $2r=\overline{DE}$ diàmetre de la circumferència tangent interior.
Aplicant la potència del punt D respecte de la circumferència tangent exterior:
$\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\overline{CD}\cdot\overline{DE}$ (1)

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$.
$\overline{AD}=\overline{BD}=b\cdot\cos\alpha$ (2)
$\overline{CD}=b\cdot\sin\alpha$ (3)
Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):
$b^2\cos^2\alpha=b\cdot\sin\alpha\cdot 2r$. Resolent l'equació en la incògnita r:
$r=\frac{b}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

187.- Un quadrat té els vèrtexs d'un costat estan en una circumferència de radi R i el costat oposat és tangent a la circumferència. Determineu el costat del costat.
Gusiev 179.

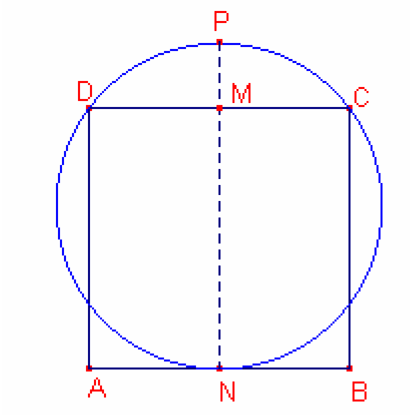


Solució 1:

Siga el quadrat ABCD tal que C, D pertanyen a la circumferència i el costat $\overline{AB} = c$ és tangent a la circumferència.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$

Notem que el punt N de tangència és el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant la potència de M respecte de la circumferència:

$\overline{CM} \cdot \overline{DM} = \overline{PM} \cdot \overline{NM}$.

$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = (2R - c)c$.

Resolent l'equació: $c = \frac{8}{5}R$.

Solució 2:

Siga O el centre de la circumferència

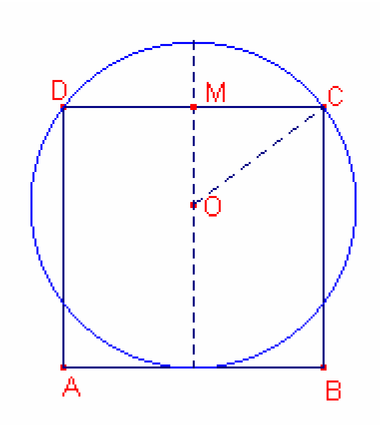
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$\overline{CM} = \frac{c}{2}$, $\overline{CO} = R$, $\overline{OM} = c - R$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCM}$:

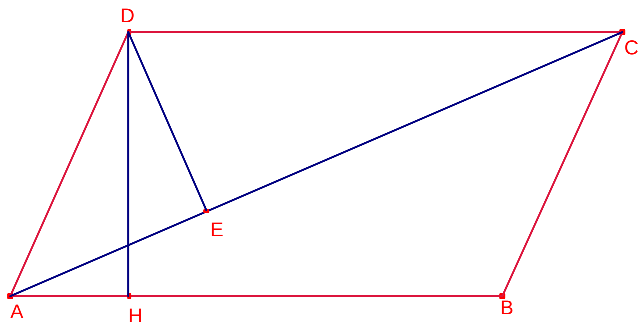
$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + (c - R)^2 = R^2$.

Resolent l'equació: $c = \frac{8}{5}R$.



188.- La perpendicular traçada per un vèrtex a la diagonal d'un paral·lelogram divideix la diagonal en dos segments de 6 i 15 cm Determineu els costats i les diagonals del paral·lelogram si la diferència entre dos costats és 7.
Gúsiev 63.

Solució:



Siga el paral·lelogram ABCD tal que $a=\overline{AB}$, $b=\overline{BC}$, $a-b=7$.
Siga el punt E de la diagonal $\overline{AC}$ tal que $\overline{DE}=h$ és perpendicular a la diagonal i $\overline{AE}=6$, $\overline{CE}=15$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$

$$b^2=h^2+6^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CED}$

$$(b+7)^2=h^2+15^2 \qquad (2)$$

Resolent el sistema format per les expressions (1) (2):
$\overline{DE}=8$, $b=10$.
Aleshores, $a=17$.

$$\overline{AC}=6+15=21$$

$$S_{ABCD}=2\cdot S_{ACB}=2\cdot\frac{21\cdot 8}{2}=168$$

Siga $\overline{DH}$ altura del paral·lelogram ABCD.

$S_{ABCD}=a\cdot\overline{DH}=168$.

$17\cdot\overline{DH}=168$.

$$\overline{DH}=\frac{168}{17}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$\overline{AH}=\sqrt{10^2-\left(\frac{168}{17}\right)^2}=\frac{26}{17}.$$

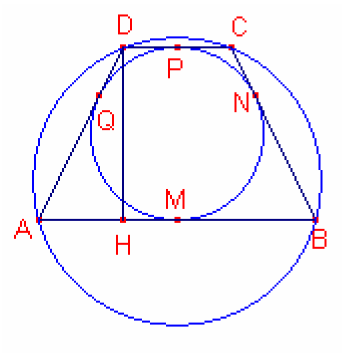
$$\overline{HB}=\overline{AB}-\overline{AH}=17-\frac{26}{17}=\frac{263}{17}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$\overline{BD}=\sqrt{\left(\frac{263}{17}\right)^2+\left(\frac{168}{17}\right)^2}=\sqrt{337}.$$

189.- Demostreu que si per a un trapezi existeix les circumferències circumscrita i inscrita, l'altura és mitjana geomètrica de les bases del trapezi.
Gúsiev 176.

Solució:



Siga ABCD el trapezi de bases $a=\overline{AB}$, $b=\overline{CD}$.

Siga $h=\overline{DH}$ altura del trapezi.

Si un trapezi té una circumferència circumscrita el trapezi és isòsceles.

Si un trapezi té una circumferència inscrita, l'altura és igual a seu diàmetre.

Siguen M, N, P, Q, els punts de tangència de la circumferència inscrita i el trapezi.

$$\overline{AM}=\overline{AQ}=\overline{BM}=\overline{BN}=\frac{a}{2}.$$

$$\overline{CN}=\overline{CP}=\overline{DP}=\overline{DQ}=\frac{b}{2}.$$

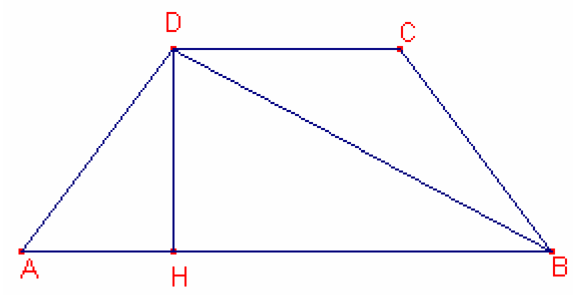
$$\overline{AH}=\frac{a-b}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$$h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab.$$

190.- Les bases d'un trapezi isòsceles són 21 i 9, l'altura és 8.
Calculeu el radi de la circumferència circumscrita al trapezi.
Gúsiev 177.

Solució:
Siga el trapezi ABCD de bases $\overline{AB}=21$, $\overline{CD}=9$ i altura $\overline{DH}=8$.



$\overline{AH}=\frac{\overline{AB}-\overline{CD}}{2}=\frac{21-9}{2}=6$, $\overline{BH}=21-6=15$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHD}$:

$\overline{AD}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BHD}$:

$\overline{BD}=\sqrt{15^2+8^2}=17$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és $S_{ABD}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{DH}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{AD}}{4R}$, on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, és a dir, la circumferència circumscrita al trapezi.

$\frac{21\cdot 8}{2}=\frac{21\cdot 10\cdot 17}{4R}$.

Resolent l'equació:

$R=\frac{85}{8}$.