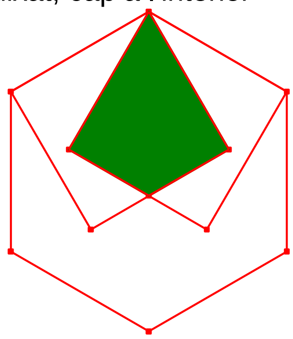
Problemes de Geometria per a l'ESO 192

1911.- En dos costats consecutius d'un hexàgon regular s'ha dibuixat, cap a l'interior de l'hexàgon, dos quadrats.

Determineu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos quadrats i l'àrea de l'hexàgon regular.



Solució:

Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat 1.

$\overline{DG} = \overline{AB} = 1$

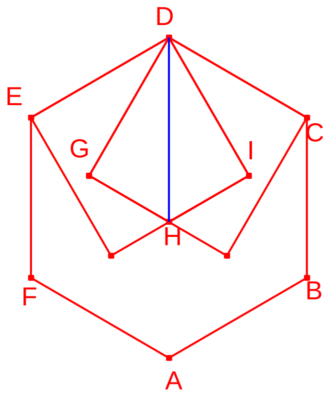
Siga DGHI la intersecció dels dos quadrats.

$\angle EDG = \angle EDC - \angle GDC = 120º - 90º = 30º$.

$\angle GDI = \angle EDC - 2\angle EDG = 60º$.

$\angle GDH = \frac{1}{2}\angle GDI = 30º$.

$\overline{GH} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.



L'àrea de la intersecció dels dos quadrats és:

$S_{DGHI} = \overline{GH} \cdot \overline{DG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

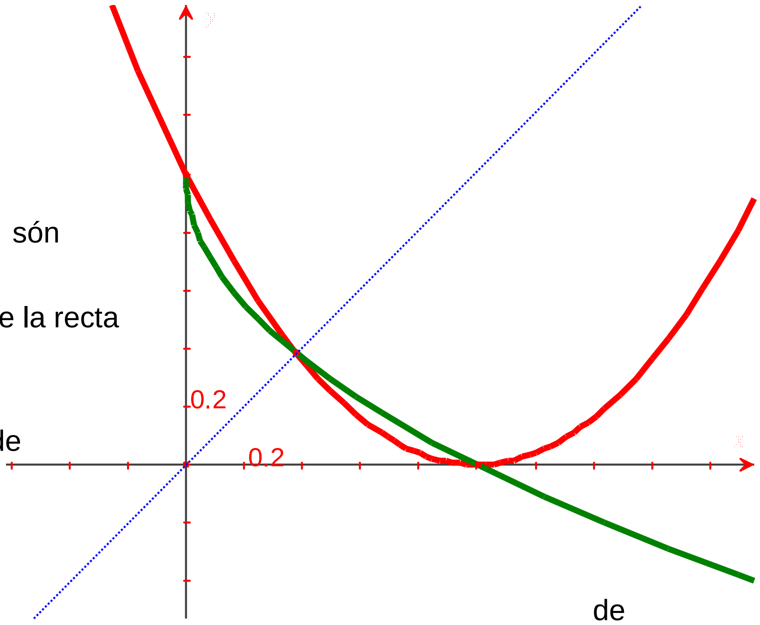
La proporció entre les dues àrees és:

$$\frac{S_{DGHI}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{9}.$$

1912.- Determineu els punts d'intersecció de les corbes de les funcions d'equacions:

$y=(x-1)^2$, $y=1-\sqrt{x}$.

KöMaL, 1389.



Solució 1:

Siga la funció $f(x)=(x-1)^2$, $x\leq 1$.

Siga la funció $g(x)=1-\sqrt{x}$, $x\geq 0$.

Les funció $f(x)=(x-1)^2$ $g(x)=1-\sqrt{x}$ són inverses.

Aleshores són simètriques respecte de la recta $y=x$.

El punt de tall amb l'eix d'ordenades de la funció f(x) és $(0,1)$.

$(0,1)$ per tant a la funció g(x)

El punt de tall amb l'eix d'ordenades de la funció g(x) és $(1,0)$.

$(1,0)$ per tant a la funció f(x)

Aleshores, aquest dos punts són punts de les dues corbes.

L'altra solució és la intersecció de les corbes $f(x)=(x-1)^2$, $y=x$.

Considerem el sistema format per les dues funcions $\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ y=x \end{cases}$, $x\leq 1$, $y\leq 1$.

Resolent el sistema, $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. El punt intersecció és $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Solució 2:

Resolent el sistema format per les dues funcions:

$$\begin{cases} y=(x-1)^2 \\ y=1-\sqrt{x} \\ x\geq 0,\ y\leq 1 \end{cases}.\quad \begin{cases} y=(x-1)^2 \\ x=(1-y)^2 \\ x\geq 0,\ y\leq 1 \end{cases}.\quad \begin{cases} y=\left((1-y)^2-1\right)^2 \\ x=(1-y)^2 \\ x\geq 0,\ y\leq 1 \end{cases}.\quad \begin{cases} y=\left(y^2-2y\right)^2 \\ x=(1-y)^2 \\ x\geq 0,\ y\leq 1 \end{cases}.$$

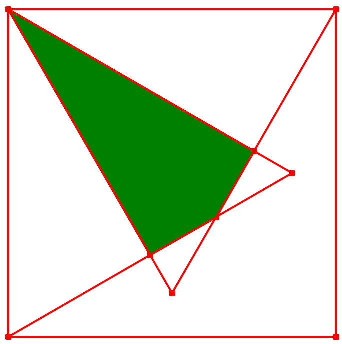
$y=y^4-4y^3+4y^2$.

$y\left(y^3-4y^2+4y-1\right)=0$. Aleshores, les solucions del sistema són:

$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Els punts intersecció són $(0,1)$, $(1,0)$, $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

1913.- En dos costats consecutius d'un quadrat s'ha dibuixat, cap a l'interior del quadrat, dos triangles equilàters

Determineu la proporció entre l'àrea de la intersecció dels dos triangles equilàters i l'àrea del quadrat.

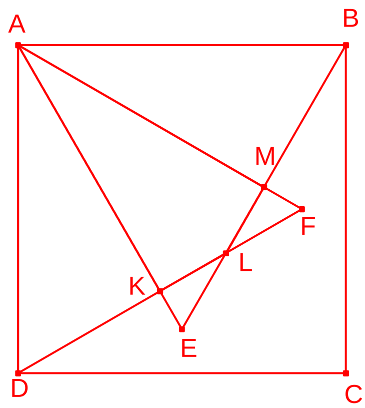


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.

Siguen els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{ADF}$.

Siga AKLM el quadrilàter format per la intersecció dels dos triangles equilàters.



$\angle DAK=\angle BAM=30^{o}$.

$\angle ADK=\angle ABM=60^{o}$.

Aleshores, $\angle AKD=\angle AMB=90^{o}$, $\angle KAM=30^{o}$.

$\angle KAL=15^{o}$.

$\overline{AK}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKL}$:

$$\frac{\overline{KL}}{\overline{AK}}=tg15^{o}=tg(45^{o}-30^{o})=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=2-\sqrt{3}.$$

$$\overline{KL}=\left(2-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}.$$

L'àrea de la regió ombrejada és:

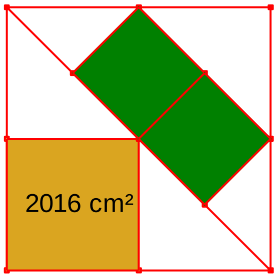
$$S_{AKLM}=\overline{AK}\cdot KL=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{3}-3}{2}=\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

La proporció entre les àrees del quadrilàter AKLM i el quadrat ABCD és:

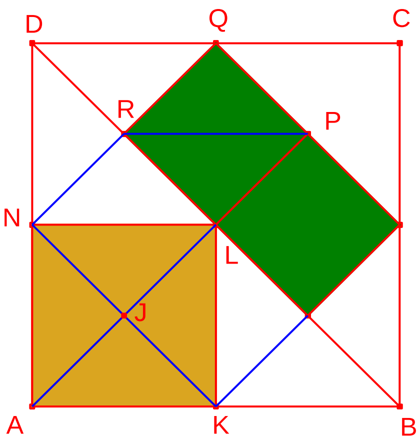
$$\frac{S_{AKLM}}{S_{AKLM}}=\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{4}.$$

1914.- Un quadrat s'ha partit en dos per la diagonal.

En la part inferior s'ha inscrit un quadrat d'àrea $2016\ cm^2$ i en la part superior s'ha inscrit dos quadrats menuts idèntics. Quina és l'àrea de cadascun dels dos quadrats menuts?.

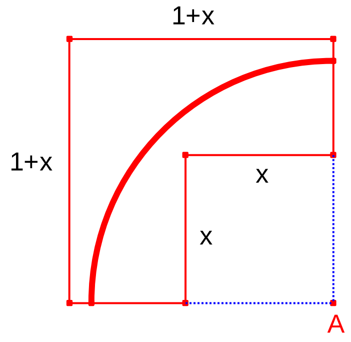


Solució:



$$S_{LPQR} = \frac{1}{2} S_{AKLM} = 1008\ cm^2.$$

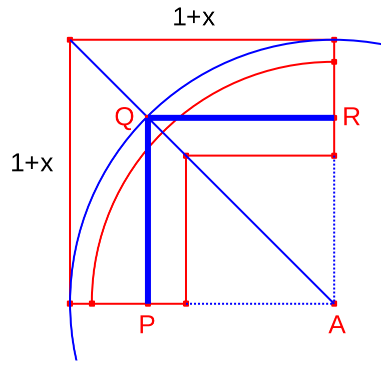
1915.- En un quadrat de cartró de costat $1+x$ s'ha retallat un quadrat de costat x com s'indica en la figura.



Es dibuixa un quart de circumferència de centre A que està completament contingut en el tros restant.
Calculeu el valor màxim de x que ho compleix.

Solució:
El quadrat màxim inscrit en el quadrat que té centre A el seu rad és $1+x$.
El valor màxim del valor x s'assoleix quan retallem el quadrat APQR tal que Q pertany al quadrant màxim anterior.

$\overline{AP}=\overline{AR}=\overline{PQ}=x$. $\overline{AQ}=1+x$.



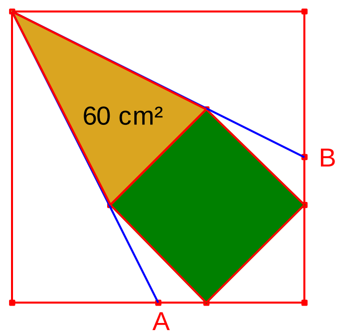
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$(1+x)^2=x^2+x^2$.

Resolent l'equació:

$x=1+\sqrt{2}$.

1916.- El triangle ombrejat té àrea $60\ cm^2$.



A i B són els punts migs del quadrat exterior de la figura.
Quina és l'àrea del quadrat ombrejat?.

Solució:

Siga $\overset{\Delta}{JKL}$ el triangle d'àrea $60\ cm^2$.

Siga $\overline{KL} = x$ costat del quadrat.

Siga M el punt mig del costat $\overline{KL}$ del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{JKL}$

Siga $\overline{JM} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{JKL}$.

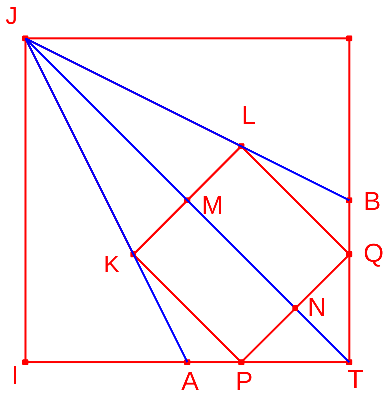
$$\frac{1}{2}xh = 60 \qquad (1)$$

Siga N el punt mig del costat $\overline{PQ}$.

$\overline{NT} = \overline{PN} = \frac{1}{2}x$.

Siga $\alpha = \angle KJM$, $\angle IJT = 45^o$.

Siga $\angle IJA = \beta$. $tg\beta = \frac{1}{2}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KMJ}$:

$$\frac{\frac{x}{2}}{h} = tg\alpha = tg(45^o - \beta) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$ Simplificant:

$$h = \frac{3}{2}x \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

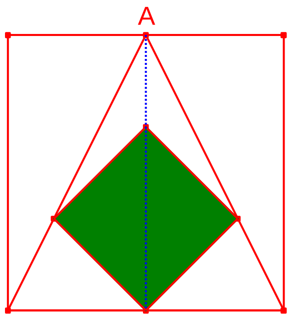
$\frac{1}{2}x\frac{3}{2}x = 60$.

$x^2 = 80$.

L'àrea del quadrat PQLK és:

$S_{PQLK} = x^2 = 80$.

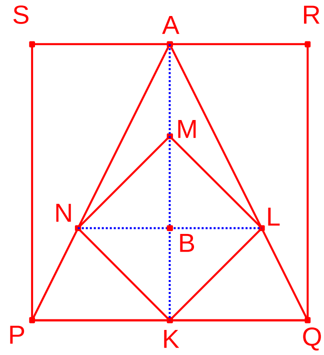
1917.- En la figura, A és el punt mig del quadrat.



Si el quadrat exterior té àrea 189 determineu l'àrea del quadrat ombrejat.

Solució:

Siga PQRS el quadrat exterior. Siga $c=\overline{PQ}$.



$S_{PQRS}=c^2=189$.

Siga KLMN el quadrat interior.

Siga $\overline{KM}=x$ la diagonal.

$S_{KLMN}=\frac{1}{2}x^2$.

Siga B la intersecció de les diagonals del quadrat KLMN.

$\overline{BN}=\frac{x}{2}$, $\overline{AB}=c-\frac{x}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APK}$, $\overset{\Delta}{ANB}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\frac{x}{2}}{c-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}$. Simplificant:

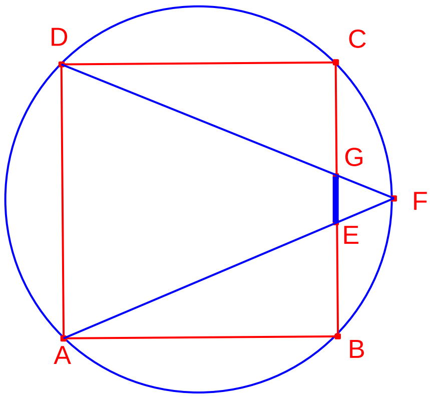
$x=\frac{2}{3}c$.

$S_{KLMN}=\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}c\right)^2=\frac{2}{9}c^2=\frac{2}{9}189=42$.

1918.- Un quadrat ABCD de costat 12 cm està inscrit en una circumferència.

Siga E un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BE}=5$ cm.
La recta AE talla la circumferència en el punt F.
La recta DF talla el costat $\overline{BC}$ en el punt G.
Calculeu la mesura del segment $\overline{EG}$.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$\overline{AE}=13$.

Aplicant la potència de E respecte de la circumferència:

$\overline{AE}\cdot\overline{FE}=\overline{BE}\cdot\overline{CE}$.

$13\cdot\overline{FE}=5\cdot 7$.

$\overline{FE}=\frac{35}{13}$.

$\overline{AF}=13+\frac{35}{13}=\frac{204}{13}$.

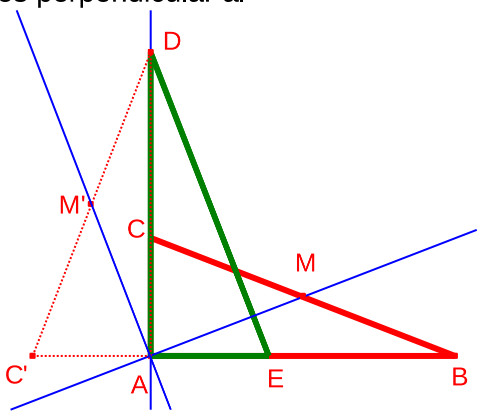
Els triangles $\overset{\Delta}{AFD}$, $\overset{\Delta}{EFG}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{EG}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{FE}}{\overline{AF}}$.

$\overline{EG}=12\cdot\frac{\frac{35}{13}}{\frac{204}{13}}=\frac{35}{17}$.

1919.- En la continuació dels costats del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ s'han marcat els segments $\overline{AD}$ i $\overline{AE}$ iguals als catets $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, respectivament.

Proveu que la recta que conté la mitjana $\overline{AM}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és perpendicular al segment $\overline{DE}$.
Gúsiev 370.



Solució:

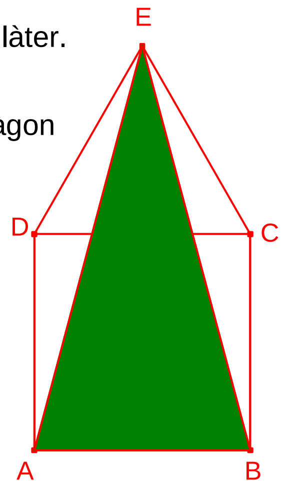
Efectuem un gir de 90º del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb centre A que és transforma en el triangle $\overset{\Delta}{ADC'}$.

Aleshores, la mitjana $\overline{AM}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és perpendicular a la mitjana $\overline{AM}$ del triangle $\overset{\Delta}{ADC'}$.
La mitjana d'un triangle rectangle és igual a la meitat de la hipotenusa:

El triangle $\overset{\Delta}{AM'C'}$ és isòsceles aleshores, $\angle M'C'A = \angle C'AM'$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADC'}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són iguals.
Aleshores, $\angle M'C'A = \angle C'AM' = \angle AED$.
Aleshores, $\overline{AM'}$ és paral·lel a $\overline{DE}$, per tant, $\overline{AM}$ és perpendicular a $\overline{DE}$.

1920.- En la figura, ABCD és un quadrat i $\overset{\Delta}{CDE}$ és un triangle equilàter.



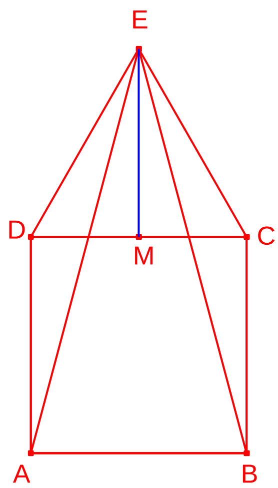
Determineu la proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ i el pentàgon ABCED.

Solució:

Siga $\overline{AB} = c$, costat del quadrat.

$\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AB} = c$.

L'àrea del quadrat ABCD és $S_{ABCD} = c^2$.



L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$:

$$S_{CDE} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2.$$

L'àrea del pentàgon ABCED és:

$$S_{ABCED} = S_{ABCD} + S_{CDE} = c^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)c^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DME}$:

$$\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

L'altura del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$h = \overline{AD} + \overline{ME} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}c\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c = \frac{2+\sqrt{3}}{4}c^2.$$

La proporció entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ i del pentàgon ABCED és:

$$\frac{S_{ABE}}{S_{aBCED}} = \frac{\frac{2+\sqrt{3}}{4}c^2}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)c^2} = \frac{5+\sqrt{3}}{13} \approx 0.6511.$$