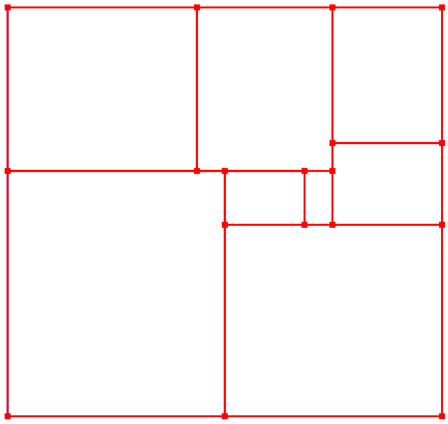
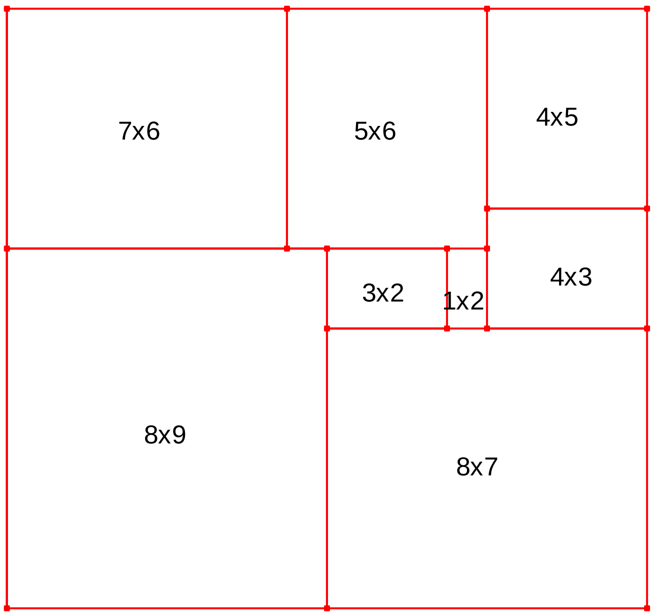
Problemes de Geometria per a l'ESO 198

1971.- En la figura el rectangle exterior de dimensions $n\times(n+1)$ s'ha dividit en vuit rectangles $k\times(k+1)$ on n i k són nombres naturals amb valors entre 1 i 8 inclusius.
Determineu el valor de n.
UKMT, 2017 Senior, problema 9.

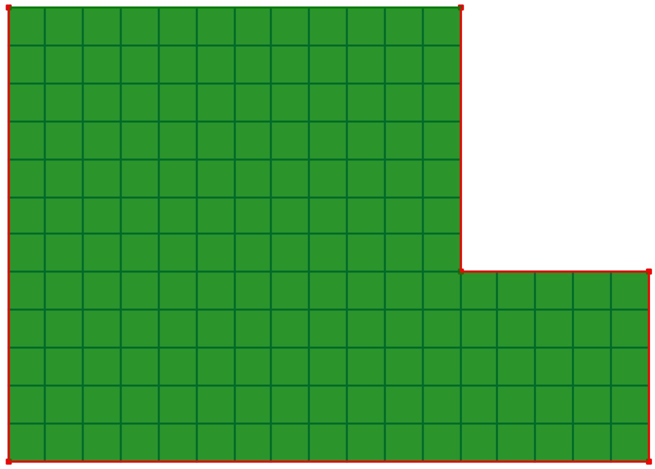


Solució:

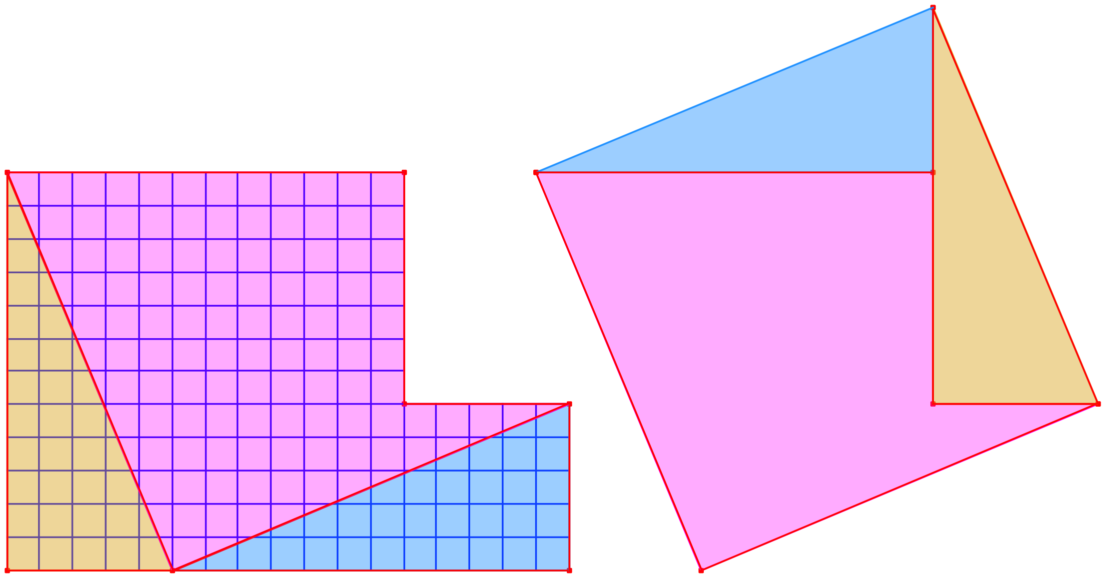


El rectangle exterior és de dimensions larg 16, ample 15.
Aleshores, $n=15$.

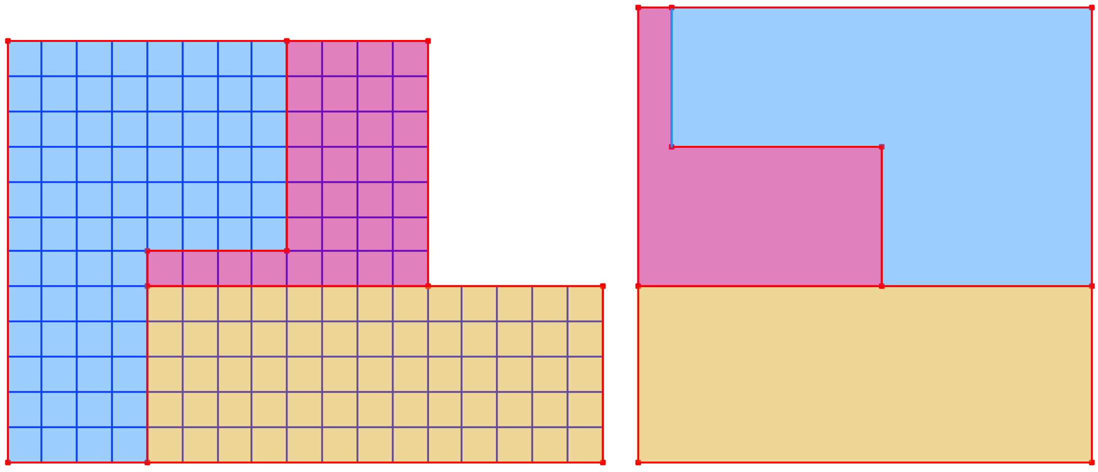
1972.- Dividiu la figura en tres parts amb les quals es puga construir un quadrat.



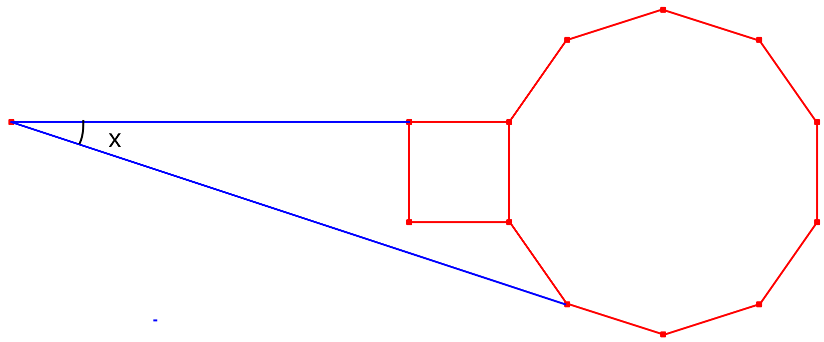
Solució1:



Solució 2:

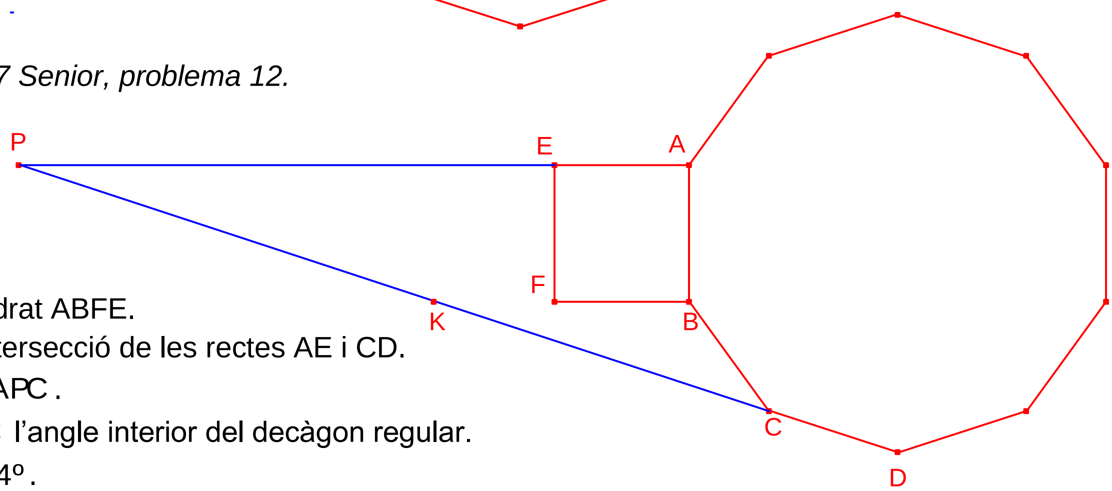


1973.- En la figura, un decàgon regular i un quadrat tenen un costat comú.
Les extensions d'un costat del quadrat i del costat del decàgon formen un angle x.
Calculeu la mesura x de l'angle.



UKMT, 2017 Senior, problema 12.

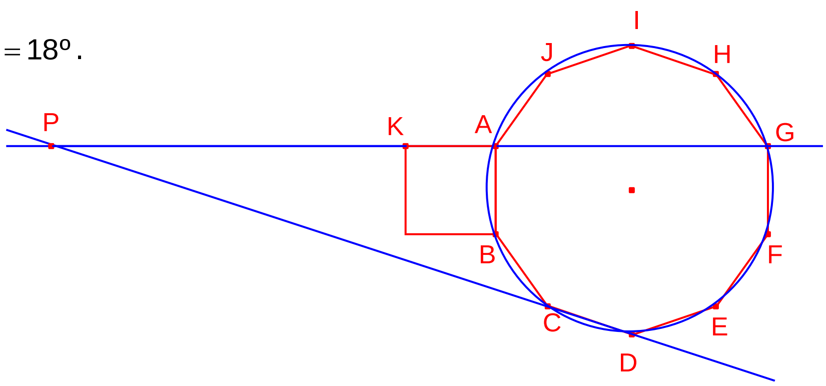
Solució 1:



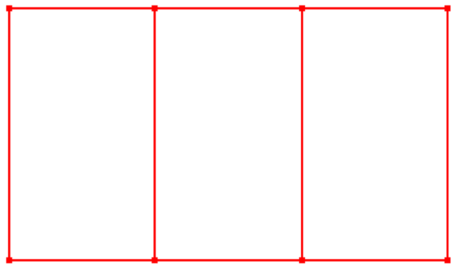
Siga el quadrat ABFE.
Siga P la intersecció de les rectes AE i CD.
Siga $x = \angle APC$.
Siga $\angle ABC$ l'angle interior del decàgon regular.
$\angle ABC = 144^{o}$.
L'angle exterior del decàgon és $\angle BCP = 36^{o}$.
La recta BF talla la recta CD en el punt K.
$\angle FBC = 360^{o} – (\angle ABF + \angle ABC) = 360^{o} – (90^{o} + 144^{o}) = 126^{o}$.
$\angle BKP = \angle FBK + \angle BCP = 162^{o}$.
$x = 360^{o} – (\angle BKF + KFE + \angle FEP) = 360^{o} – (162^{o} + 90^{o} + 90^{o}) = 18^{o}$.

Solució 2:
Siga P la intersecció de les rectes AK i CD.
La recta que conte el costat $\overline{AK}$ del quadrat passa pel vèrtex G del decàgon.
Considerem la circumferència circumscrita al decàgon regular.
L'angle $x = \angle APC$ és exterior a la circumferència circumscrita.

$$x = \frac{\overset{\frown}{DG} - \overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{3\frac{360^{o}}{10} - 2\frac{360^{o}}{10}}{2} = 18^{o}.$$



1974.- Un rectangle està dividit en tres rectangles iguals.
Si cada rectangle menut és semblants al triangle exterior, determineu la proporció entre el costat gran i el menut de cada rectangle.
UKMT, 2017 Senior, problema 10.



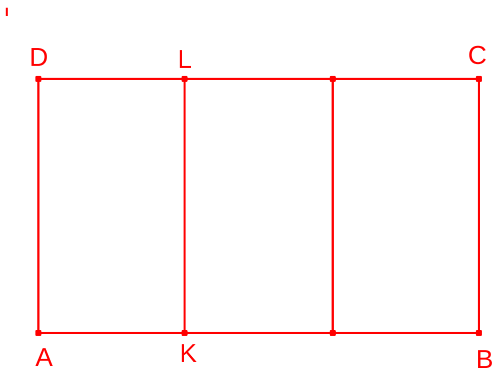
Solució:
Siga ABCD el rectangle exterior.
Siga AKLD un dels tres rectangles iguals.
Siga $\overline{AK}=x$, $\overline{AD}=y$.

$\overline{AB}=3x$.

Els rectangles ABCD, ADLK són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

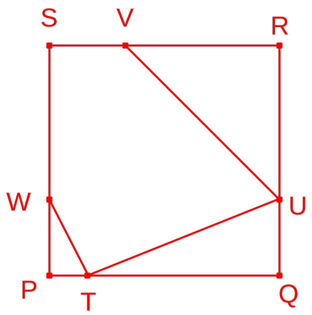
$$\frac{3x}{y}=\frac{y}{x}.$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=3.$$



Aleshores, la proporció entre el costat gran i el menut del rectangle és:

$$\frac{y}{x}=\sqrt{3}.$$

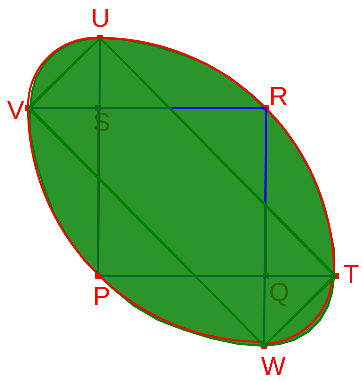


1975.- En la figura PQRS és un quadrat.
Els punts T, U, V, W pertanyen als costats del quadrat de forma que $\overline{PT}=1$, $\overline{QU}=2$, $\overline{RV}=3$ i $\overline{SW}=4$. Si l'àrea del quadrilàter TUVW és la meitat de l'àrea del quadrat PQRS, determineu la mesura del costat $\overline{PQ}$.
UKMT, 2017 Senior, problema 15.

Solució:
Siga $\overline{PQ}=x$.
$\overline{TQ}=x-1$, $\overline{UR}=x-2$, $\overline{VS}=x-3$, $\overline{WP}=x-4$.
L'àrea del quadrilàter TUVW és la meitat de l'àrea del quadrat PQRS, aleshores la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PTW}$, $\overset{\Delta}{TQU}$, $\overset{\Delta}{URV}$ i $\overset{\Delta}{VSW}$ és igual a la meitat de l'àrea del quadrat PQRS:
$$\frac{x-4}{2}+\frac{2(x-1)}{2}+\frac{(x-2)3}{2}+\frac{(x-3)4}{2}=\frac{1}{2}x^2.$$
Simplificant:
$x^2-10x+24=0$.
Resolent l'equació $x=6, 4$.
La solució $x=4$ no és vàlida ja que $x-4>0$.

1976.- En la figura, PQRS és un quadrat de costat 1.
Hi ha dibuixats 4 arcs que són quadrats de circumferència.

L'arc $\overset{\frown}{TRU}$ té centre P, L'arc $\overset{\frown}{VPW}$ té centre R, l'arc $\overset{\frown}{UV}$ té centre S i l'arc $\overset{\frown}{WT}$ té centre Q.
Calculeu el perímetre de la zona ombrejada.
UKMT, 2017 Senior, problema 20.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$:

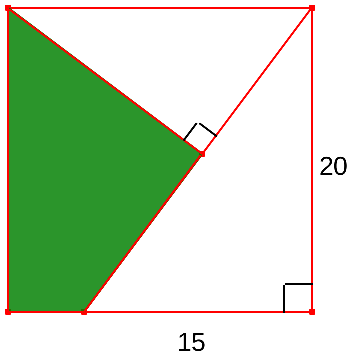
$\overline{PR} = \overline{PU} = \sqrt{2}$.

$\overline{SU} = \overline{PU} - \overline{PS} = \sqrt{2} - 1$.

El perímetre de la zona ombrejada és igual a la longitud d'una semicircumferència de radi $\overline{PR} = \sqrt{2}$, més la longitud d'una semicircumferència de radi $\overline{SU} = \sqrt{2} - 1$:

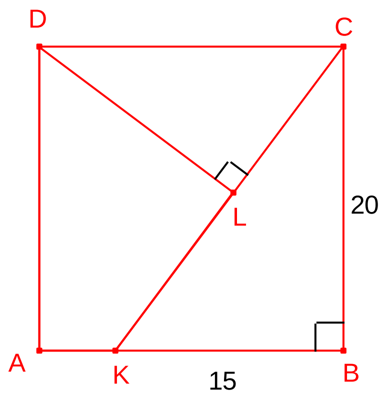
$$p = \frac{1}{2}\left(2\pi\sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\left(2\pi\left(\sqrt{2} - 1\right)\right) = \left(2\sqrt{2} - 1\right)\pi \approx 5.74 .$$

1977.- La figura esta formada per dos triangles rectangles en l'interior un quadrat.
Els catets del triangle rectangle gran són 15 i 20.
Determineu l'àrea del quadrilàter ombrejat.
UKMT, 2017 Senior, problema 16.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat 20.

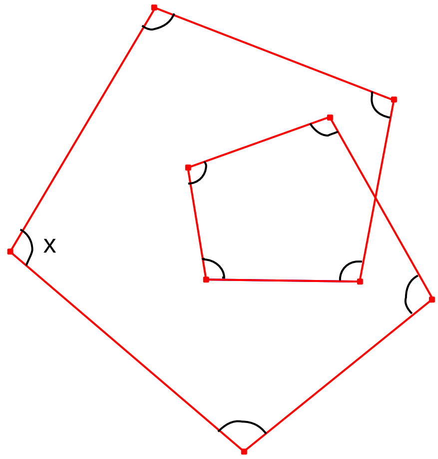
Siga $\overset{\Delta}{KBC}$ el triangle rectangle de catets $\overline{KB}=15$, $\overline{BC}=20$.
$\overline{AK}=5$.



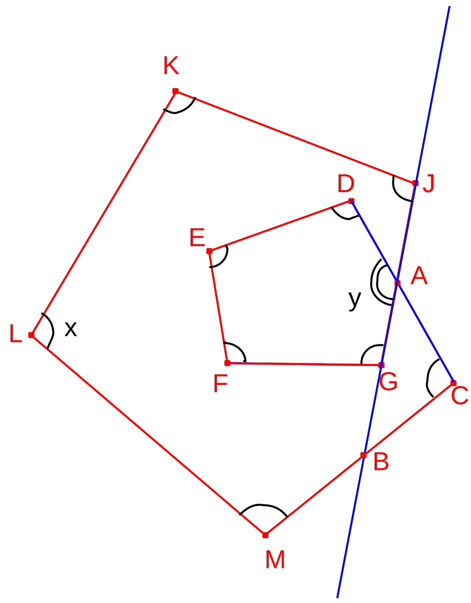
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KBC}$:
$\overline{CK}=25$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{KBC}$, $\overset{\Delta}{CLD}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales :
$\frac{\overline{DL}}{20}=\frac{20}{25}$. Aleshores, $\overline{DL}=16$.
$\frac{\overline{CL}}{20}=\frac{15}{25}$. Aleshores, $\overline{CL}=12$.
$\overline{KL}=25-12=13$.
L'àrea del quadrilàter ombrejat és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKD}$, $\overset{\Delta}{KLD}$:
$$S_{AKLD}=\frac{5\cdot 20}{2}+\frac{13\cdot 16}{2}=154.$$

1978.- En la figura, tots els angles marcats són iguals i el seu valor és x.
Calculeu el valor de x.
UKMT, 2017 Senior, problema 14.

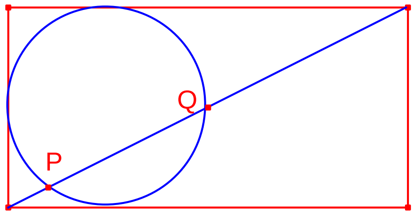


Solució:
Considerem el pentàgon interior ADEFG.
Siga $y=\angle DAG$.
La suma dels angles interior d'un pentàgon és $180º\cdot 3=540º$:
$4x+y=540º$.
La recta AG talla en costat del polígon en el punt B.
Considerem el pentàgon JKLMB.
La suma dels seua angles és:
$4x+\angle MBG=540º$.
Aleshores, $\angle MBG=y$



Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$C=x$, $A=180º-y$, $B=180º-y$.
La suma dels angles d'un triangle és 180º:
$x+180º-y+180º-y=180º$.
Aleshores, $x-2y=-180º$.
Considerem el sistema:
$\begin{cases}4x+y=540º\\ x-2y=-180º\end{cases}$. Resolent el sistema:
$\begin{cases}x=100º\\ y=140º\end{cases}$.

1979.- El la figura, una circumferència de radi 1 és tangent a tres costats d'un rectangle 2×4.
La diagonal del rectangle talla la circumferència en els punts P i Q.
Calculeu la longitud del segment $\overline{PQ}$.
UKMT, 2017 Senior, problema 19.

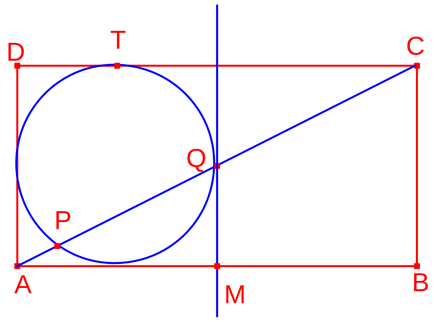


Solució:

Considerem el rectangle ABCD de costat $\overline{AB} = 4$, $\overline{AD} = 2$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

La recta que passa per M i és perpendicular al costat $\overline{AB}$ és tangent a la circumferència en el centre del rectangle.
La diagonal AC passa pel punt Q de la circumferència.
Aleshores, el centre del rectangle és el punt Q.
Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{CD}$.



$\overline{CT} = 3$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{AC} = \sqrt{20}, \quad \overline{CQ} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \sqrt{5}.$$

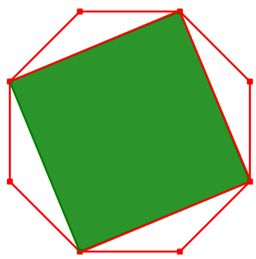
Aplicant la potència del punt C respecte de la circumferència:

$\overline{CQ} \cdot \overline{CP} = \overline{CT}^2$:

$\sqrt{5}\left(\overline{PQ} + \sqrt{5}\right) = 3^3$. Resolent l'equació:

$$\overline{PQ} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

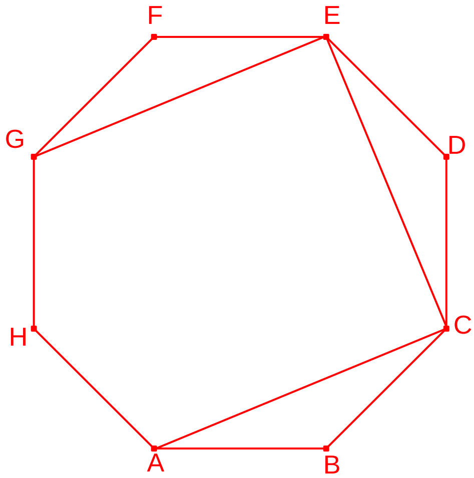
1980.- Un quadrat està inscrit en un octògon regular.
Si el costat de quadrat és 1 calculeu l'àrea de l'octògon regular.
UKMT, 2017 Senior, problema 22.



Solució:

Siga $x=\overline{AB}$ costat de l'octògon regular ABCDEFGH.

L'angle interior de l'octògon regular és $\angle ABC=135^{o}$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$1^2=x^2+x^2-2x\cdot x\cdot \cos 135^{o}$.

$1=\left(2+\sqrt{2}\right)x^2$.

$$x^2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del quadrat ACEG

més 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$S=1^2+4\left(\frac{x^2\sin 135^{o}}{2}\right).$$

$$S=1+2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$