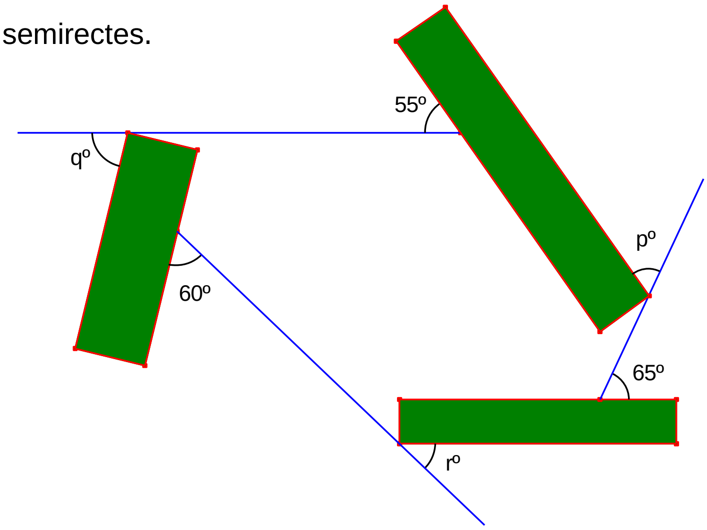
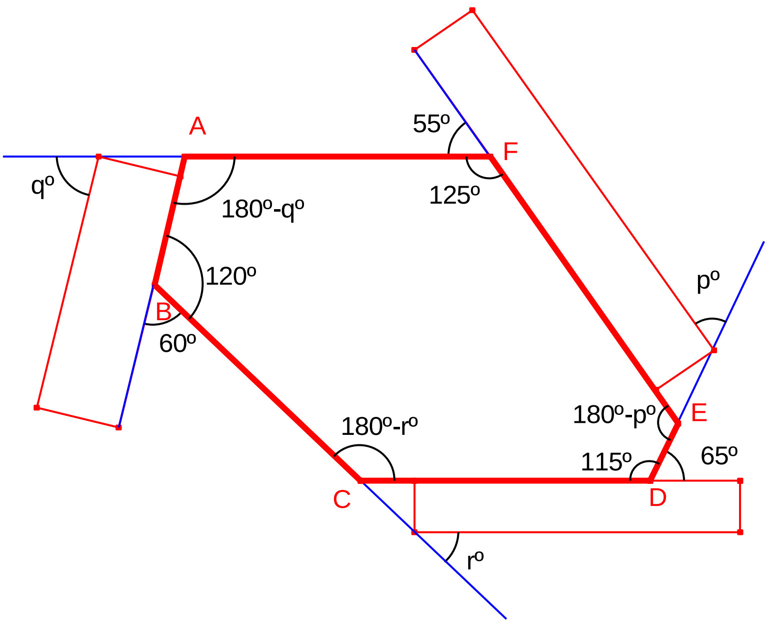
Problemes de Geometria per a l'ESO 190

1891.- En la figura hi ha 3 rectangles i tres semirectes.
Calculeu $p^o+q^o+r^o$.
UKMT. Senior 2016.



Solució:



Les tres semirectes i els rectangles formen l'hexàgon ABCDEF.
La suma dels angles de l'hexàgon convex és 720º.
Notem que:

$A = 180^o - p^o$, $B = 120^o$, $C = 180^o - r^o$, $D = 115^o$, $E = 180^o - p^o$, $F = 125^o$.

$A + B + C + D + E + F = 720^o$.

$180^o - r^o + 120^o + 180^o - r^o + 115^o + 180^o - p^o + 125^o = 720^o$.

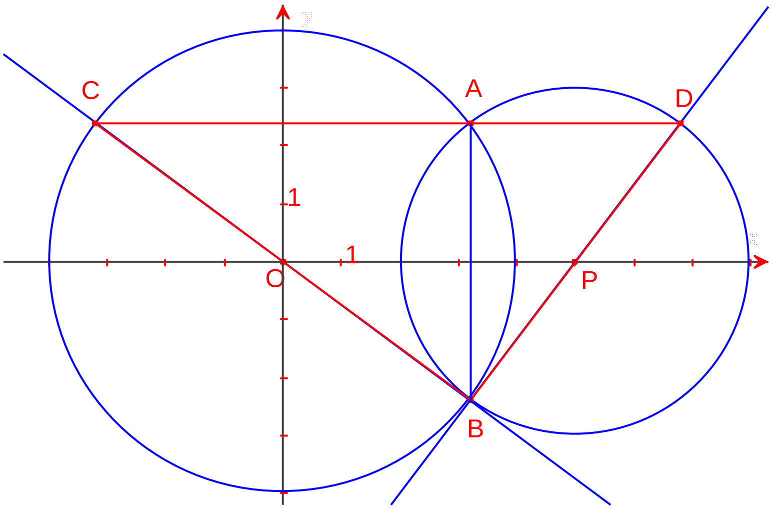
Resolent l'equació:

$p^o + q^o + r^o = 180^o$.

1892.- Els centres de dues circumferències de radis 4cm i 3cm, es tallen en els punts A i B, essent la distancia entre els centres 5cm.

Les dues circumferències es tallen en els punts A i B.
Pel punt B es tracen tangents a les dues circumferències que les tallen en els punts C i D, respectivament.
Calculeu l'àrea de la figura BDACB.

Solució:



Siguen O i P els centres de les circumferències de radis 4 i 3, respectivament.

$\overline{OP} = 5$, $\overline{OB} = 4$, $\overline{PB} = 3$.

Aplicant el teorema invers del teorema de Pitàgores, $\angle OBP = 90^o$.

Per ser angles inscrits i abraçar un diàmetre:

$\angle BAD = 90^o$, $\angle BAC = 90^o$.

Aleshores, els punts C, A, B estan alineats.

Aleshores, la figura que volem calcular l'àrea és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$.

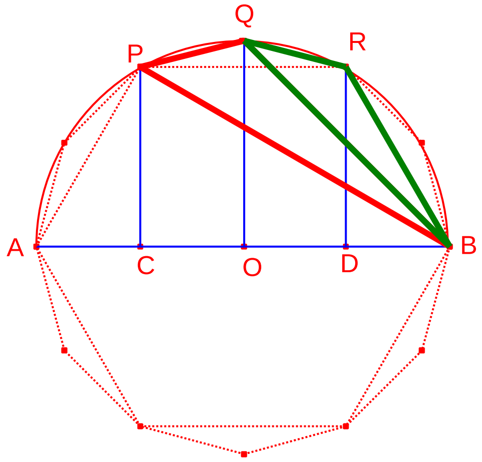
L'àrea del triangle és:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} 8 \cdot 6 = 24cm^2.$$

1893.- Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$.

Siga C el punt més proper a A que divideix el segment $\overline{AB}$ en proporció 1:4.
Siga D el punt més proper a B que divideix el segment $\overline{AB}$ en proporció 1:4.
Pels punts C, O i D tracem perpendiculars al segment $\overline{AB}$ que tallen la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ en els punts P, Q, R, respectivament.

Determineu els angles dels triangles $\overset{\Delta}{PQB}$ i $\overset{\Delta}{QRB}$.
KöMaL, B1383.



Solució:
Siga $\overline{AB}=4$,
$\overline{AC}=\overline{CO}=\overline{OD}=\overline{DB}=1$.
$\overline{CP}=\overline{DR}$.
$\overline{PR}=\overline{CD}=2$.
Aleshores, $\overline{PR}$ és el costat d'un hexàgon regular inscrit el la circumferència de centro O i diàmetre $\overline{AB}$.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OR}=2$.

Q és el punt mig de l'arc $\overset{\frown}{PR}$.
$\overline{PQ}=\overline{QR}$ són costats d'un dodecàgon regular inscrit el la circumferència de centro O i diàmetre $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODR}$:
$\overline{RD}=\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDR}$:
$\overline{BR}=2$.
Aleshores, $\overline{BR}=2$ és el costat d'un hexàgon regular inscrit el la circumferència de centro O i diàmetre $\overline{AB}$.

Calculem els angles del triangle $\overset{\Delta}{PQB}$:

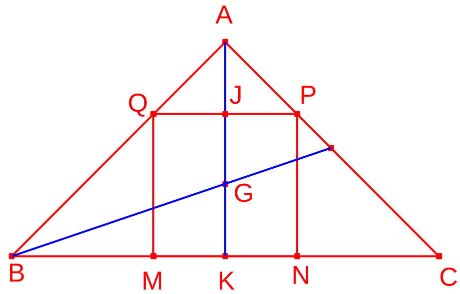
$$P=\frac{1}{2}\angle QOB=\frac{1}{2}90^{o}=45^{o},\ B=\frac{1}{2}\angle POQ=\frac{1}{2}30^{o}=15^{o},\ Q=120^{o}.$$

Calculem els angles del triangle $\overset{\Delta}{QRB}$:

$$Q=\frac{1}{2}\angle ROB=\frac{1}{2}60^{o}=35^{o},\ B=\frac{1}{2}\angle QOR=\frac{1}{2}30^{o}=15^{o},\ R=135^{o}.$$

1894.- En el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ amb $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ siguen M i N en $\overline{BC}$, amb M entre B i N, P en $\overline{AC}$ i Q en $\overline{AB}$ tal que MNPQ és un quadrat.

Sabem que les mitjanes del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ passen pel centre del quadrat.
Calculeu la mesura del costat $\overline{BC}$.



Solució:
Siga K el punt mig del costat $\overline{BC}$.
K és el punt mig del costat $\overline{MN}$.
Siga J el punt mig del costat $\overline{PQ}$. J pertany a la mitjana $\overline{AK}$.
Siga G el centre del quadrat i baricentre del triangle.
G pertany a la mitjana $\overline{AK}$.
Siga $\overline{MN} = \overline{JK} = 2x$ costat del quadrat.
Aplicant la propietat de la mitjana $\overline{AG} = 2x$.
Aleshores, $\overline{AJ} = x$.
$\overline{QJ} = x = \overline{AJ}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{QJA}$ és rectangle i isòsceles.

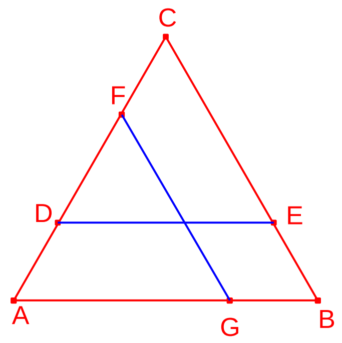
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BKA}$ és rectangle i isòsceles.

Per tant, el triangle és rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = \overline{AB} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

1895.- El triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat 1 s'ha dividir en dues parts d'àrees iguals mitjançant un segment $\overline{DE}$ paral·lel a $\overline{AB}$, amb D en $\overline{AC}$ i E en $\overline{BC}$, i també s'ha dividit en dues parts d'àrees iguals mitjançant un segment $\overline{GF}$ paral·lel a $\overline{BC}$, amb G en $\overline{AB}$ i F en $\overline{AC}$. Calculeu la mesura del segment $\overline{DF}$.

Solució:



Siga $\overline{AB} = x = \overline{FG} = \overline{DE}$.

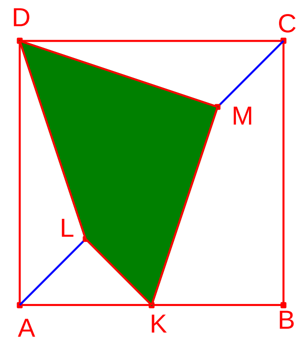
Aleshores, $\overline{AD} = \overline{BG} = \overline{CF} = 1 - x$.

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{AGF}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants. Les àrees són proporcionals al quadrats dels costats:

$$\frac{1}{2} = \frac{S_{AGF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{1}\right)^2 .$$

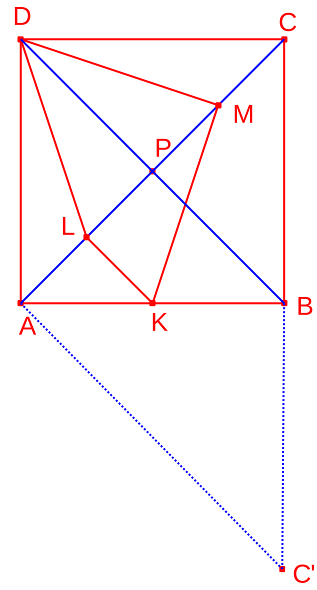
Resolent l'equació: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{DF} = 1 - 2\overline{AD} = 2x - 1 = \sqrt{2} - 1$.



1896.- Siga ABCD un quadrat de diagonals $\overline{AC} = \overline{BD} = 68$.

Els punts L i M en la diagonal $\overline{AC}$ són tals que $\overline{AL} = \overline{MC} = 17$, i K és el punt mig de $\overline{AB}$. Calculeu la proporció entre les àrees del quadrilàter KLDM i el quadrat ABCD.



Solució:

Siga P el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.

$\overline{LM} = 34$.

$\overline{AL} : \overline{AC} = 1 : 4$.

Aplicant el teorema invers de Tales:

$\overline{KL}$ és paral·lel a $\overline{BP}$ i $\overline{LK} = \frac{1}{2}\overline{BP} = \frac{1}{2}34 = 17$.

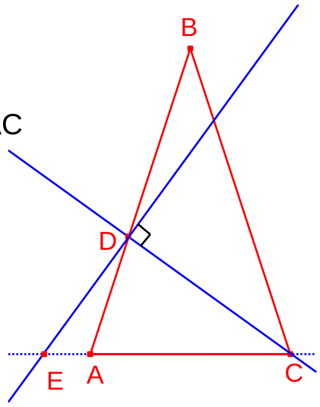
$$S_{KLDM} = S_{LMD} + S_{LMK} = \frac{1}{2}\overline{LM} \cdot \overline{DP} + \frac{1}{2}\overline{LM} \cdot \overline{LK} = \frac{1}{2}34 \cdot 34 + \frac{1}{2}34 \cdot 17 = 867.$$

Siga C' el simètric de C respecte de B.

$$S_{ABCD} = S_{CAC'} = \frac{1}{2}68^2 = 2312.$$

$$\frac{S_{KLDM}}{S_{aBCD}} = \frac{867}{2312} = \frac{3}{8}.$$

1897.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$.



Siga CD la bisectriu de l'angle C tal que D pertany al costat $\overline{AB}$.
Pel punt D tracem la perpendicular a la bisectriu CD que talla la recta AC en el punt E.

a) Si M és el punt mig del segment $\overline{EC}$ proveu que $\overline{DM}$ és paral·lel al costat $\overline{BC}$.

b) Proveu que $\overline{EC} = 2 \cdot \overline{AD}$.

c) En quin triangle E coincideix en el punt A?. En quin triangle E és interior al costat $\overline{AC}$.

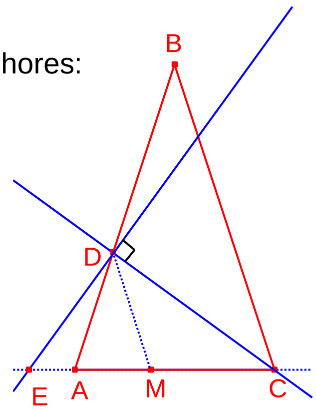
Solució:

a)

Siga $A = C = 2\alpha$.

La mitjana d'un triangle rectangle sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa.

$\overline{DM}$ és mitjana del triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDE}$ sobre la hipotenusa $\overline{EC}$, aleshores:



$\overline{DM} = \overline{CM} = \overline{EM}$.

El triangle $\overset{\Delta}{DMC}$ és isòsceles.

$\angle MDC = \angle DCM = \alpha$.

$\angle DMA = 2\alpha$.

$\angle ACB = 2\alpha$.

Aleshores, DM és paral·lel a $\overline{BC}$.

b)

$\angle DMA = 2\alpha$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{AMD}$ és isòsceles.

$\overline{AD} = \overline{DM} = \overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{EC}$.

Aleshores, $\overline{EC} = 2 \cdot \overline{AD}$.

c)

$\angle DEA = 90^{o} - \alpha$.

Suposem els punts $A = E$.

Aleshores, $90^{o} - \alpha = 2\alpha$. Resolent l'equació:

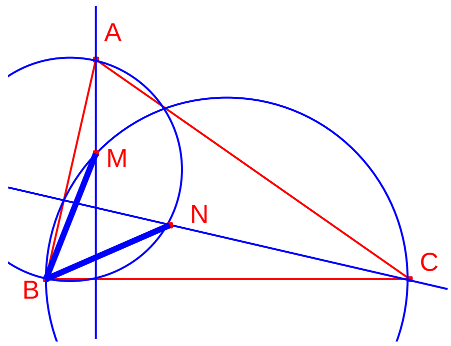
$\alpha = 30^{o}$. Aleshores, $A = B = C = 60^{o}$.

Suposem que E pertany a l'interior del segment $\overline{AC}$.

$90^{o} - \alpha > 2\alpha$. Resolent la inequació:

$\alpha < 30^{o}$. Aleshores, $A = C < 60^{o}$, $B > 60^{o}$.

1898.- Siga M la intersecció de l'altura del triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$ referida al vèrtex A i la circumferència de diàmetre $\overline{BC}$. Siga N la intersecció de l'altura referida al vèrtex C i la circumferència de diàmetre $\overline{AB}$.



Proveu que $\overline{BM}=\overline{BN}$.

KöMaL, C1381

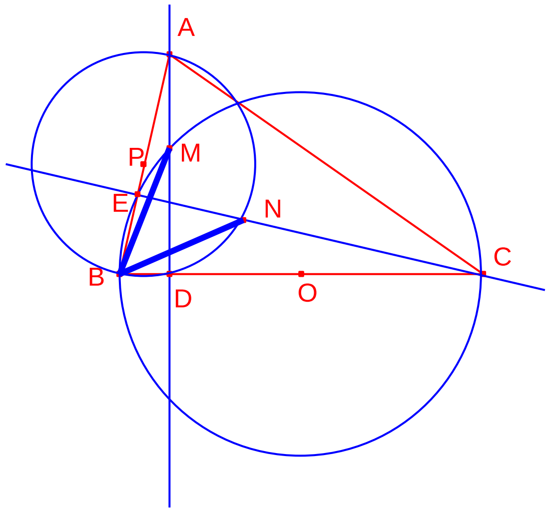
Solució:

Siga D la projecció de A sobre $\overline{BC}$. Siga E la projecció de C sobre $\overline{AB}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADB}$, $\overset{\Delta}{CEB}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}=\frac{c}{a}$. Aleshores, $a\cdot\overline{BD}=c\cdot\overline{BE}$.



Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:

$\overline{BM}^2=\overline{BD}\cdot a$.

Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNA}$:

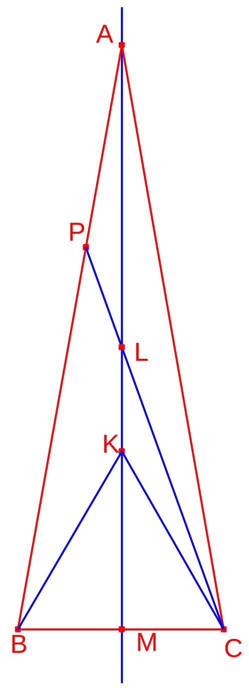
$\overline{BN}^2=\overline{BE}\cdot c$.

Aleshores, $\overline{BM}=\overline{BN}$.

1899.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ amb $B = C = 80^o$.

Considerem el punt P en el costat $\overline{AB}$ tal que $\angle BPC = 30^o$.

Demostreu que $\overline{AP} = \overline{BC}$.



Solució:

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

$\angle BAC = 20^o$, $\angle MAC = \angle BMA = 10^o$.

$\angle BCP = 70^o$, $\angle PCA = 10^o$.

Siga L la intersecció de $\overline{CP}$ i $\overline{AM}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ALC}$ és isòsceles, $\overline{CL} = \overline{AL}$.

$\angle MLC = \angle PLA = 20^o$.

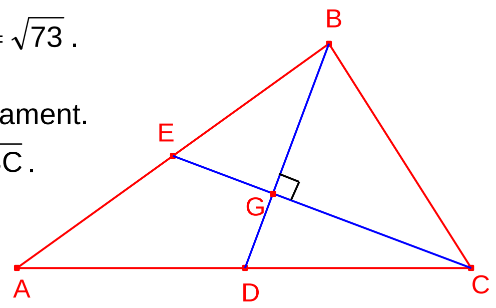
Siga K tal que $\angle KBC = \angle BCK = 60^o$.

K pertany a l'altura $\overline{AM}$.

$\angle KCL = 10^o$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{LKC}$, $\overset{\Delta}{LPA}$.

Aleshores, $\overline{AP} = \overline{CK} = \overline{BC}$.



1900.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, sabem que $\overline{AB} = 2\sqrt{13}$ i $\overline{AC} = \sqrt{73}$.

Siguen E i D els punts migs dels costat $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ respectivament.
Si $\overline{BD}$ és perpendicular a $\overline{CE}$, determineu la longitud de $\overline{BC}$.
Crux Mathematicorum CC228.

Solució:
La mesura de les mitjanes és:

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 31}}{2}.$$

$$\overline{CE} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 94}}{2}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BD} = \frac{\sqrt{2a^2 + 31}}{3}, \quad \overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CE} = \frac{\sqrt{2a^2 + 94}}{3}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BGC}$:

$$\left(\frac{\sqrt{2a^2 + 31}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2a^2 + 94}}{3}\right)^2 = a^2.$$ Simplificant:

$5a^2 = 125$. Resolent l'equació:

$a = 5$.