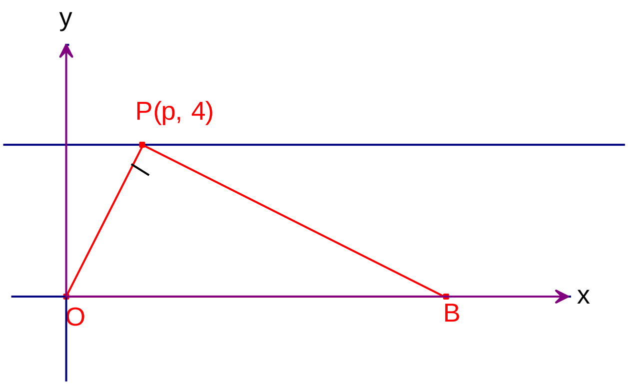
Problemes de Geometria per a l'ESO 196

1951.- En la figura, $O(0,0)$, $B(10,0)$, $P(p,4)$.

Si el triangle $\overset{\Delta}{OPB}$ és rectangle $P=90^{o}$, determineu els valors possibles de p.



Solució:

Siga P' la projecció de P sobre l'eix d'abscisses.

$P'(p,0)$.

$\overline{OP'}=p$, $\overline{P'B}=10-p$. $\overline{PP'}=4$.

Aplicant el teorema de l'altura al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPB}$:

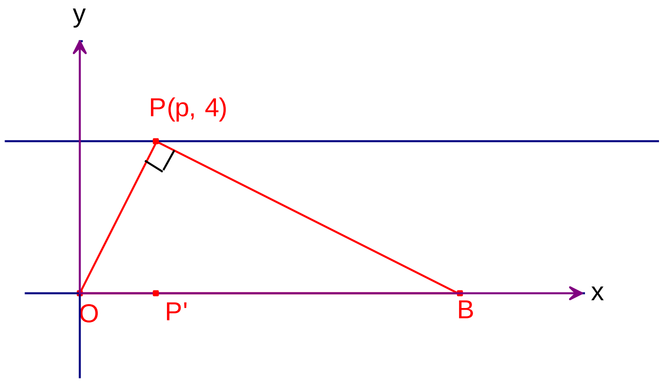
$\overline{OP'}\cdot\overline{BP'}=\overline{PP'}^2$.

$p(10-p)=4^2$.

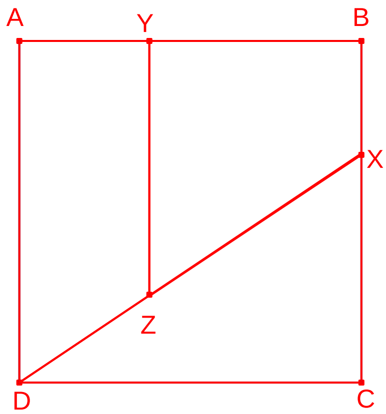
$p^2-10p-16=0$.

Resolent l'equació:

$p=8, 2$.



1952.- El quadrat ABCD de costat 90 cm s'ha dividit en tres parts d'igual àrea (dos trapezis AYZD, YBXZ i un triangle $\overset{\Delta}{DCX}$). Calculeu les mesures dels segments $\overline{CX}$ i $\overline{AY}$.



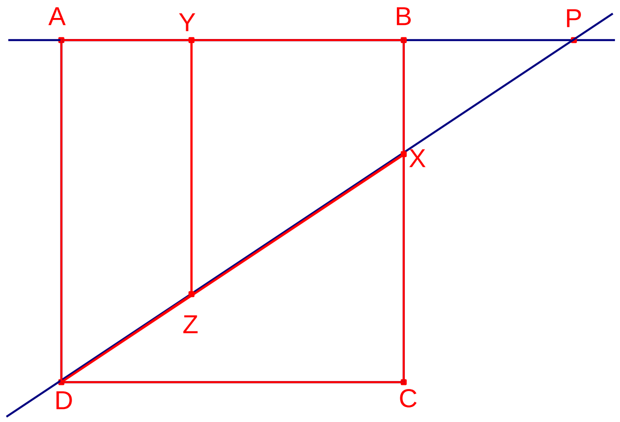
Solució:

L'àrea del quadrat ABCD és:

$S_{ABCD} = 90^2$.

Siga $x = \overline{CX}$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCX}$ és:



$S_{DCX} = \frac{1}{2} 90 \cdot x = \frac{1}{3} 90^2$.

Resolent l'equació:

$x = 60$ cm.

$\overline{BX} = 30$.

Siga P la intersecció de les rectes AB i DX.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCX}$, $\overset{\Delta}{PBX}$ són semblants i de raó 2:1.

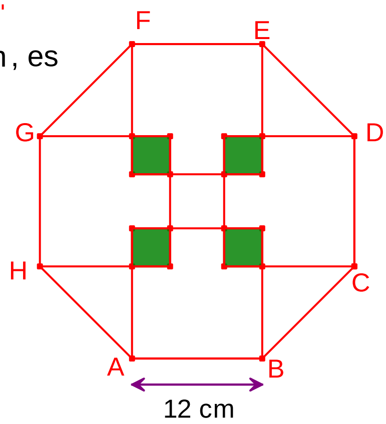
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BP} = 45$.

Siga $y = \overline{AY}$.

$\overline{YB} = 90 - y$, $\overline{YP} = 135 - y$.

1953.- Donat l'octògon regular ABCDEFGH de costat $\overline{AB}=12\text{ cm}$, es dibuixen 4 quadrats sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada (veure figura).



Solució:
L'àrea ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del quadrat KLMN.

$\overline{AN}=\overline{AB}=12$.

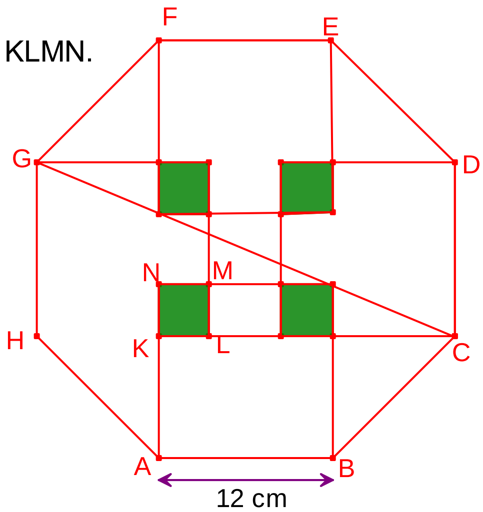
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKH}$:

$\overline{AK}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}=6\sqrt{2}$.

$\overline{KN}=\overline{AN}-\overline{AK}=12-6\sqrt{2}$.

L'àrea de la zona ombrejada:

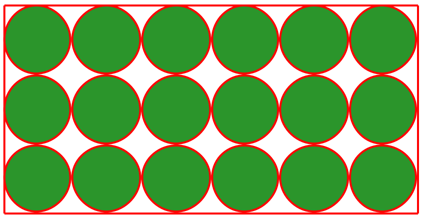
$S_{ombrejada}=4\cdot\overline{KN}^2=4\left(12-6\sqrt{2}\right)^2=864-576\sqrt{2}\approx 49.41\text{ cm}^2$.

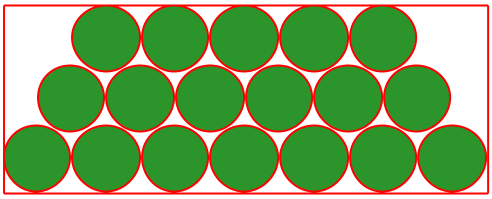


1954.- En aquestes figures, hi ha 18 cilindres en una caixa.
En la de l'esquerra, hi ha un empaquetament quadrat (mireu els centres dels cercles) i en el de la dreta hi ha un empaquetament hexagonal (mireu també els centres.
Si el radi dels cercles és $R = 1\,\text{cm}$.

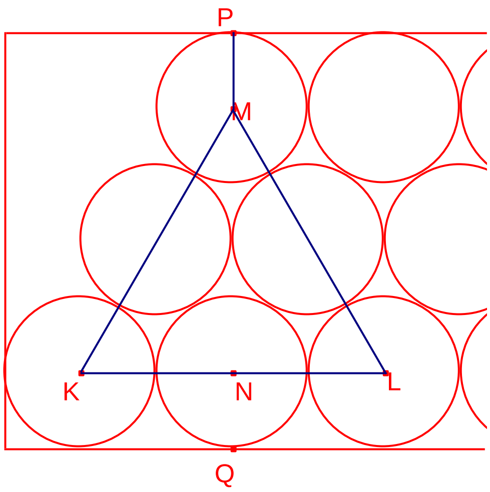
1. Calculeu les mides dels rectangles de cada caixa.
2. Calculeu la relació entre l'àrea dels cercles i la del rectangle de cadascuna de les caixes.

3.- Compara les dues proporcions. En quina s'aprofita millor l'espai.





Solució:
Les mides del rectangle de l'esquerra són:
$12R \times 6R$.



En el rectangle de la dreta $\overline{KL} = 4R$, $\overline{PM} = \overline{QN} = R$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KNM}$:

$$\overline{MN} = 4R\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}R.$$

El llarg del rectangle de la dreta és 14R.

L'ample és $2R + 2\sqrt{3}R$.
L'àrea del rectangle de l'esquerra és:
$S_e = 72R^2$.
L'àrea del rectangle de la dreta és:
$S_d = \left(28 + 28\sqrt{3}\right)R^2$.
L'àrea de 18 cercles de radi R és:
$C_{18} = 18\pi R^2$.
La proporció entre l'àrea dels cercles i la del rectangle de l'esquerra és:

$$p_e = \frac{18\pi R^2}{72R^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

La proporció entre l'àrea dels cercles i la del rectangle de la dreta és:

$$p_d = \frac{18\pi R^2}{\left(28 + 28\sqrt{3}\right)R^2} = \frac{9\pi}{14 + 14\sqrt{3}} \approx 0.7392.$$

L'empaquetament de l'esquerra aprofita millor l'espai.

1955.- Determineu tots els valors de k per als quals la circumferència d'equació $x^2 + y^2 = k^2$ i la circumferència d'equació $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 49$ es tallen exactament en un punt.
Crux Mathematicorum CC285

Solució:
La circumferència $x^2 + y^2 = k^2$ té centre $O_1(0, 0)$ i radi $|k|$.

La circumferència $(x-5)^2 + (y+12)^2 = 49$ té centre $O_2(5, -12)$ i radi 7.

Dues circumferències que es tallen en un punt són tangents..
Les dues circumferències són tangents exteriors si:

$\overline{O_1O_2} = |k| + 7$.

$\overline{O_1O_2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

$|k| + 7 = 13$.

$|k| = 6$.

$k = 6, -6$.

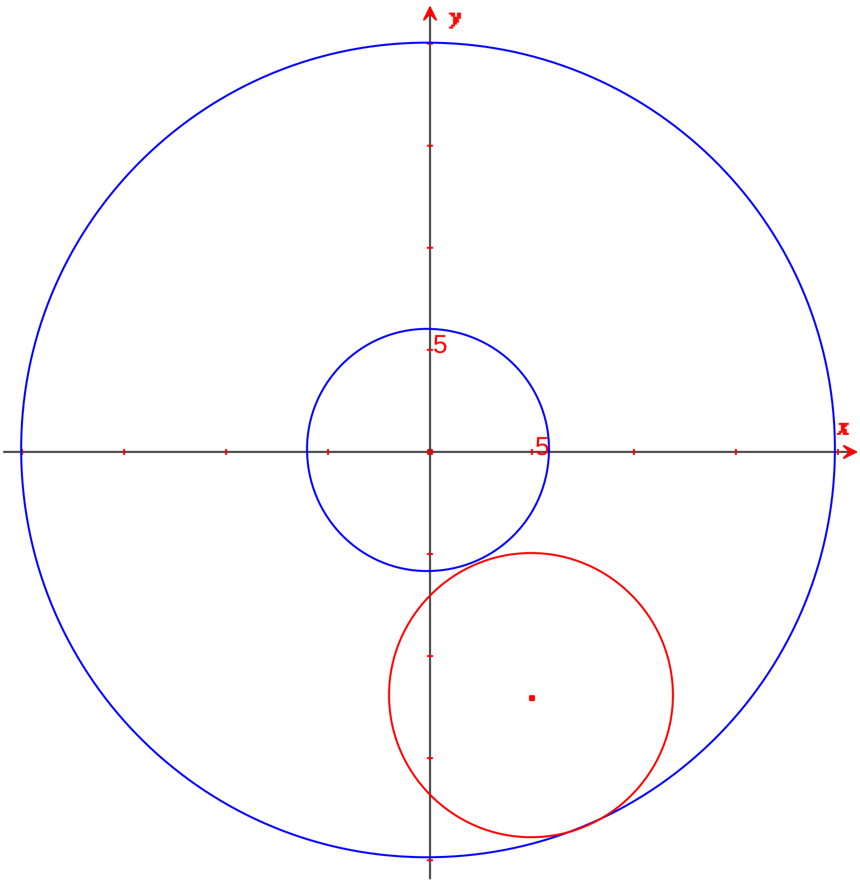
Les dues circumferències són tangents interiors si:

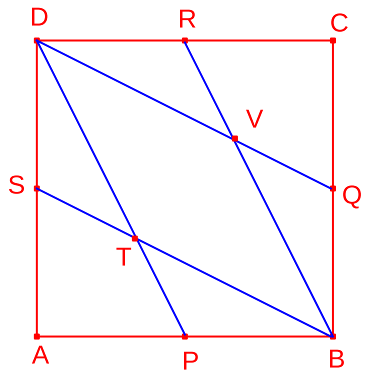
$\overline{O_1O_2} = ||k| - 7|$.

$||k| - 7| = 13$.

$|k| = 20$.

$k = 20, -20$.





1956.- Siguen P, Q, R, i S els punts migs dels costats del quadrat ABCD.

Siga T la intersecció dels segments $\overline{BS}$ i $\overline{DP}$.

Siga V la intersecció dels segments $\overline{BR}$ i $\overline{DQ}$.

Proveu que $\overline{AT} = \overline{TV}$.

KöMaL, K557.

Solució:

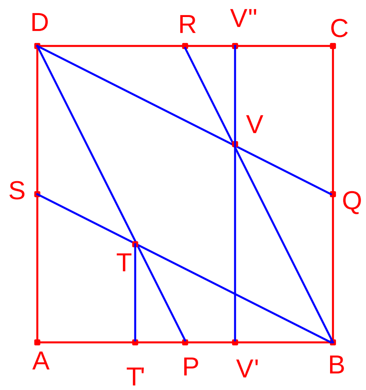
Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat ABCD.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{ADP}$ són iguals.

Aleshores, $\angle ASB = \angle APD$, $\angle ABS = \angle ADP$

Per tant, $\angle DPB = \angle BSD$

$\overline{DS} = \overline{BP} = \frac{1}{2}c$.



Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{PBT}$, $\overset{\Delta}{SDT}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{ST} = \overline{PT}$.

Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{APT}$, $\overset{\Delta}{AST}$ són iguals.

Aleshores, $\angle PAT = \angle SAT = 45^{o}$.

Aleshores, T pertany a la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat ABCD.

Anàlogament, V pertany a la diagonal $\overline{AC}$ del quadrat ABCD.

Siga T' la projecció de T sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga V' la projecció de V sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga $x = \overline{AT'}$

$\overline{TT'} = \overline{AT'} = x$.

$\overline{BV'} = \overline{AT'} = x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PBR}$, $\overset{\Delta}{V'BV}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{VV'} = 2 \cdot \overline{BV'} = 2x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AT'T}$, $\overset{\Delta}{AV'V}$ són semblants.

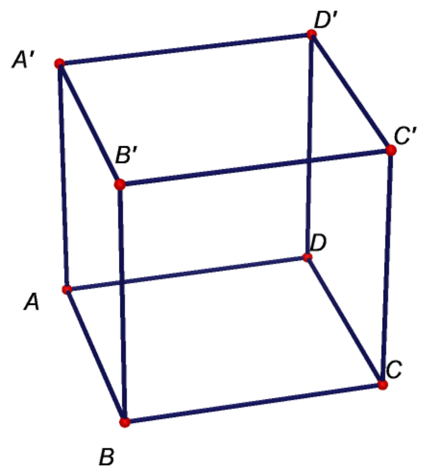
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{AV'} = 2 \cdot \overline{AT}$.

Aleshores, $\overline{AT} = \overline{TV}$.

Notem que els punts T, V divideixen la diagonal $\overline{AC}$ en tres parts iguals.

1957.- Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta 1.
Siguen M i N les projeccions de D' i B sobre la diagonal $\overline{B'D}$.
Determineu l'àrea del quadrilàter BND'M.
KöMaL, C1440.



Solució:

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{BB'D}$.

$\overline{B'D} = \sqrt{3}$, $\overline{BD} = \sqrt{2}$, $\overline{BB'} = 1$.

Siga $\overline{B'N} = x$. Siga $\overline{BN} = h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{BB'D}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNB'}$:

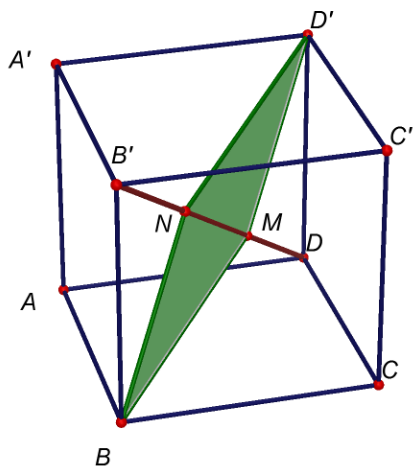
$x^2 + h^2 = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BND}$:

$\left(\sqrt{3} - x\right)^2 + h^2 = 1$.

Resolent el sistema format per les dues expressions:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ h = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases}.$$

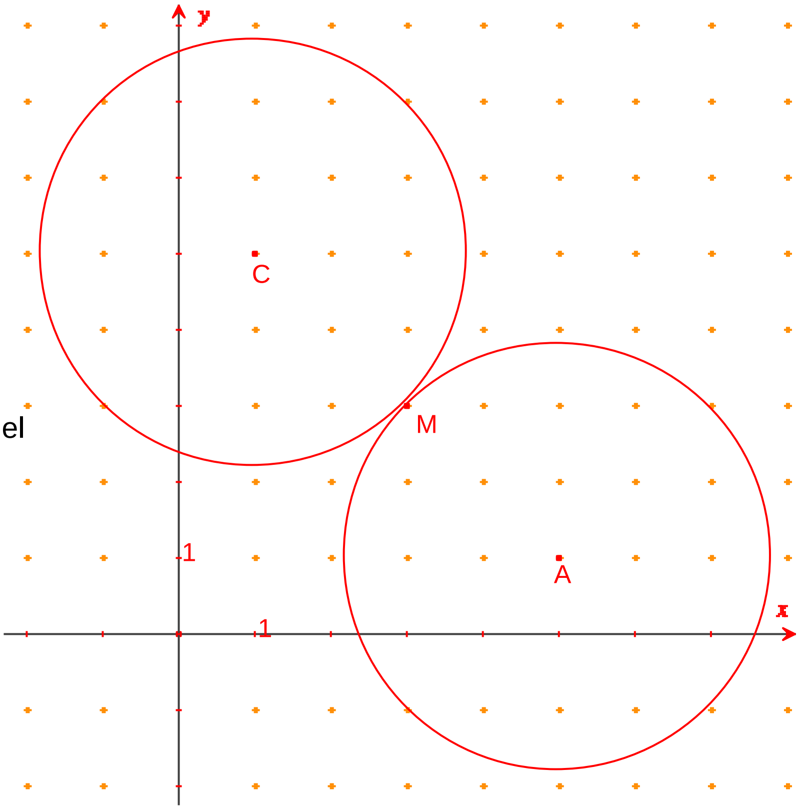


$$\overline{MN} = \overline{B'D} - 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

L'àrea del quadrilàter BND'M és igual al doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BMN}$:

$$S_{BND'M} = \overline{MN} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

1958.- Determineu el valor de c a fi que el sistema $\begin{cases}(x-5)^2+(y-1)^2=c\\(x-1)^2+(y-5)^2=c\end{cases}$.



Solució 1:
La primera equació és una circumferència de centre $A(5,1)$ i radi $\sqrt{c}$.
La segona equació és una circumferència de centre $B(1,5)$ i radi $\sqrt{c}$.
Les dues circumferències tenen el mateix radi. A fi que tinguen solució única han de ser tangents exterior si el punt de tangència és el punt mig del segment que uneix els centres $\overline{AB}$.
Aleshores els radis són

$$r=\sqrt{c}=\frac{4\sqrt{2}}{2}.$$

Aleshores, $c=8$.

Solució 2:
Resolem el sistema

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-1)^2=c\\(x-1)^2+(y-5)^2=c\end{cases}.$$

$\begin{cases}x^2+y^2-10x-2y+26=c\\x^2+y^2-2x-10y+26=c\end{cases}$. Restant ambdues equacions:

$$\begin{cases}x^2+y^2-10x-2y+26=c\\x=y\end{cases}$$

Substituint la segona equació en la primera:

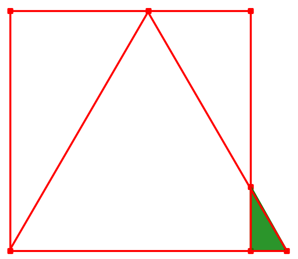
$$2x^2-12x+26-c=0.$$

Aquesta equació té solució única si el seu discriminant és zero:

$$144-8(26-c)=0.$$

Resolent l'equació, $c=8$.

1959.- Si el costat del triangle equilàter té longitud 2, determineu les dimensions del triangle ombrejat exterior al quadrat. Calculeu la seua àrea.

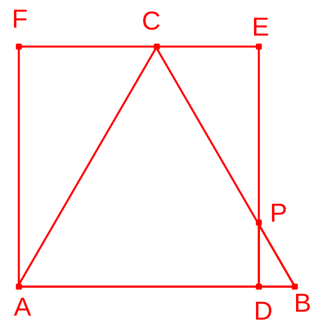


Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ el triangle equilàter de costat $\overline{AB} = 2$.
Siga el quadrat ADEF.

$\overline{CF} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 1.$

$\overline{AF} = \overline{AD} = \sqrt{3}$.



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DBP}$ exterior al quadrat.

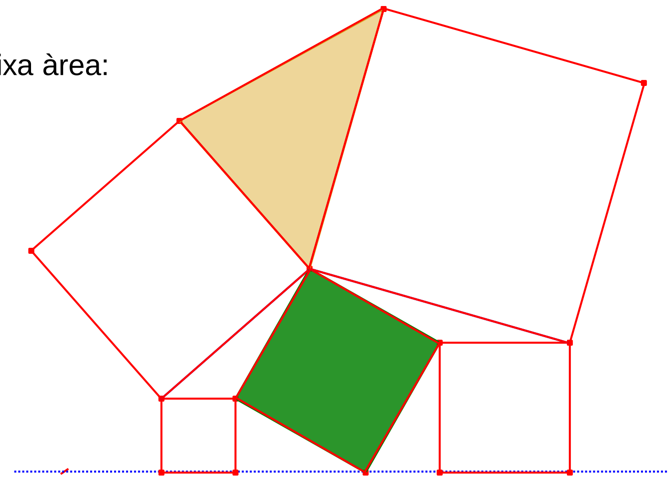
$\overline{DB} = 2 - \sqrt{3}$.

$\overline{BP} = 2 \cdot \overline{DB} = 4 - 2\sqrt{3}$.

$\overline{DP} = \overline{DB} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3.$

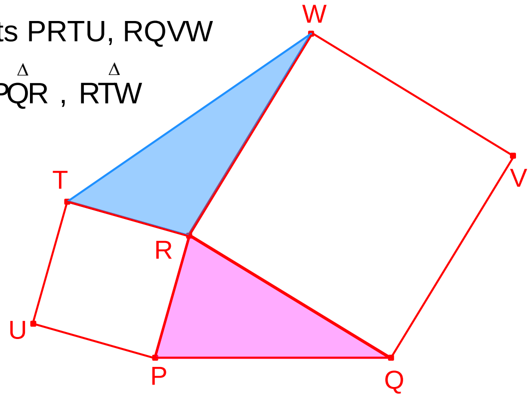
$S_{DBP} = \frac{1}{2}\overline{DB} \cdot \overline{DP} = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3} - 3\right) = \frac{7\sqrt{3} - 12}{2}$.

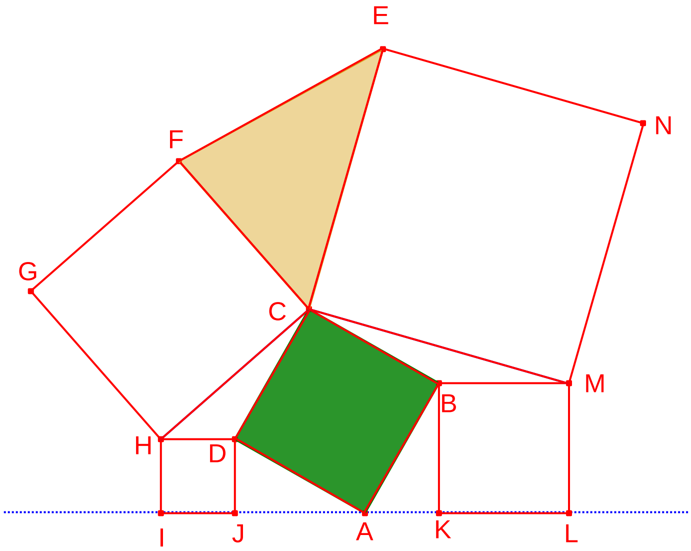
1960.- En la figura, hi ha cinc quadrats.
Proveu que les figures ombrejades tenen la mateixa àrea:



Solució:
Nota:

Siga un triangle qualsevol $\overset{\Delta}{PQR}$ si dibuixem els quadrats PRTU, RQVW exteriors al triangle, aleshores les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{RTW}$ són iguals.





Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJD}$, $\overset{\Delta}{BKA}$ són iguals.

Siga $\overline{IJ} = \overline{AK} = x$, $\overline{AJ} = \overline{BK} = y$.

L'àrea del quadrat IJDH és x^2. L'àrea del quadrat KLMB és y^2.

L'àrea del quadrat ABCD és $x^2 + y^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AJD}$ és $S = \frac{1}{2}xy$.

Per la nota les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AJD}$, $\overset{\Delta}{HDC}$ són iguals

Per la nota les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BKA}$, $\overset{\Delta}{BMC}$ són iguals

L'àrea del pentàgon ILMCH és: $S_{ILMCH} = 2(x^2 + y^2) + 2xy$.

L'àrea del trapezi ILMH és: $S_{ILMH} = (x + y)^2$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{HMC}$ és: $S_{HMC} = S_{ILMCH} - S_{ILMH} = x^2 + y^2 = S_{ABCD}$.

Aplicant la nota: $S_{CEF} = S_{HMC} = S_{ABCD}$.