Problemes de Geometria per a l'ESO 193

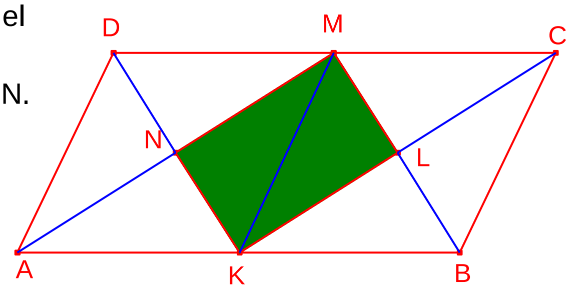
1921.- La longitud d'un costat d'un paral·lelogram ABCD és dues vegades la longitud de l'altre costat.
Determineu la relació de la zona del paral·lelogram formada per les bisectrius interiors del paral·lelogram ABCD.

Solució:

Siga ABCD el paral·lelogram ABCD tal que $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AD}$.

Notem que les bisectrius dels angles A i B tallen el costat $\overline{CD}$ en el punt mig M.

Les bisectrius dels angles C i D tallen el costat $\overline{AB}$ en el punt mig K.
La intersecció de les bisectrius forma el rectangle KLMN.
AKMD és un rombe.



$S_{NKM} = \frac{1}{4} S_{AKMD}$.

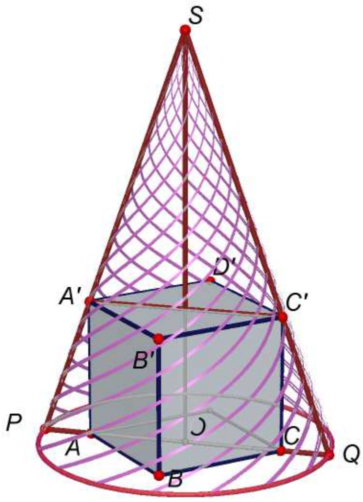
Aleshores, $S_{KLMN} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

1922.- Un cub està inscrit en un con circular dret.

Una cara del cub està en la base del con i els restants quatre vèrtexs pertanyen a la superficie lateral del con.

Calculeu l'àrea del cub si el radi de la base és $\frac{\sqrt{3}}{2}$ i la generatriu és tres vegades més gran que el radi.

KöMaL, C1398.



Solució:

Siga O el centre de la base del con.

Siga ABCDA'B'C'D' el cub inscrit en el con.

Siga $\overline{AB} = a$ l'aresta del cub.

La diagonal $\overline{AC}$ passa pel centre O.

La recta AC talla la base del con en P i Q.

$\overline{PQ} = \sqrt{3}$.

Siga S el vèrtex del con.

La generatriu del con $\overline{PS} = 3 \cdot \overline{OP} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Siga $\overline{OP} = h$ l'altura del con.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POS}$:

$$h = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6} .$$

$$\overline{OA} = \frac{1}{2}a\sqrt{2} .$$

$$\overline{PA} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{2} .$$

Els triangles $\overset{\Delta}{POS}$, $\overset{\Delta}{PAA'}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} .$$

Resolent l'equació:

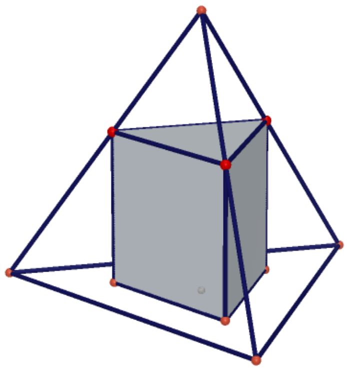
$$a = \frac{\sqrt{6}}{3} .$$

L'àrea del cub és:

$$S_{cub} = 6a^2 = 4 .$$

1923.- Un tetraedre regular té inscrit un prisma triangular regular amb totes les arestes iguals.

Calculeu la proporció entre el volum del prisma i el volum del tetraedre.



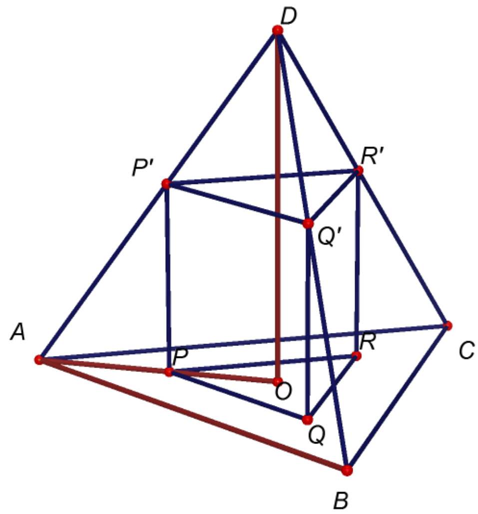
solució:

Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta $\overline{AB}=a$.

Siga O el centree de la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga PQRP'Q'R' el prisma inscrit en el tetraedre.

Siga $\overline{PQ}=x$ mesura de totes les arestes del prisma.



$\overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

$\overline{OP}=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

$P'Q'R'D$ és un tetraedre regular.

Aleshores, $\overline{P'D}=x$.

$\overline{AP'}=a-x$.

$\overline{AP}=\overline{OA}-\overline{OP}=\frac{\sqrt{3}}{3}(a-x)$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APP'}$:

$$(a-x)^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(a-x)\right)^2.$$

Resolent l'equació:

$x=\left(\sqrt{6}-2\right)a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:

$\overline{OD}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

El volum del prima PQRP'Q'R' és:

$$V_{prisma}=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\cdot x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^3.$$

El volum del tetraedre regular és:

$$V_{Tetraedre}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

La proporció entre el volum del prisma i del tetraedre és:

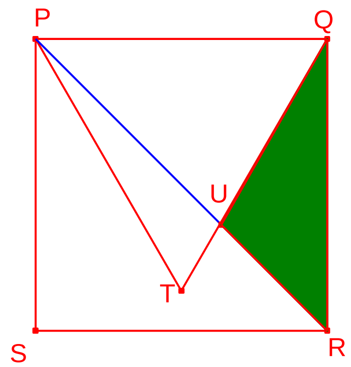
$$\frac{V_{prisma}}{V_{Tetraedre}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}=\frac{3\sqrt{6}}{2}\left(\sqrt{6}-2\right)^3=162-66\sqrt{6}\approx 0.3337.$$

1924.- En el dibuix, PQRS és un quadrat de costat 1.

El triangle $\overset{\Delta}{PQT}$ és equilàter.

Demostreu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{UQR}$ és $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Crux Mathematicorum CC242.



Solució:

Siga K la projecció de U sobre el costat $\overline{QR}$.

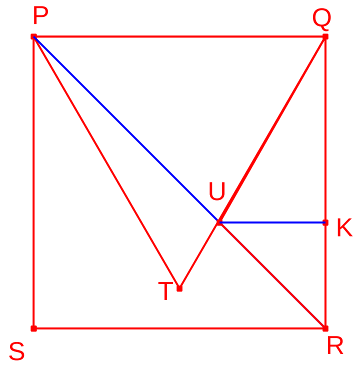
Siga $\overline{RK} = x$.

$\angle URQ = 45^{o}$, $\angle UQR = 30^{o}$.

$\overline{UK} = \overline{RK} = x$

$\overline{QU} = 2 \cdot \overline{UK} = 2x$.

$\overline{QK} = 1 - x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QKU}$:

$(2x)^2 = x^2 + (1-x)^2$. Resolent l'equació:

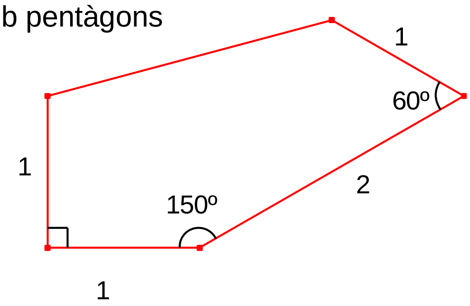
$x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{UQR}$ és:

$S_{UQR} = \dfrac{1}{2} 1 \cdot x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

1925.- Darrerament els mosaics, tenen fascinats els matemàtics i la societat.

Particularment útils són els enrajolats del plànol amb una sola rajola. En alguns casos, els polígons regulars (triangles equilàters, quadrats, hexàgons regulars) ho fan possible. Per contra, és impossible per a cobrir el plànol amb pentàgons regulars.
Se sap que alguns pentàgons no regulars poden cobrir el plànol.
En Agost de 2015, Casey Mann, Jennifer McLoud y David Von Derau, de la *Universitat de Washington Bothell*.van donar la benvinguda al món el descobriment d'un nou paviment pentagonal, el que s'il·lustra a continuació.
Utilitzeu les longituds i angles donats a fi de calcular l'àrea de la rajola.
Crux Mathematicorum CC241



Solució 1:

Siga ABCDE el pentàgon $\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{CD}=1$, $\overline{BC}=2$, $A=90^{\circ}$, $B=150^{\circ}$, $C=60^{\circ}$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{BC}$.

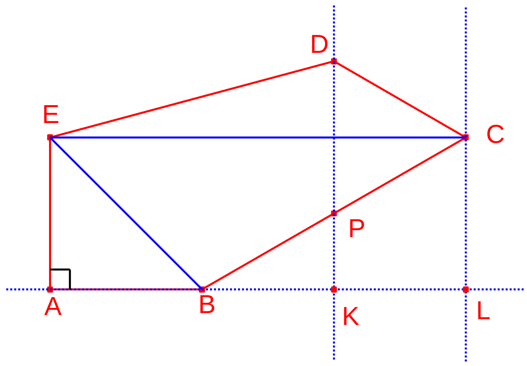
El triangle $\overset{\Delta}{CDP}$ és equilàter.

Aleshores, $\overline{DP}=1$.

La recta DP talla la recta AB en el punt K.

$\angle CBK=30^{\circ}$, $\angle BPK=60^{\circ}$.

Aleshores, DP és perpendicular a AB.



Aleshores, $\overline{PK}=\frac{1}{2}\overline{BP}=\frac{1}{2}$.

Aleshores, $\overline{DK}=\overline{DP}+\overline{PK}=\frac{3}{2}$.

Siga L la projecció de C sobre la recta AB. Aleshores, $\overline{CL}=1$, $\overline{BL}=\sqrt{3}$.

$\overline{CE}$ és paral·lel a $\overline{AB}$. $\overline{CE}=\overline{AB}+\overline{BL}=1+\sqrt{3}$.

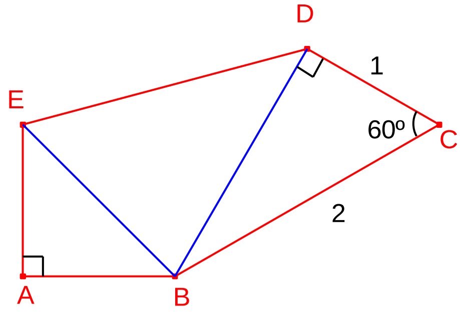
L'àrea del pentàgon ABCDE és:

$$S_{ABCDE}=S_{ABE}+S_{BCDE}=\frac{1}{2}\overline{AB}^2+\frac{1}{2}\overline{CE}\cdot\overline{DK}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\frac{3}{2}=\frac{5+3\sqrt{3}}{4}.$$

Solució 2:

Siga ABCDE el pentàgon $\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{CD}=1$, $\overline{BC}=2$, $A=90^{o}$, $B=150^{o}$, $C=60^{o}$.
$\overline{CD}=1$, $\overline{BC}=2$, $C=60^{o}$, aleshores, $\angle BDC=90^{o}$. $\angle DBC=30^{o}$, $\overline{BD}=\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ $\overline{BE}=\sqrt{2}$.
$\angle ABE=45^{o}$.
Aleshores, $\angle DBE=150^{o}-(45^{o}+30^{o})=75^{o}$.
L'àrea del pentàgon ABCDE és:



$$S_{ABE}=\frac{1}{2}\overline{BE}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{3}\sin 75^{o}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\ .$$

$$S_{ABCDE}=S_{ABE}+S_{EBD}+S_{BCD}=\frac{1}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{5+3\sqrt{3}}{4}\ .$$

1926.- Una piràmide està situada en un terreny horitzontal.

La seua base és un triangle equilàter de costat a, les altres tres arestes són de longitud b i el seu volum és V.

Demostreu que $V=\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-a^2}$.

La piràmide és desplaçada de manera que una de les cares no equilàtera és horitzontal.

Determineu l'altura de la piràmide sobre aquesta cara..

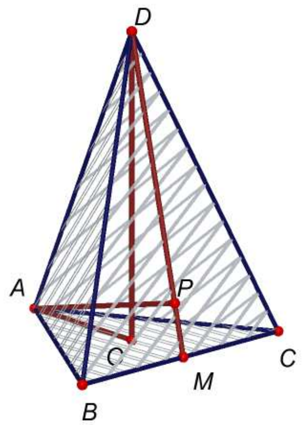
Crux Mathematicorum CC245.

Solució:

Siga ABCD la piràmide de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB}=a$.

Siga $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=b$ les arestes laterals.

Siga O el centre de la base. $\overline{OD}$ és l'altura de la piràmide.



$$\overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{3}a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$:

$$\overline{OD}=\sqrt{b^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{3b^3-a^2}}{\sqrt{3}} .$$

El volum de la piràmide ABCD és:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{OD}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-a^2} .$$

Siga $\overset{\Delta}{BCD}$ la nova base de la piràmide ABCD.

Siga $\overline{AP}$ l'altura sobre aquesta base.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMD}$:

$$\overline{MD}=\sqrt{b^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2} .$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$S_{BCD}=\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}=\frac{1}{4}a\sqrt{4b^2-a^2} .$$

El volum de tetraedre ABCD és:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABD}\cdot\overline{AP}=\frac{1}{3}\frac{1}{4}a\sqrt{4b^2-a^2}\cdot\overline{AP}=\frac{1}{12}a\sqrt{4b^2-a^2}\cdot\overline{AP} .$$

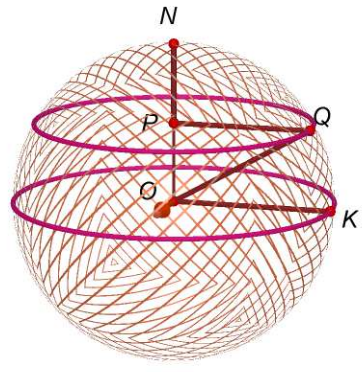
Igualant els volums:

$\frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2-a^2}=\frac{1}{12}a\sqrt{4b^2-a^2}\cdot\overline{AP}$. Aleshores l'altura és:

$$\overline{AP}=\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}} .$$

1927.- Determineu la latitud del paral·lel que divideix l'hemisferi nord de la Terra en dues zones d'igual àrea. Es suposa la Terra esfèrica.

Solució:
Siga O el centre de la Terra. Siga N el pol Nord. Siga R el radi de la Terra.
El plànol del paral·lel que cerquem talla l'eix de l'esfera en el punt Q.
Siga $h = \overline{PN}$ altura del casquet.
Siga $\alpha = \angle QOK$ latitud del paral·lel.



$\angle PQO = \angle QOK = \alpha$.
L'àrea del casquet és:
$S_{casquet} = 2\pi Rh$.
L'àrea de la zona compresa entre l'Equador i el paral·lel és igual a l'àrea de mitja esfera menys l'àrea del casquet:
$S_{zona} = \frac{1}{2}4\pi R^2 - 2\pi Rh = 2\pi R(R-h)$.
Les dues àrees han de ser iguals, aleshores:
$2\pi Rh = 2\pi R(R-h)$.
Aleshores, $h = \frac{1}{2}R$.
$\overline{OP} = \overline{PN} = \frac{1}{2}R$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:
$\sin\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{2}$.
Aleshores, $\alpha = 30^{o}$.

1928.- Determineu la latitud del paral·lel que divideix l'hemisferi nord de la Terra en dues zones d'igual volum. Es suposa la Terra esfèrica.

Solució:

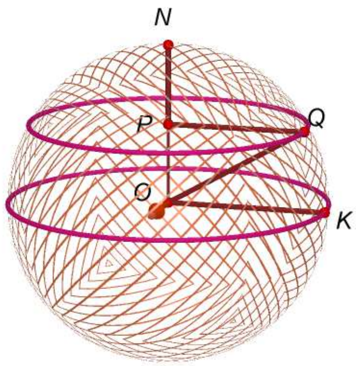
Siga O el centre de la Terra. Siga N el pol Nord. Siga R el radi de la Terra.

El plànol del paral·lel que cerquem talla l'eix de l'esfera en el punt Q.

Siga $h = \overline{PN}$ altura del casquet.

Siga $\alpha = \angle QOK$ latitud del paral·lel.

$\angle PQO = \angle QOK = \alpha$.



El volum del casquet és:

$$V_{casquet} = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

El volum de la zona compresa entre l'Equador i el paral·lel és igual al volum de mitja esfera menys el volum del casquet:

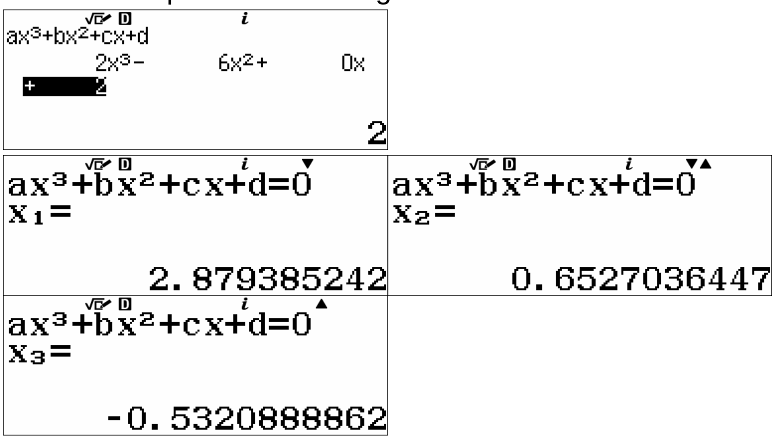
$$V_{zona} = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 - \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

Els dos volums han de ser iguals, aleshores:

$$\pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right). \quad 2h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{2}{3}R^3.$$

$$2h^3 - 6Rh^2 + 3R^3 = 0. \quad 2\left(\frac{h}{R}\right)^3 - 6\left(\frac{h}{R}\right)^2 + 3 = 0.$$

Resolent l'equació de tercer grau:

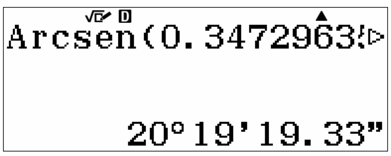


Aleshores, $h \approx 0.6527036447\,R$.

$\overline{OP} = R - h = 0.3472963553R$.

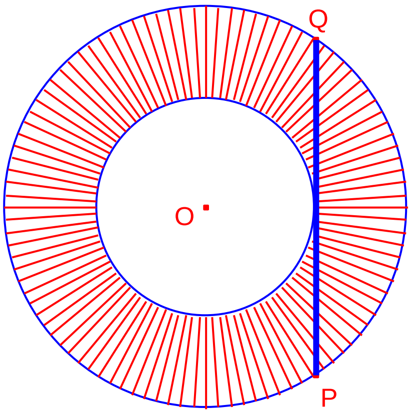
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \approx 0.3472963553.$$



Aleshores la latitud és $\alpha \approx 20^o 19' 19.33''$.

1929.- En la figura, hi ha dues circumferències concèntriques i una corda de la circumferència gran $\overline{PQ} = 28$, tangent a la circumferència interior. Calculeu l'àrea de la corona circular ombrejada.



Solució:

Siga M el punt mig de la corda $\overline{PQ}$.

$\overline{QM} = 14$, $\angle OMQ = 90^{\circ}$.

La recta OM talla la circumferència en els punts A, B.

Siga $\overline{OQ} = R$, $\overline{OM} = r$ radis de les dues circumferències.

Aplicant la potència del punt M respecte de la circumferència:

$\overline{PM} \cdot \overline{QM} = \overline{AM} \cdot \overline{BM}$.

$14 \cdot 14 = (R + r)(R - r)$.

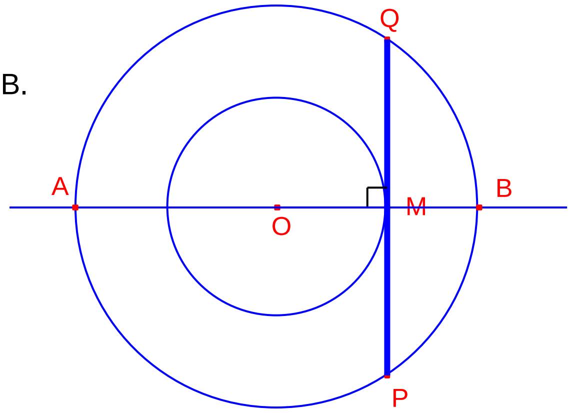
$14^2 = R^2 - r^2$

L'àrea de la corona circular és:

$S = \pi(R^2 - r^2)$.

Aleshores, l'àrea de la corona és:

$S = 196\pi$.

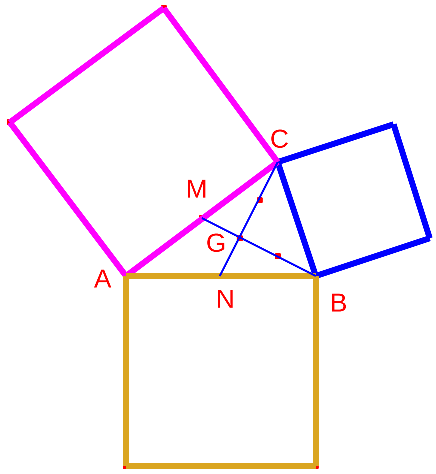


Problema 708, resolt amb el teorema de Pitàgores.

1930.- Hi havia una vegada un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ les mitjanes $\overline{BM}$ i $\overline{CN}$ del qual eren perpendiculars.

Cadascun dels tres costats eren també costat d'un quadrat exterior al triangle. Aquests quadrats estaven acolorits respectivament, de blau, rosa i groc, depenent de si la seua base era $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ o $\overline{AB}$. Quants quadrats blaus calen per obtenir una superfície igual a la dels quadrats rosa i groc junts?.

Solució de Ricard Peiró i Estruch:
Siga G el baricentre del triangle.



Les mesures de les mitjanes del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són:

$$\overline{BM}^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4},\ \overline{CN}^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{BG}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\overline{BM}^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}.$$

$$\overline{GN}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\overline{CN}^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{36}.$$

Per hipòtesi el triangle $\overset{\Delta}{BGN}$ és rectangle.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2c^2=\overline{BG}^2+\overline{GN}^2:$$

$$\frac{1}{4}c^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{9}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{36}.$$ Simplificant:

$5a^2=b^2+c^2$.
Aleshores, 5 quadrats blaus és igual a la suma dels quadrats rosa i groc.