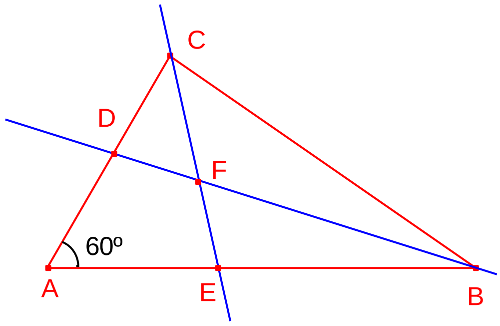
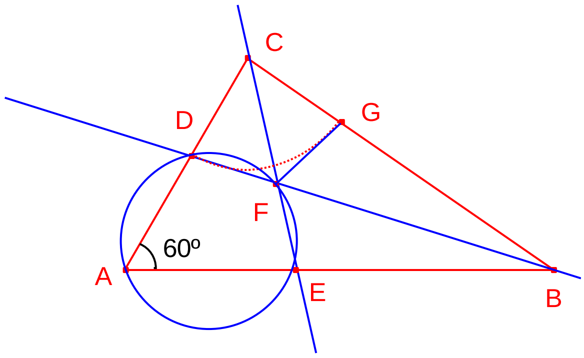
Problemes de Geometria per a l'ESO 195



1941.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ amb $A = 60^o$.
Siguen BD, CE les bisectrius interiors dels angles B i C, respectivament, que es tallen en el punt F.
a) Proveu que el quadrilàter AEFD és cíclic.
b) Proveu que $\overline{BE} + \overline{DC} = \overline{BC}$
Flatlandia, maig 2017

Solució:
a)
$\angle CFD = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{180^o - A}{2} = 60^o$.
Aleshores, $\angle DFE = 180^o - \angle CFD = 120^o$.
Els angles A i F del quadrilàter AEFD són suplementaris.
Aplicant el teorema de Tolomeu, el quadrilàter AEFD és cíclic.
b)



Siga G un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{DC} = \overline{GC}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{CDF}$, $\overset{\Delta}{CGF}$ són iguals (LAL).
Aleshores, $\angle CFG = \angle CFD = 60^o$.
$\angle GFB = 180^o - (\angle DFC + \angle CFG) = 60^o$.
Els triangles $\overset{\Delta}{BFG}$, $\overset{\Delta}{BFEF}$ són iguals (ALA).
Aleshores, $\overline{BG} = \overline{BE}$.
$\overline{BC} = \overline{BG} + \overline{GC} = \overline{BE} + \overline{DC}$.

1942.- És possible traçar dues rectes que passen pel punt $(3,-2)$ tals que cadascuna de les rectes la suma de l'abscissa del punt de tall amb l'eix d'abscisses i l'ordenada a l'origen siguen igual a tres vegades el pendent.
Determineu la suma dels pendents de totes dues rectes.
Crux Mathematicorum CC270. Abril 2017.

Solució:
L'equació de la recta que passa pel punt $A(3,-2)$ i té pendent m és:
$y+2=m(x-3)$.

Si $y=0$, aleshores, $x=\frac{2}{m}+3$.

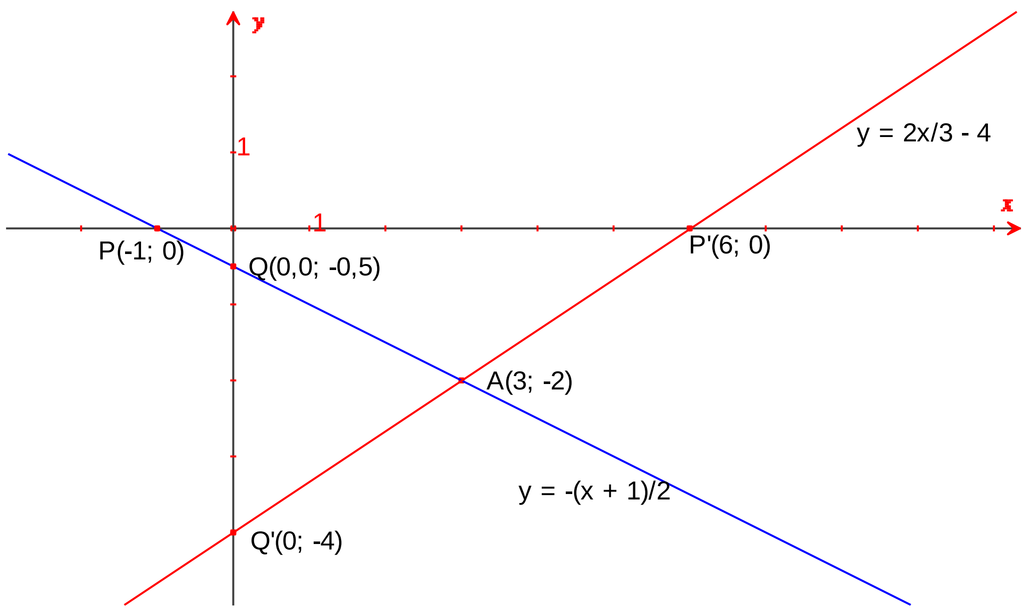
Aleshores, el punt de tall amb l'eix d'abscisses és $P\left(\frac{2}{m}+3,0\right)$.

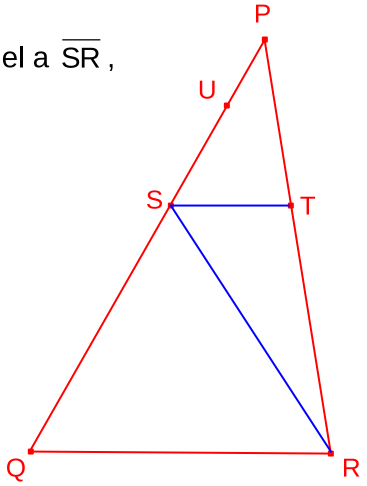
L'abscissa del punt de tall amb l'eix d'abscisses és $\frac{2}{m}+3$.

Si $x=0$, aleshores, $y=-3m-2$.
Aleshores, el punt de tall amb l'eix d'ordenades és $Q(0,-3m-2)$
L'ordenada a l'origen és $-3m-2$

La suma de l'abscissa del punt de tall amb l'eix d'abscisses i l'ordenada a l'origen siguen igual a tres vegades el pendent, aleshores:
$\frac{2}{m}+3-3m-2=3m$. Simplificant:
$6m^2-m+1=0$.
Resolent l'equació: $m=-\frac{1}{2},\frac{2}{3}$.

La suma de les dues pendent és $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$.





1943.- En el dibuix, $\overline{ST}$ és paral·lel a $\overline{QR}$, $\overline{UT}$ és paral·lel a $\overline{SR}$, $\overline{PU}=4$ i $\overline{US}=4$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{SQ}$.

Crux Mathematicorum CC265.

Solució:

Siga $x=\overline{SQ}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{QRS}$, $\overset{\Delta}{STU}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{ST}}=\frac{x}{6} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{QRP}$, $\overset{\Delta}{STP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{ST}}=\frac{x+10}{10} \qquad (2)$$

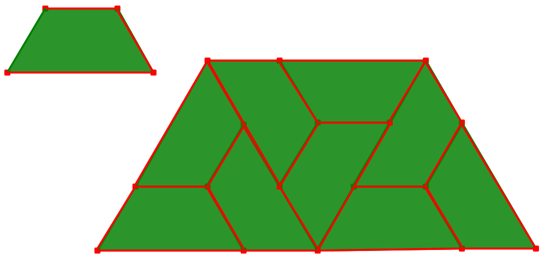
Igualant les expressions (1) (2):

$$\frac{x}{6}=\frac{x+10}{10}.$$

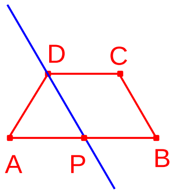
Resolent l'equació:

$x=15$.

1944.- El trapezi menut de la dreta té tres costats iguals i els angles iguals a 60º i 120º.
Nou còpies d'aquest trapezi es col·loquen juntes per fer un trapezi més gran, com es mostra a la figura.
Si el trapezi més gran té 18 cm de perímetre, calculeu el perímetre del trapezi menor.
UK Junior Mathematical Challenge, 2017.



Solució:
Siga ABCD el trapezi isòsceles menor.



Per hipòtesi $\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{BC}$.

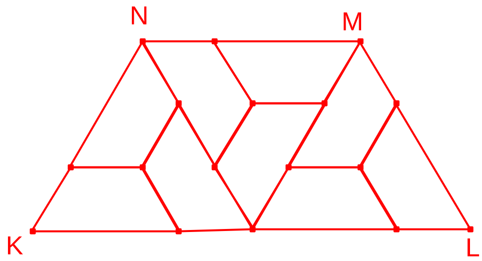
Si tracem una paral·lela al costat $\overline{BC}$ que passa per D talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P.

El triangle $\overset{\Delta}{APD}$ és equilàter i PBCD és un paral·lelogram.

Aleshores, $\overline{AP}=\overline{AD}=\overline{CD}=\overline{PB}$.

Aleshores, $\overline{AB}=2\cdot\overline{AD}$.

Siga KLMN el trapezi format per 9 trapezis iguals al trapezi ABCD.



Notem que $\overline{KL}=2\cdot\overline{KN}$, $\overline{KN}=\overline{MN}=\overline{LM}$.

El perímetre de ABCD és:

$P_{ABCD}=5\cdot\overline{AD}$.

El perímetre de KLMN és:

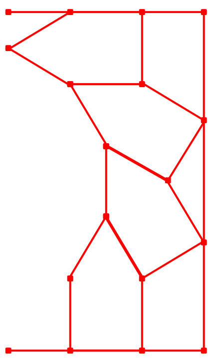
$P_{KLM}=3\cdot\overline{KN}+\overline{KJ}=5\cdot\overline{KN}=5\left(\overline{AD}+\overline{AB}\right)=15\cdot\overline{AD}$.

$P_{KLM}=18$.

$15\cdot\overline{AD}=18$. Aleshores, $\overline{AD}=\frac{6}{5}$.

$P_{ABCD}=5\cdot\overline{AD}=6$

1945.- Un pentàgon es construeix unint un triangle equilàter amb un quadrat amb la mateixa longitud de costat. Quatre d'aquests pentàgons es col·loquen dins d'un rectangle, com es mostra en la figura.
Quina és la proporció entre els costats del rectangle?.



Solució:

Siga ABCD el rectangle exterior.

Siga $\overline{KL}=1$ costat del pentàgon format pel quadrat i el triangle equilàter.

$\overline{AP}=\overline{RQ}=\overline{SD}=1$.

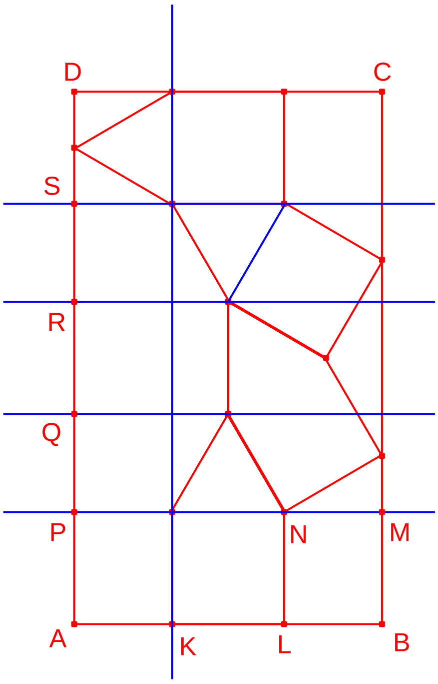
$\overline{AK}=\overline{RS}=\overline{PQ}=\overline{LB}=\overline{MN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overline{AB}=1+\sqrt{3}$.

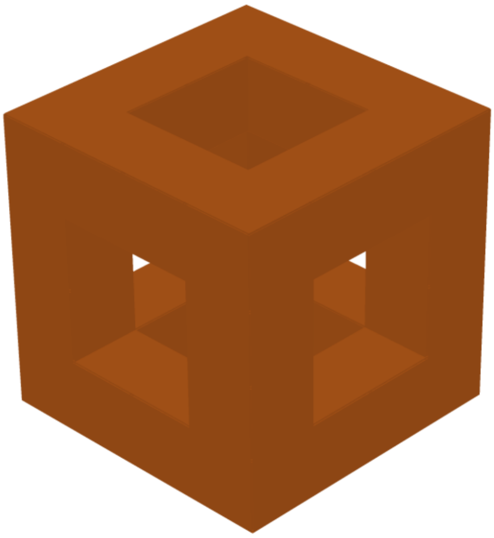
$\overline{AD}=3+\sqrt{3}$.

La proporció entre els costats del rectangle és:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\frac{3+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$



1946.- Siga un cub $4 \times 4 \times 4$ té tres forats $2 \times 2 \times 4$ perforats simètricament, com mostra la figura.
Calculeu l'àrea del sòlid resultant.

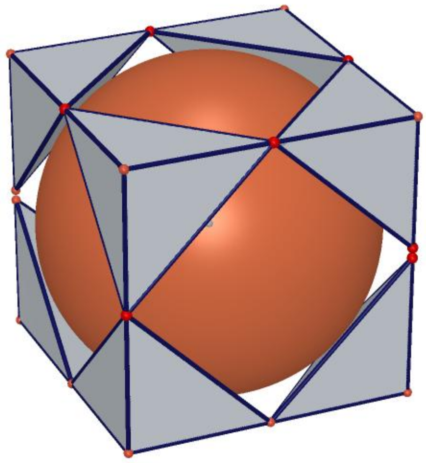


Solució 1:
L'àrea total és igual a l'àrea lateral de 12 prismes de base 1×1 i altura 2 i en els 8 vèrtexs 3 quadrats:

$S = 12(4 \cdot 2) + 8 \cdot 3 = 120$.

Solució 2:
Cada cara de l'inicial s'ha eliminat un quadrat 2×2 s'han afegit 24 rectangles 1×2.
L'àrea total és:
$S = 6(4 \cdot 4 - 2 \cdot 2) + 24(1 \cdot 2) = 120$.

1947.- Un petjapapers està fet d'un cub de vidre de costat 2 unitats per primera truncament amb vuit cantons tetraèdrics que es toquen els punts mitjans de les arestes del cub. La resta del nucli interior del cub es descarta i reemplaçat per una esfera. Les vuit peces de la cantonada estan ara són tangent a una esfera.
Quin és el diàmetre de l'esfera?.



Solució:
La diagonal del cub és:

$$D=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}\ .$$

Hem de calcular l'altura h de cantó tetraèdric sobre la base que és un triangle equilàter:
El volum del tetraedre és:

$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}1^2\cdot 1=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2 h\ .$$

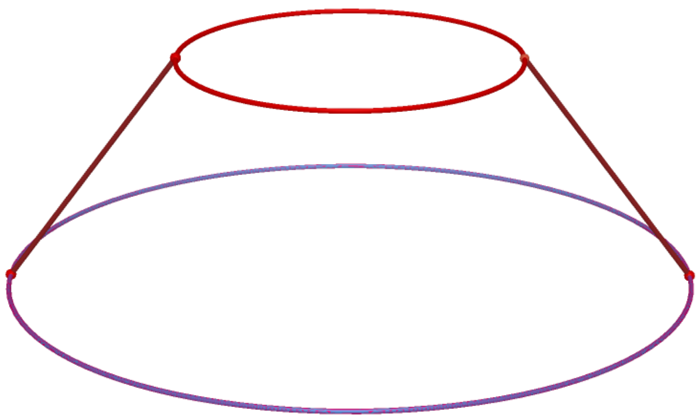
Resolent l'equació:

$$h=\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

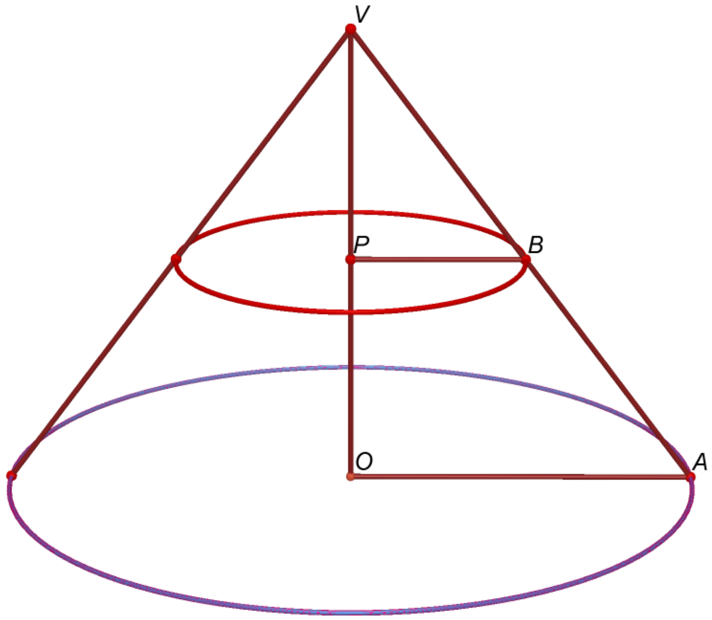
El diàmetre de l'esfera és:

$$d=D-2h=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}\ .$$

1948,. El tronc de con de la figura, està construït a partir del truncament d'un con de radi 6 i altura 8.
Calculeu l'altura del con de tronc si sabem que la seua área lateral és igual a la suma de l'àrea de les bases.



Solució:
Siguen $\overline{OA}=6$ radi con inicial, $\overline{OV}=8$ altura del con inicial.



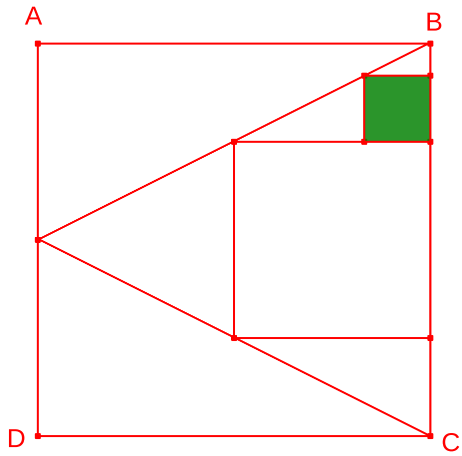
Aplicant el teorema de Pitàgores la generatriu del con inicial és:
$\overline{AV}=10$.

Siga $\overline{BP}=r$ radi de la base menor del con truncat.
Siga $\overline{OP}=h$ altura del con truncat.
Siga $\overline{AB}=g$ generatriu del con truncat.

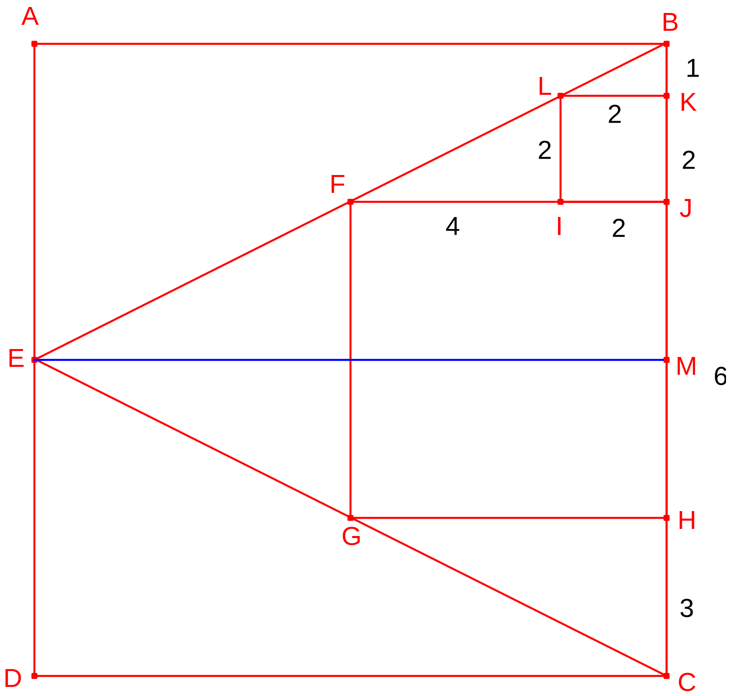
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{VOA}$, $\overset{\Delta}{VPB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{10-g}{r}=\frac{10}{6}$. Aleshores, $g=10-\frac{5}{3}r$.
L'àrea lateral del tronc de con és:
$$S=\pi(6+r)\left(10-\frac{5}{3}r\right).$$
La suma de les àrees de les bases del tronc de con és:
$$S=\pi 6^2+\pi r^2.$$
Igualant les àrees:
$$(6+r)\left(10-\frac{5}{3}r\right)=\left(36+r^2\right).$$
Resolent l'equació:
$r=3$. Aleshores, $g=5$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{VOA}$, $\overset{\Delta}{VPB}$
$$\frac{h}{g}=\frac{8}{10}.$$
Aleshores, $h=4$.

1949.- Quina és la proporció entre l'àrea del quadrat verd i l'àrea del quadrat exterior ABCD.



Solució:

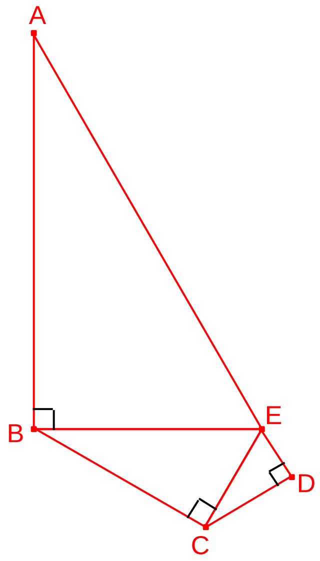


$$\frac{\overline{BM}}{\overline{EM}} = \frac{1}{2}.$$

Siga $\overline{BK} = 1$:

$$\frac{S_{IJKL}}{S_{ABCD}} = \frac{2^2}{12^2} = \frac{1}{36}.$$

1950.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCE}$ i $\overset{\Delta}{CDE}$ són triangles rectangles tal que $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 60^{\circ}$, i $\overline{AE} = 24$.
Determineu el perímetre i l'àrea del quadrilàter ABCD.



Solució:
Notem que $\angle AEB + \angle BEC + \angle CED = 180^{\circ}$, aleshores, A, E i D estan alineats.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{BCE}$ i $\overset{\Delta}{CDE}$:

$\overline{BE} = 12$, $\overline{AB} = 12\sqrt{3}$.

$\overline{CE} = 6$, $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$.

$\overline{DE} = 3$, $\overline{Cd} = 3\sqrt{3}$.

El perímetre del quadrilàter ABCD és:

$P_{ABCD} = \overline{AE} + \overline{DE} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 27 + 21\sqrt{3} \approx 63.37$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és:

$$S_{ABCD} = S_{ABE} + S_{BCE} + S_{CDE} = \frac{1}{2}12^2\sqrt{3} + \frac{1}{2}6^2\sqrt{3} + \frac{1}{2}3^2\sqrt{3} = \frac{189}{2}\sqrt{3} \approx 163.68.$$