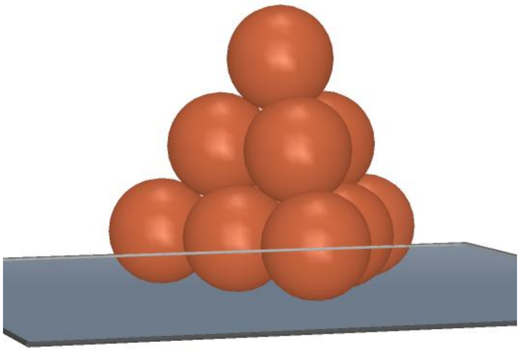
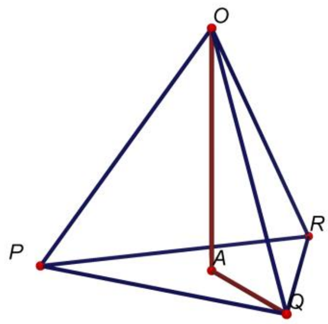
Problemes de Geometria per a l'ESO 197

1961.- Hem col·locat deu esferes apilades d'igual radi r en una superfície plana. Calculeu la distància del punt més alt de l'apilament al plànol.



Solució.
Els centres de les quatre esferes vèrtexs de l'apilament són els vèrtexs d'un tetraedre regular d'arestes 4r.
La distància del punt més alt al plànol tangent a les tres esferes és igual a 2r més l'altura del tetraedre regular d'aresta 4r.



Siguen P, Q, R els centres de les esferes tangents a la superfície plana.
$\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{PR} = 4r$.
Siga O el centre de l'esfera superior.
Siga A el centre de la cara PQR.
$\overline{QR} = \frac{2}{3} 2\sqrt{3}\, r$.
$\overline{OQ} = 4r$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAQ}$, l'altura del tetraedre regular és:

$$\overline{OA} = \sqrt{(4r)^2 - \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}r\right)^2} = r\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{4r}{3}\sqrt{6}.$$

La distància del punt més alt a la superfície plana és:

$$4r + \overline{OA} = \left(2 + \frac{4\sqrt{6}}{3}\right) r.$$

Generalització:
Hem col·locat n files d'esferes apilades d'igual radi r en una superfície plana. Calculeu la distància del punt més alt de l'apilament al plànol.

Solució:

$$d = \left(2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}(n-1)\right) r.$$

1962.-

a) Proveu que $\sin 2A = \frac{2\mathrm{tg}A}{1+\mathrm{tg}^2 A}$, quan $0 \le A < \frac{\pi}{2}$.

b) Si $\sin 2A = \frac{4}{5}$, calculeu $\mathrm{tg}A$.

Crux Mathematicorum CC294.

Solució:

a)

Siga $0 \le A < \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{2\mathrm{tg}A}{1+\mathrm{tg}^2 A} = \frac{2\frac{\sin A}{\cos A}}{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A}} = 2\sin A \cdot \cos A = \sin 2A.$$

b)

Si $\sin 2A = \frac{4}{5}$, aplicant la igualtat de l'apartat a):

$$\sin 2A = \frac{2\mathrm{tg}A}{1+\mathrm{tg}^2 A} = \frac{4}{5}.$$

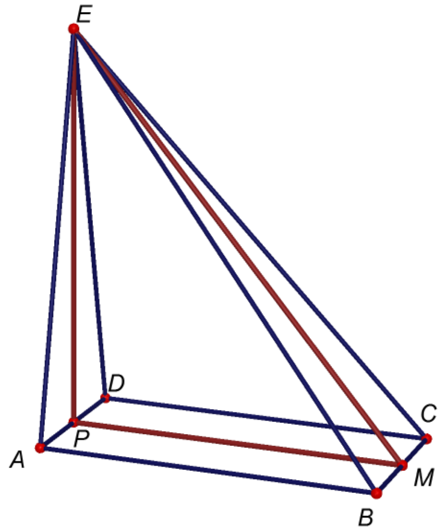
$$\frac{\mathrm{tg}A}{1+\mathrm{tg}^2 A} = \frac{2}{5}.$$

$$2\mathrm{tg}^2 A - 5\mathrm{tg}A + 2 = 0.$$

Aleshores, $\mathrm{tg}A = 2$, o bé $\mathrm{tg}A = \frac{1}{2}$.

1963.- Una piràmide de base rectangular de costats de la base 6 i 12 i altura 14, té el seu vèrtex en la mediatriu del costat menor de la base i és perpendicular al plànol d'aquesta. Calculeu l'àrea total de la piràmide.

Solució:



Siga ABCDE la piràmide de base el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=\overline{CD}=12$, $\overline{AD}=\overline{BC}=3$.

Siga P el punt mig del costat $\overline{AD}$.

$\overline{PE}=14$ altura de la piràmide.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPM}$:

$\overline{EM}=\sqrt{14^2+12^2}=2\sqrt{85}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPA}$:

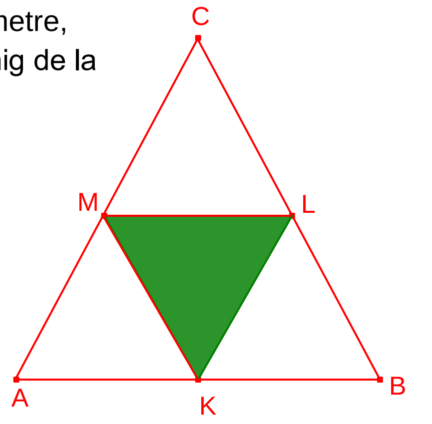
$\overline{EA}=\sqrt{3^2+14^2}=\sqrt{205}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{EAB}$ és rectangle.

L'àrea total de la piràmide és:

$$S=S_{ABCD}+S_{ADE}+2\cdot S_{EAB}+S_{BCE}.$$

$$S=6\cdot 12+\frac{1}{2}6\cdot 14+2\cdot\frac{1}{2}12\sqrt{205}+\frac{1}{2}6\cdot 2\sqrt{85}\approx 341.13 .$$

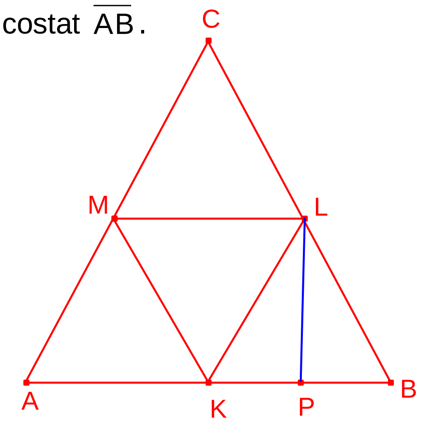


1964.- Donat un triangle isòsceles de base 16 cm i 50 cm de perímetre, s'inscriu un triangle equilàter del qual, un dels vèrtexs és el punt mig de la base del triangle.
Calculeu l'àrea del triangle equilàter.

Solució:

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ de base $\overline{AB} = 16$.

$\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{50-16}{2} = 17$.



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$ de costat $\overline{KL} = c$ i vèrtex K sobre el costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKC}$:

$\overline{CK} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

Siga P la projecció de L sobre el costat $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPL}$:

$\overline{PL} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{MLC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

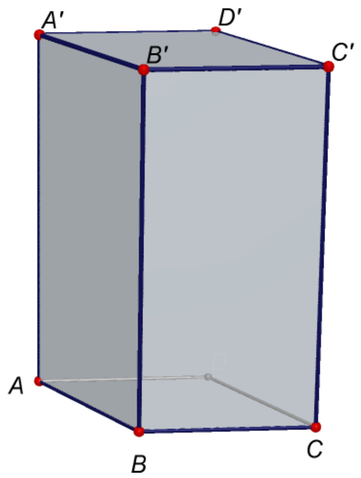
$\frac{c}{16} = \frac{15 - \frac{\sqrt{3}}{2}c}{15}$. Resolent l'equació:

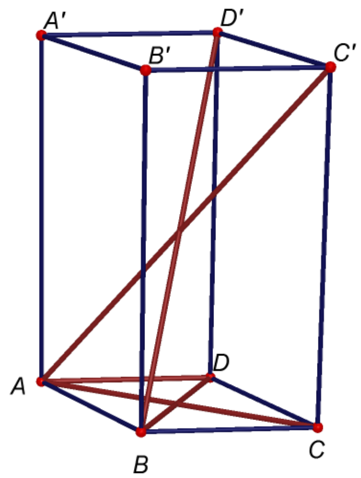
$c = \frac{240}{15 + 8\sqrt{3}} = \frac{80\left(15 - 8\sqrt{3}\right)}{11}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$ és:

$S_{KLM} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{-115200 + 667200\sqrt{3}}{121} \approx 29.95\,cm^2$.

1965.- La base d'un paral·lelepípede recte és un rombe de costat 12 cm.
Un dels angles de la base mesura 120º i l'aresta lateral 25 cm.
Calculeu la longitud de les diagonals, l'àrea total i el volum del paral·lelepípede.





Solució:
Siga ABCDA'B'C'D' el paral·lelepípede recte de base el rombe ABCD $\overline{AB}=12$, $B=D=120º$, $A=C=60º$ i aresta lateral $\overline{AA'}=25$.

$\overline{AC}=12\sqrt{3}$, $\overline{BD}=12$.

$S_{ABCD}=\frac{12\cdot 12\sqrt{3}}{2}=72\sqrt{3}\approx 124.71\text{cm}^2$.

El volum del paral·lelepípede és:

$V=S_{ABCD}\cdot\overline{AA'}=25\cdot 72\sqrt{3}=1800\sqrt{3}\approx 3117.69\,\text{cm}^3$.

L'àrea total del paral·lelepípede és:

$S=2\cdot S_{ABCD}+4\cdot S_{ABB'A'}=2\cdot 72\sqrt{3}+4\cdot 12\cdot 25=1200+144\sqrt{3}\approx 1449.42\,\text{cm}^2$.

Siguen $\overline{AC'}$ la diagonal major, $\overline{BD'}$ la diagonal menor.

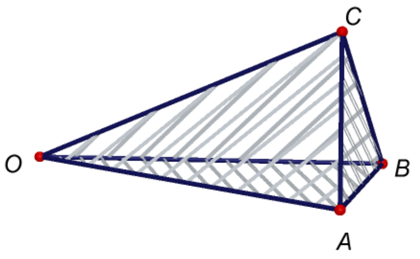
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC'}=\sqrt{\left(12\sqrt{3}\right)^2+25^2}=\sqrt{1057}\approx 32.51\text{cm}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDD'}$:

$\overline{BD'}=\sqrt{12^2+25^2}=\sqrt{769}\approx 27.73\,\text{cm}$.

1966.- El vèrtex O d'un tríedre es forma amb tres cares iguals a 30º i les tres arestes que ixen d'aquest vèrtex tenen la mateixa longitud 12 cm.
Calculeu el volum i l'àrea total del tetraedre que es forma.

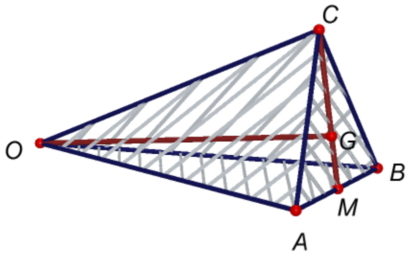


Solució:
Les tres cares que formen el tríedre de vèrtex O són triangles isòsceles, aleshores el tetraedre de base el $\overset{\Delta}{ABC}$ és recte. A més a més, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$$\overline{AB}^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cdot \cos 30^o .$$

$$\overline{AB}^2 = 144\left(2 - \sqrt{3}\right).$$



L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2 = 36\left(-3 + 2\sqrt{3}\right).$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}12 \cdot 12 \cdot \sin 30^o = 36 .$$

L'àrea total del tetraedre OABC és:

$$S = S_{ABC} + 3 \cdot S_{OAB} = 36\left(-3 + 2\sqrt{3}\right) + 3 \cdot 36 = 72\sqrt{3} \approx 124.71 cm^2 .$$

La projecció del vèrtex O sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és el baricentre G del triangle equilàter.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB} = 6\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} .$$

Aplicant la propietat del baricentre:

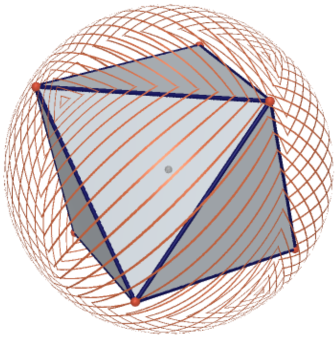
$$\overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CM} = 4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPC}$:

$$\overline{OP} = \sqrt{12^2 - \left(4\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}\right)^2} = 4\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} .$$

El volum del tetraedre és:

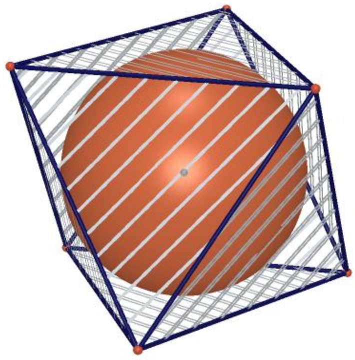
$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{OP} = \frac{1}{3}36\left(-3 + 2\sqrt{3}\right)4\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} = 48\left(-3 + 2\sqrt{3}\right)\sqrt{3 + 3\sqrt{3}} \approx 63.78\, cm^3 .$$



1967.- L'aresta d'un octaedre regular mesura10 cm.
Calculeu l'àrea de l'esfera circumscrita a l'octaedre.

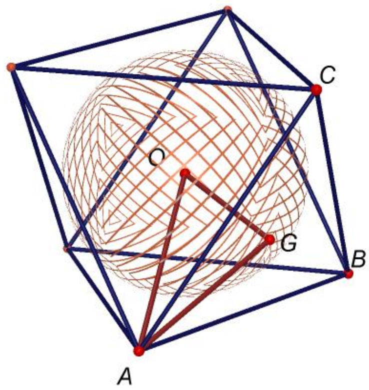
Solució:
4 vèrtexs de l'octaedre que formen un plànol, determinen un quadrat de costat 10.
La diagonal d'aquest quadrat és igual al diàmetre de l'esfera circumscrita.
Aleshores el radi de l'esfera és:
$R = 5\sqrt{2}$.
L'àrea de l'esfera circumscrita a l'octaedre és:
$S = 4\pi R^2 = 200\pi \approx 628.32\,\text{cm}^2$.

1968.- L'aresta d'un octaedre regular mesura 12 cm.
Calculeu l'àrea de l'esfera inscrita a l'octaedre.



Solució:
4 vèrtexs de l'octaedre que formen un plànol, determinen un quadrat de costat 12.
El centre O d'aquest quadrat és el centre de l'esfera inscrita i circumscrita a l'octaedre.
La diagonal d'aquest quadrat és igual al diàmetre de l'esfera circumscrita.
Aleshores el radi de l'esfera circumscrita és:

$R = \overline{OA} = 6\sqrt{2}$.



Considerem la cara $\overset{\Delta}{ABC}$ de l'octaedre regular.

La projecció del centre O sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$ és el baricentre G del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

El radi de l'esfera inscrita a l'octaedre és $r = \overline{OG}$

$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB} = 4\sqrt{3}$.

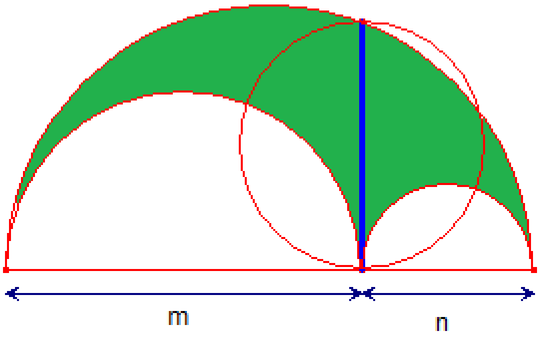
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGO}$:

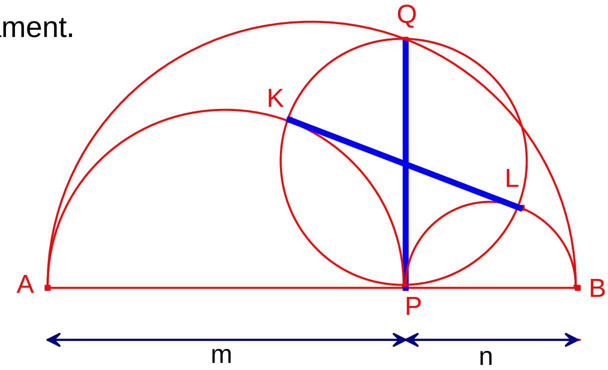
$r = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{6}$.

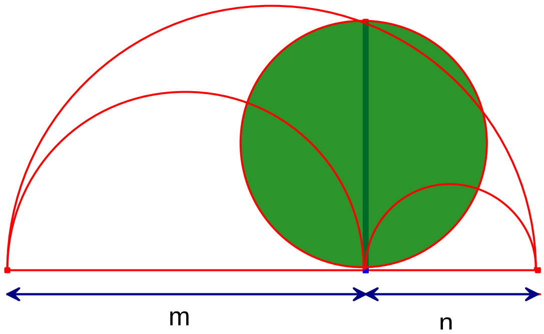
L'àrea de l'esfera inscrita a l'octaedre és:

$S = 4\pi r^2 = 96\pi \approx 3018.59 cm^2$.

1969.- En una semicircumferència de diàmetre $m+n$ tracem dues semicircumferències els diàmetres de les quals és m i n, respectivament.
a) Demostreu que l'àrea afitada per les tres semicircumferències és igual a l'àrea del cercle el diàmetre del qual és igual al segment $\overline{PQ}$.
b) El diàmetre $\overline{PQ}$ és iguals al segment de tangència $\overline{KL}$ entre les semicircumferències de diàmetres m i n, respectivament.







Solució:
a)
L'àrea afitada per les tres semicircumferències és igual a l'àrea de la semicircumferència de diàmetre $m+n$ menys la suma de les àrees de les semicircumferències de radis m i n (aquesta superfície s'anomena **arbelo**):

$$S=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\pi\left(\frac{m}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)=\frac{\pi}{4}mn\ .$$

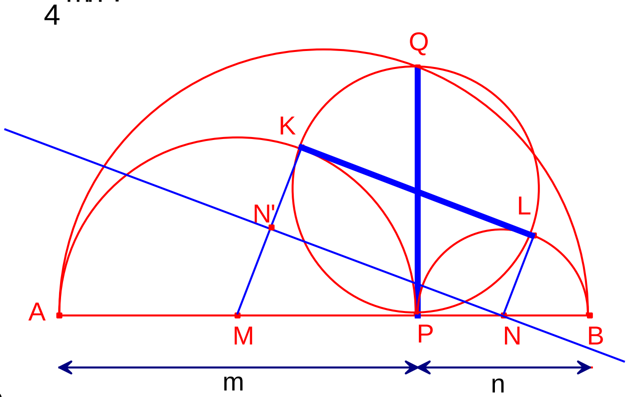
El triangle $\overset{\Delta}{ABQ}$ és rectangle en Q ja que abraça un diàmetre.

$\overline{PQ}$ és altura del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABQ}$.
Aplicant el teorema de l'altura:

$\overline{PQ}^2=mn$. $\overline{PQ}=\sqrt{mn}$.

L'àrea del cercle de diàmetre $\overline{PQ}$ és: $S_c=\pi\left(\frac{\sqrt{mn}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}mn$.

$\overline{PQ}$ és mitjana geomètrica dels diàmetres m, n.
b)
Siguen M i N els centres de les semicircumferències de diàmetres m, n, respectivament.
Siga N' La projecció de N sobre el radi $\overline{MK}$.



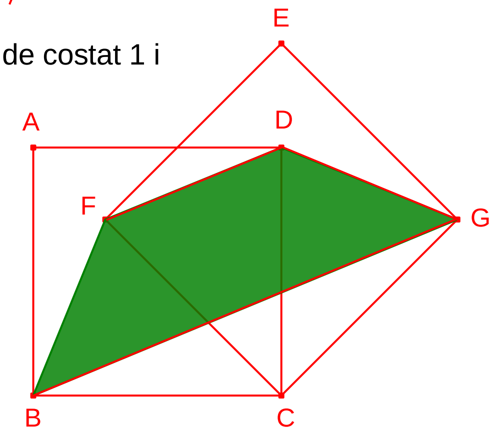
$\overline{MN}=\frac{m+n}{2}$, $\overline{MN'}=\frac{m-n}{2}$, $\overline{KL}=\overline{NN'}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MN'N}$:

$$\overline{KL}=\sqrt{\overline{MN}^2-\overline{MN'}^2}=\sqrt{\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}=\sqrt{mn}=\overline{PQ}\ .$$

1970.- En la figura, ABCD, FCGE són dos quadrats de costat 1 i $\angle BCF = 45^o$.

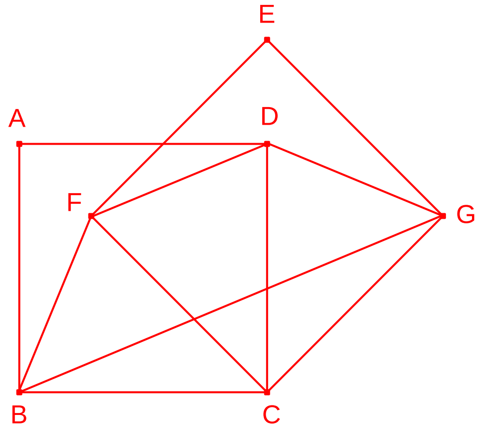
Calculeu l'àrea del trapezi FBGD.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle isòsceles $\overset{\Delta}{FCG}$:

$\overline{FG} = \sqrt{2}$.



$$S_{FBGD} = S_{FGD} + S_{FGB} = \frac{1}{2}\overline{FG}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$