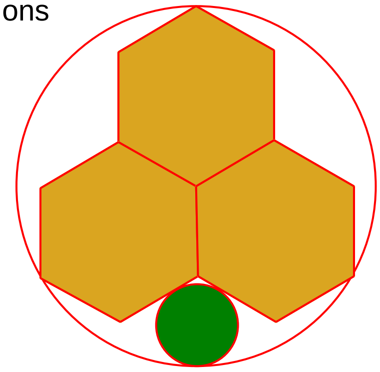
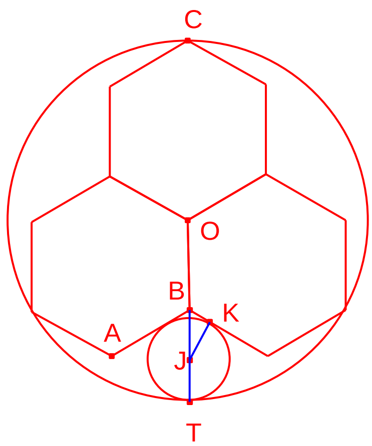
Problemes de Geometria per a l'ESO 194

1931.- En l'interior d'una circumferència de radi R hi ha 3 hexàgons regulars iguals i una circumferència tangent a la circumferència de radi R i tangent al costat de dos hexàgons.
Determineu el radi de la circumferència ombrejada.



Solució:
Siga T el punt de tangència de les dues circumferències.
Siga O el centre de la circumferència exterior i $\overline{OC} = \overline{OT} = R$ el radi.
Siga $\overline{AB} = \overline{BO}$ costats de l'hexàgon regular.



$\overline{AB} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{1}{2}R$.

$\overline{BT} = \frac{1}{2}R$.

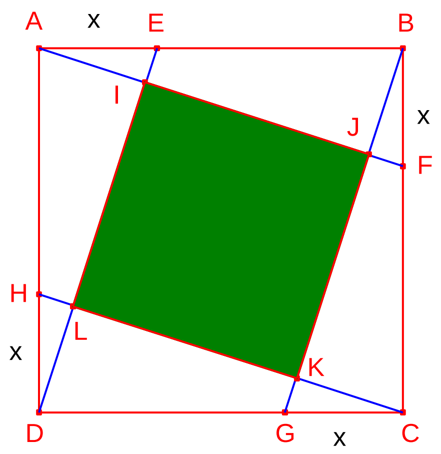
Siga J el centre de la circumferència menuda.
Siga $\overline{JT} = \overline{JK} = r$.
$\angle JBK = 60º$.
El triangle $\overset{\Delta}{BKJ}$ és rectangle 30º, 60º, 90º.

$\overline{BJ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$.

$\overline{BT} = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r$.

Aleshores, $\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)r = \frac{1}{2}R$. Resolent l'equació:

$r = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}R$.



1932.- Siga ABCD un quadrat de costat 1.

Siguen E, F, G, H sobre els costats del quadrat ABCD tal que
$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$.
Determina l'àrea del quadrat IJKL format per les interseccions dels segments $\overline{AF}$, $\overline{BG}$, $\overline{CH}$ i $\overline{DE}$, en funció de x.

Determineu el valor de x a fi que l'àrea del quadrat IJKL siga $\frac{1}{2}$.

"Les fonctions". Biblioteque Tangente. HS nº 56.
Editions POLE. Paris. 2016.

Solució:
Siga $\overline{GK} = a$, $\overline{CK} = b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDH}$:
$\overline{CH} = \sqrt{1+x^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDH}$, $\overset{\Delta}{CKG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{DH}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{GK}}{\overline{CG}}$. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{a}{x}$. Aleshores, $a = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDH}$, $\overset{\Delta}{CKG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{CD}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{CG}}$. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{b}{x}$. Aleshores, $b = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\overline{LK} = \overline{CH} - (a+b) = \sqrt{1+x^2} - \left(\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a+x^2}}\right) = \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

L'àrea del quadrat JKLM és:

$$S(x) = \left(\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2.$$

$$S(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}, \quad x \in [0,1].$$

Per calcular el valor x tal que $S(x) = \frac{1}{2}$.

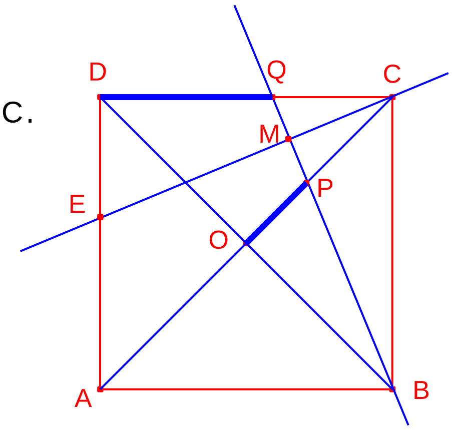
$\frac{x^2-2x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$. Simplificant:
$x^2 - 4x + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$x = 4 - \sqrt{3}$.

1933.- Donat un quadrat ABCD de centre O, es traça la bisectriu de l'angle $\angle ACD$ que intersecta el costat $\overline{AD}$ en el punt E.
La recta perpendicular a $\overline{CE}$ que passa per B intersecta el segment $\overline{AC}$ en P i al costat $\overline{CD}$ en Q. Proveu que $\overline{DQ} = 2 \cdot \overline{PO}$.

Solució:
Siga M la intersecció dels segments $\overline{CE}$, $\overline{BQ}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{BMC}$ són semblants, perquè tenen costats perpendiculars ($\overline{BM} \perp \overline{CE}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$).
Aleshores, $\angle DCE = \angle MBC$.
$\overline{CE}$ és bisectriu de $\angle ACD$, aleshores, $\overline{BQ}$ és bisectriu de $\angle DBC$.



Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$\frac{\overline{PO}}{\overline{AB}\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} - \overline{PO}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\overline{AB}}$$. Simplificant:

$$\overline{PO} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$\overline{PO} = \frac{\overline{AB}}{2+\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{AB}\sqrt{2}} = \frac{\overline{AB} - \overline{DQ}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{(1+\sqrt{2})\overline{AB}}$$. Simplificant :

$$\overline{DQ} = \frac{\overline{AB}\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) i (2)

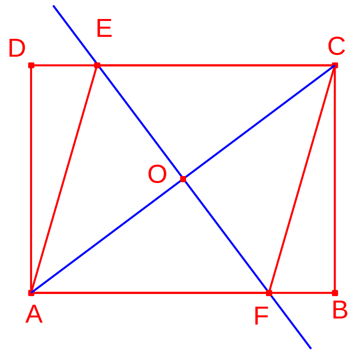
$$\frac{\overline{PO}}{\overline{DQ}} = \frac{\frac{\overline{AB}}{2+\sqrt{2}}}{\frac{\overline{AB}\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $\overline{DQ} = 2 \cdot \overline{PO}$.

1934.- Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB}=16$, $\overline{BC}=12$.

Siguen els punts E en el costat $\overline{CD}$ i F en el costat $\overline{AB}$ tals que AFCE és un rombe.
Calculeu $\overline{EF}$.

Solució:



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}=20$.
Siga $x=\overline{AF}=\overline{FC}=\overline{CE}=\overline{AE}$ costats del rombe.
La recta EF és mediatriu de la diagonal $\overline{AC}$ del rombe AFCE.
Aleshores, les diagonals del rombe s'intersecten en el centre O del rectangle ABCD formant un angle recte.
Siga $\overline{OE}=\overline{OF}=y$.
$\overline{DE}=16-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$x^2=12^2+(16-x)^2$. Resolent l'equació:

$x=\frac{25}{2}$.

$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=10$.

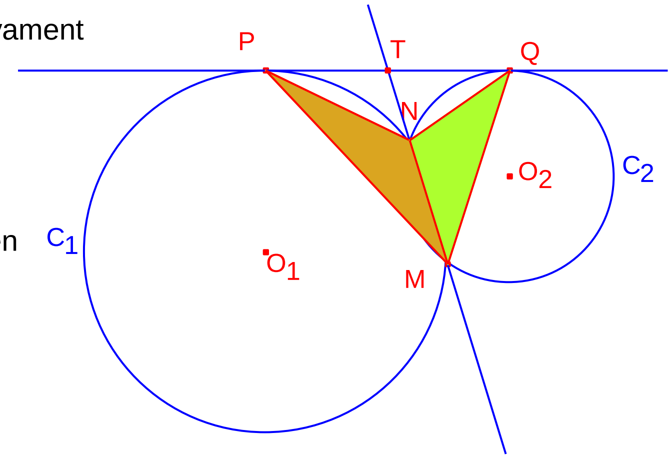
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOE}$:
$x^2=10^2+y^2$.

$\left(\frac{25}{2}\right)^2=10^2+y^2$. Resolent l'equació:

$y=\frac{15}{2}$.

$\overline{EF}=2y=15$.

1935.- Dues circumferències C_1 i C_2 s'intersecten en els punts M i N i són tangents a una recta en els punts P i Q, respectivament (veure figura).



Siga T el punt intersecció de les rectes MN i PQ.

a) Proveu que T és el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

b) Demostreu que els triangles $\overset{\Delta}{MNP}$, $\overset{\Delta}{MNQ}$ tenen la mateixa àrea.

Solució:

a)

Aplicant la potència del punt T respecte de la circumferència C_1:

$\overline{TN}\cdot\overline{TM}=\overline{TP}^2$ (1)

Aplicant la potència del punt T respecte de la circumferència C_2:

$\overline{TN}\cdot\overline{TM}=\overline{TQ}^2$ (2)

De les expressions (1) i (2) deduïm que $\overline{TP}=\overline{TQ}$.

Aleshores, T és el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

b)

Els triangles $\overset{\Delta}{PTM}$, $\overset{\Delta}{QTM}$ tenen la mateixa base i la mateixa altura, aleshores, les àrees són iguals:

$S_{PTM}=S_{QTM}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PTN}$, $\overset{\Delta}{QTN}$ tenen la mateixa base i la mateixa altura, aleshores, les àrees són iguals:

$S_{PTN}=S_{QTN}$.

$S_{MNP}=S_{PTM}-S_{PTN}=S_{QTM}-S_{QTN}=S_{MNQ}$.

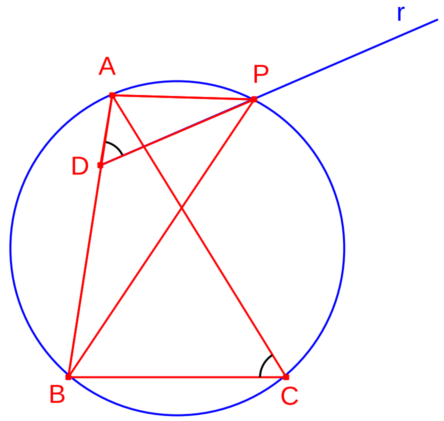
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{MNP}$, $\overset{\Delta}{MNQ}$ tenen la mateixa àrea.

1936.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle.

Siga d un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AB}=4\cdot\overline{AD}$.
La semirecta r d'origen D talla l'arc AC de la circumferència circumscrita en el punt P i $\angle ADP=\angle ACB$ (veure figura).

a) Proveu que els triangles $\overset{\Delta}{ADP}$ i $\overset{\Delta}{APB}$ són semblants.

b) Demostreu que $\overline{PB}=2\cdot\overline{PD}$.

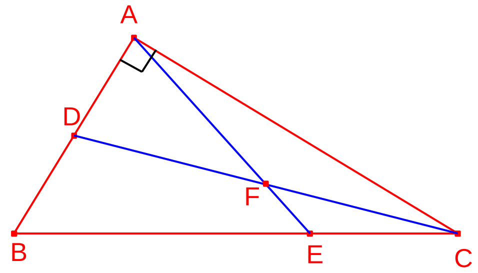


Solució:

El triangles $\overset{\Delta}{ADP}$ i $\overset{\Delta}{APB}$ són semblants ja que tenen els angles corresponents iguals:
$\angle ADP=\angle APB=C$.
$\angle PAB=\angle DAP$.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{4\cdot\overline{AD}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}.$$
$$\overline{AP}^2=4\cdot\overline{AD}^2.$$
Simplificant:
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}}=2.$$
Aleshores, la raó de proporcionalitat dels triangles $\overset{\Delta}{ADP}$ i $\overset{\Delta}{APB}$ és $1:2$.

Aleshores, $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PD}}=2$.

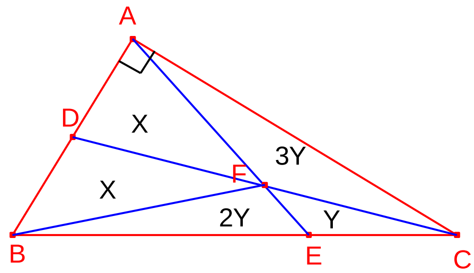
1937.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.



Siga D el punt mig del catet $\overline{AB}$.
Siga E el punt del catet $\overline{BC}$ tal que $\overline{BE} = 2 \cdot \overline{CE}$.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{AFC}$ és isòsceles.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
Dos triangles que tenen la mateixa altura les bases són proporcionals a les àrees.
Siga $X = S_{ADF}$, $Y = S_{ECF}$.
Aleshores:



$S_{BDF} = S_{ADF} = X$.

$S_{BEF} = 2 \cdot S_{ECF} = 2Y$.

$S_{BDC} = S_{ADC}$, $S_{BDF} = S_{ADF}$, aleshores:

$S_{AFC} = S_{BFC} = 2Y + Y = 3Y$.

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} = \frac{S_{AFC}}{S_{EFC}} = \frac{3Y}{Y} = 3.$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} = \frac{S_{ABF}}{S_{BFE}} = 3 = \frac{2X}{2Y}.$$

Simplificant:

$X = 3Y$.

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{CF}} = \frac{S_{ADF}}{S_{ACF}} = \frac{X}{3Y} = 1.$$

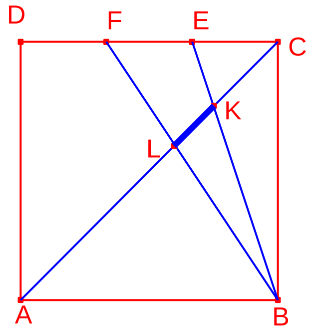
Aleshores, $\overline{DF} = \overline{CF}$.

Aleshores, $\overline{AF}$ és mitjana del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$.
En un triangle rectangle la mitjana sobre la hipotenusa mesura la meitat de la hipotenusa, aleshores:

$\overline{AF} = \overline{CF}$, per tant, el triangle $\overset{\Delta}{AFC}$ és isòsceles.

Anàlogament, s'acompleix que $\overset{\Delta}{AFC}$ és isòsceles, $\overline{AF} = \overline{DF}$.

1938.- Els punts E i F divideixen el costat $\overline{CD}$ del quadrat de costat unitat ABCD en tres parts iguals.



Els segments $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$ tallen la diagonal $\overline{AC}$ en els punts K i L, respectivament.

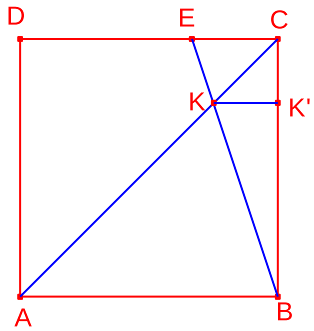
Determineu la mesura del segment $\overline{KL}$.

KöMaL, C1414.

Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BCE}$.

$\overline{CK}$ és bisectriu.



Aplicant la propietat de la bisectriu: $\dfrac{\overline{EK}}{\overline{BK}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \dfrac{1}{3}$.

Siga K' la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{BK'K}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales :

$\dfrac{\overline{CK'}}{\overline{BK'}} = \dfrac{\overline{EK}}{\overline{BK}} = \dfrac{1}{3}$.

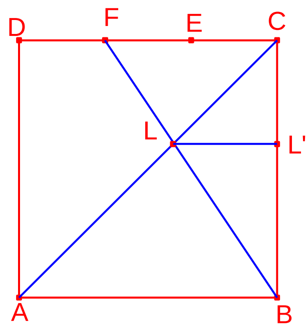
Aleshores, $\overline{CK'} = \dfrac{1}{4}\overline{BC} = \dfrac{1}{4}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{KK'C}$:

$\overline{CK} = \overline{CK'} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BCF}$.

$\overline{CF}$ és bisectriu.



Aplicant la propietat de la bisectriu: $\dfrac{\overline{FL}}{\overline{BL}} = \dfrac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \dfrac{2}{3}$.

Siga L' la projecció de L sobre el costat $\overline{BC}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCF}$, $\overset{\Delta}{BL'L}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{CL'}}{\overline{BL'}} = \dfrac{\overline{FL}}{\overline{BL}} = \dfrac{2}{3}$.

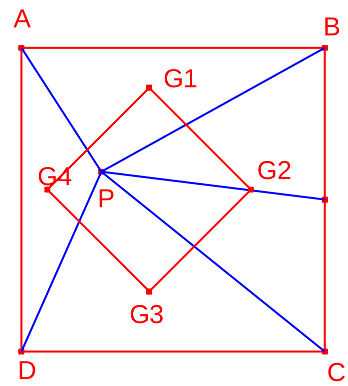
Aleshores, $\overline{CL'} = \dfrac{2}{5}\overline{BC} = \dfrac{2}{5}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{LL'C}$:

$\overline{CL} = \overline{CL'} \cdot \sqrt{2} = \dfrac{2}{5}\sqrt{2}$.

$\overline{KL} = \overline{CL} - \overline{CK} = \left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{4}\right)\sqrt{2} = \dfrac{3}{20}\sqrt{2}$.

1939.- Siga P un punt interior al quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=3$.



Es dibuixen els baricentres G_1, G_2, G_3, G_4 dels triangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{BCP}$, $\overset{\Delta}{CDP}$, $\overset{\Delta}{DAP}$, respectivament.

a) Proveu que $G_1G_2G_3G_4$ és un quadrat.

b) Calculeu l'àrea del quadrat $G_1G_2G_3G_4$.

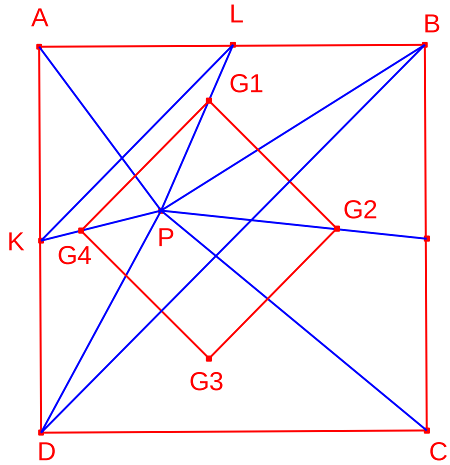
Solució:

Siguen K i L els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, respectivament.

Considerants els triangles $\overset{\Delta}{KLP}$, $\overset{\Delta}{G_4G_1P}$ aplicant la propietat del baricentre

$$\frac{\overline{PG_1}}{\overline{PL}}=\frac{\overline{PG_4}}{\overline{PK}}=\frac{2}{3}$$

Aleshores, aplicant el teorema invers de Tales:



Els triangles $\overset{\Delta}{KLP}$, $\overset{\Delta}{G_4G_1P}$ són semblants.

$$\frac{\overline{G_1G_4}}{\overline{KL}}=\frac{2}{3}.$$

Aleshores, els costats del quadrilàter $G_1G_2G_3G_4$ són iguals, i paral·lels a les diagonals del quadrat ABCD. Aleshores és un quadrat.

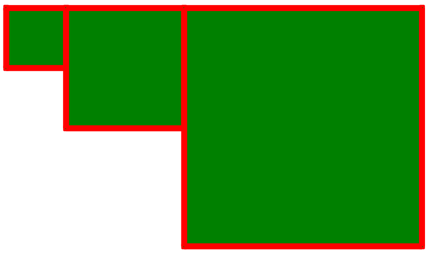
$$\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}3\sqrt{2}.$$

$$\overline{G_1G_4}=\frac{2}{3}\overline{KL}=\sqrt{2}.$$

L'àrea del quadrat $G_1G_2G_3G_4$ és:

$$S_{G_1G_2G_3G_4}=\overline{G_1G_4}^2=2.$$

1940.- Sabent que l'àrea de la següent figura és $9261\,cm^2$, esbrina el seu perímetre si el costat del quadrat menut mesura la meitat del que mesura el quadrat mitjà i a més, sabent que el costat del quadrat gran mesura el doble que el del mitjà.



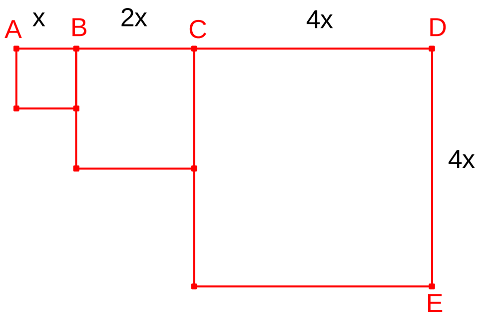
Solució:

Siga $\overline{AB} = x$ costat del quadrat menut.

$\overline{BC} = 2x$ costat del quadrat mitjà. $\overline{CD} = \overline{DE} = 4x$ costats del quadrat gran.

El perímetre de la figura és:

$P = 2\left(\overline{AC} + \overline{CD}\right) = 2(7x + 4x) = 22x$.



L'àrea total de la figura és $9261\,cm^2$:

$x^2 + (2x)^2 + (4x)^2 = 9261$.

$21x^2 = 9261$. Resolent l'equació:

$x = 21\,cm$.

El perímetre de la figura és:

$P = 22x = 22 \cdot 21 = 462$ cm.