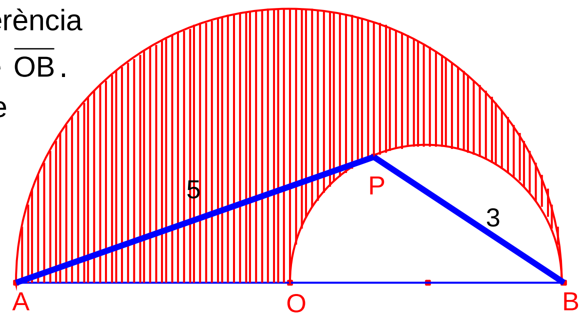
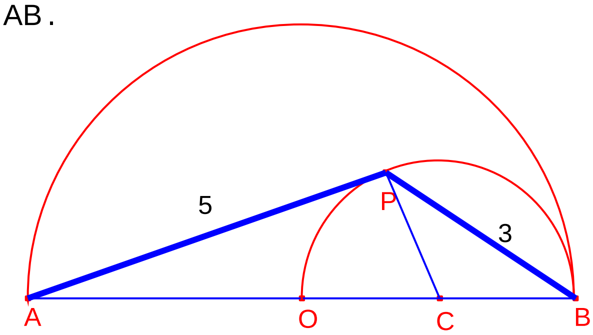
Problemes de Geometria per a l'ESO 199

1981.- En el dibuix, hi ha dibuixades la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ i la semicircumferència de diàmetre $\overline{OB}$.
Siga P un punt de la semicircumferència de diàmetre $\overline{OB}$ tal que $\overline{AP}=5$ i $\overline{BP}=3$.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siga C el centre de la semicircumferència de diàmetre $\overline{OB}$.
Siga $r=\overline{CO}=\overline{CP}$, radi de la semicircumferència de diàmetre $\overline{OB}$.
$\overline{OA}=2r$, radi de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.
Siga $\alpha=\angle ACP$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACP}$:

$5^2=(3r)^2+r^2-2\cdot 3r\cdot r\cdot\cos\alpha$.

$25=10r^2-6r^2\cos\alpha \qquad (1)$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PCB}$:

$3^2=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cdot\cos(180^{\circ}-\alpha)$.

$9=2r^2+2r^2\cos\alpha \qquad (2)$

Multiplicant l'expressió (2) per 3:

$27=6r^2+6r^2\cos\alpha \qquad (3)$

Sumant les expressions (1) i (3):

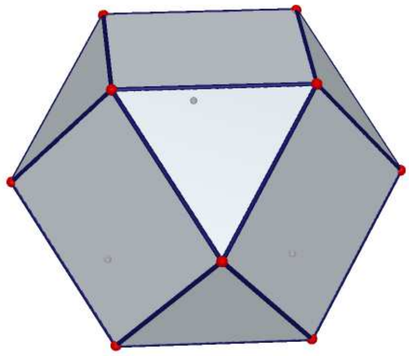
$16r^2=52$.

$r^2=\frac{13}{4}$.

L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del semicercle de radi 2r menys l'àrea del semicercle de radi r:

$S=\frac{1}{2}\pi(2r)^2-\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{3}{2}\pi r^2=\frac{39\pi}{8}\approx 15.32$.

1982.- En un políedre totes les cares són quadrats o triangles equilàters.

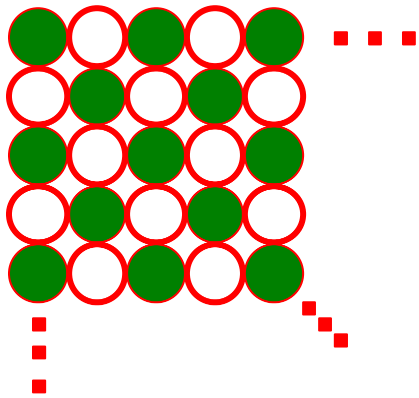


Cada triangle està en contacte amb tres quadrats i cada quadrat està envoltat per 4 triangles.
Si hi ha 6 quadrats, quants triangles hi haurà?
Prova Cangur 2017. 2n batxillerat

Solució:
Siga x el nombre de triangles de la figura.
Cada triangle està en contacte amb tres quadrats i cada quadrat està envoltat per 4 triangles.
El nombre d'arestes és igual al nombre total dels costats dels quadrats:
$A = 4 \cdot 6 = 24$.
El nombre total d'arestes és igual a la meitat de la suma del total dels costats dels triangles i dels quadrats:
$A = \frac{3x + 4 \cdot 6}{2}$.
Igualant les arestes:
$A = \frac{3x + 24}{2} = 24$.
Resolent l'equació:
$x = 8$.
La figura té 8 triangle equilàters.

El cos geomètric és el políedre arquimedià que s'anomena **cuboctaedre**.

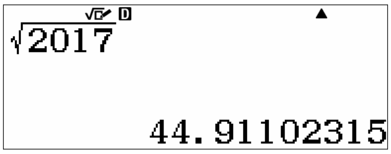
1983.- Na Júlia té 2017 fitxes, 1009 són verdes i la recta són blanques.



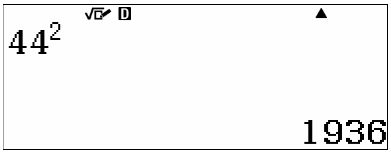
Les col·loca de manera que forma un quadrat, com mostra la figura, començant per una fitxa verda en el cantó superior esquerre i alternant el color en cada fila i columna.
Quantes fitxes de cada color li sobraran, si arranja el quadrat més gran possible?.
Prova Cangur 2017. 2n batxillerat

Solució:
Si el nombre de fitxes horitzontals del quadrat és parell hi ha el mateix nombre de fitxes verdes i blanques.
Si el nombre de fitxes horitzontals del quadrat és senar hi ha una fitxa verda més que blanques.

Hi ha 1008 fitxes blanques.



El màxim de fitxes horitzontals per formar un quadrat és 44.
Per ser parell el quadrat format tindrà el mateix nombre de fitxes verdes que blanques.



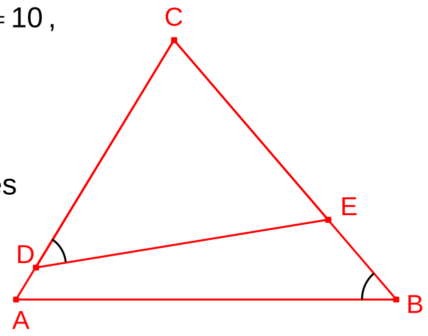
En total s'utilitzaran 1936 fitxes per fer el quadrat, 968 de cadascun dels dos colors.
Aleshores de cada color sobren:
$1009-968=41$ verdes.
$1008-968=40$ blanques.

1984.- Les longituds dels costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=9$ i $\overline{CA}=8$.

El punt D és un punt del costat $\overline{CA}$ i compleix que $\overline{CD}=7$ i el punt E és un punt del costat $\overline{BC}$, de manera que els angles $\angle ABC$ i $\angle CDE$ són iguals.

Calculeu el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{CDE}$.

Prova Cangur 2017. 2n batxillerat



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{EDC}$ són semblants ja que els angles corresponents són iguals.

Aplicant el teorema de Tales:

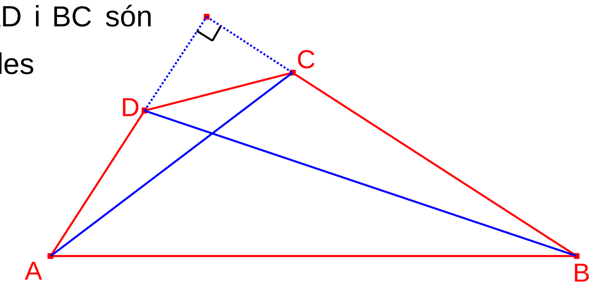
$\frac{7}{9}=\frac{\overline{DE}}{10}=\frac{\overline{CE}}{8}$. Resolent les equacions:

$\overline{DE}=\frac{70}{9}$, $\overline{CE}=\frac{56}{9}$.

Aleshores, el perímetre del triangle $\overset{\Delta}{EDC}$ és:

$P=7+\frac{70}{9}+\frac{56}{9}=21$.

1985.- En un quadrilàter convex ABCD, els costats $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ són perpendiculars, el costat $\overline{Cd} = 1\,\text{cm}$ i les mesures de les diagonals són $\overline{AC} = 2\text{ cm}$ i $\overline{BD} = 3\text{ cm}$.



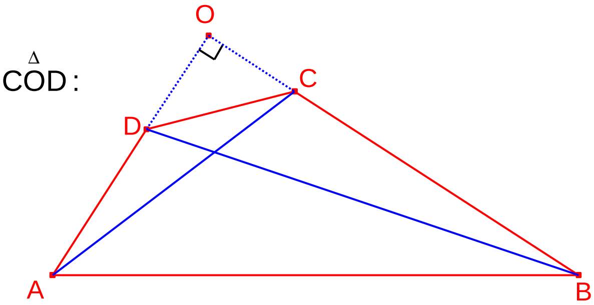
Calculeu la longitud del costat $\overline{AB}$.

Prova Cangur 2017. 2n batxillerat

Solució:

Siga O la intersecció de les rectes AD i BC.

Siga $\overline{OD} = x$, $\overline{OC} = y$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COD}$:

$x^2 + y^2 = 1$.

Siga $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACO}$:

$(a+x)^2 = 2^2 - y^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDO}$:

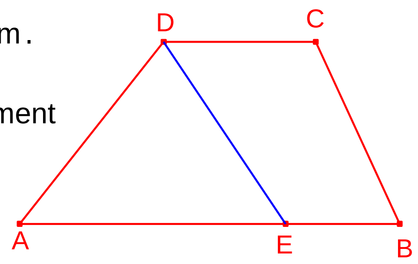
$(b+y)^2 = 3^2 - x^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$\overline{AB}^2 = (a+x)^2 + (b+y)^2 = 4 - x^2 + 9 - y^2 = 13 - \left(x^2 + y^2\right) = 12$.

Aleshores, $\overline{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

1986.- ABCD és un trapezi amb bases $\overline{AB} = 50\ \text{cm}$ i $\overline{CD} = 20\ \text{cm}$.



El punt E és un punt del costat $\overline{AB}$ amb la propietat que el segment $\overline{DE}$ divideix el trapezi en dues parts de la mateixa àrea.

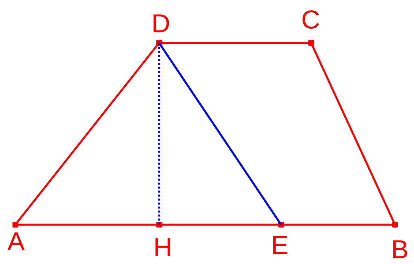
Calculeu la longitud del segment $\overline{AE}$.

Prova Cangur 2017. 1r batxillerat

Solució:

Siga $\overline{DH} = h$ altura del trapezi ABCD i del triangle $\overset{\Delta}{AED}$.

Siga $x = \overline{AE}$.



L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{50+20}{2}h.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és:

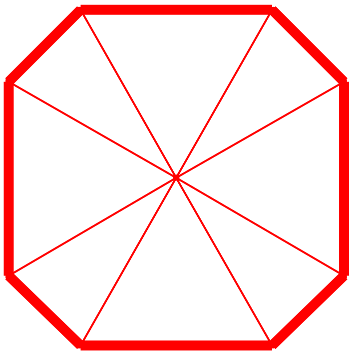
$$S_{AED} = \frac{xh}{2}.$$

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{AED}.$$

$\frac{50+20}{2}h = 2 \cdot \frac{xh}{2}$. Simplificant:

$x = 35\ \text{cm}$.

1987.- Una sala d'actes té forma d'octògon, que es pot descompondré en quatre triangles equilàters i uns altres quatre triangles isòsceles, com es veu en la figura.



La distancia del punt central de la sala a qualsevol dels vèrtexs és de 10 m.

Calculeu l'àrea total de la sala d'actes, expressada en m^2.

Prova Cangur 2017. 1r batxillerat

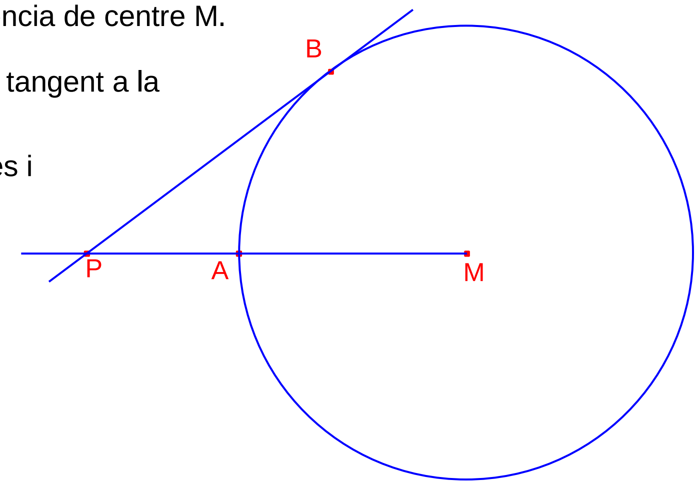
Solució:

L'angle desiguals dels quatre triangles isòsceles és de 30º.

L'àrea total és:

$$S = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}10^2\right) + 4\left(\frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 30^{o}}{2}\right) = 100\left(1+\sqrt{3}\right) \propto 273.21\,m^2 .$$

1988.- A i B són dos punts d'una circumferència de centre M.



El punt P és de la recta AM i la recta PM és tangent a la circumferència en el punt B.

Les distàncies $\overline{PA}$ i $\overline{MB}$ són nombres entres i $\overline{PB}=\overline{PA}+6$.

Calculeu quants valors diferents pot tenir el radi $\overline{MB}$.

Prova Cangur 2017. 1r batxillerat

Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBM}$:

$\overline{PB}^2+\overline{MB}^2=\left(\overline{PA}+\overline{MB}\right)^2$. Simplificant:

$\overline{PB}^2+\overline{MB}^2=\overline{PA}^2+2\overline{PA}\cdot\overline{MB}+\overline{MB}^2$.

$\overline{PB}^2=\overline{PA}^2+2\overline{PA}\cdot\overline{MB}$.

$\left(\overline{PA}+6\right)^2-\overline{PA}^2=2\overline{PA}\cdot\overline{MB}$.

$$\overline{MB}=\frac{\left(\overline{PA}+6+\overline{PA}\right)\left(\overline{PA}+6-\overline{PA}\right)}{2\overline{PA}}.$$

$$\overline{MB}=\frac{\left(2\overline{PA}+6\right)6}{2\overline{PA}}.$$

$$\overline{MB}=\frac{6\overline{PA}+18}{\overline{PA}}=6+\frac{18}{\overline{PA}}.$$

A fi que $\overline{MB}$, $\overline{PA}$ ha de ser divisor de 18

$18=2\cdot 3^2$.

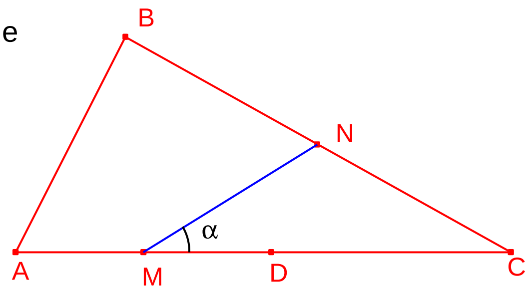
18 té $(1+1)(2+1)=6$ divisors.

Aleshores hi ha 6 valors diferents per al radi $\overline{MB}$.

Els valors són:

$\overline{PA}$	$\overline{MB}$
1	24
2	15
3	12
6	9
9	8
18	7

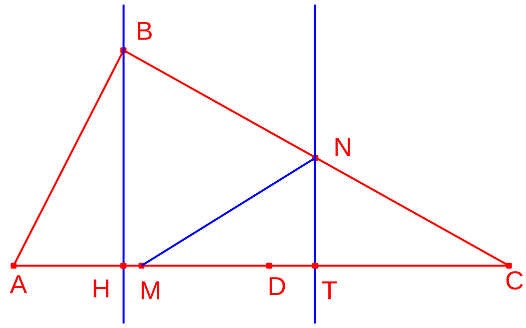
1989.- S'escull un punt D del costat $\overline{AC}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de manera que $\overline{DC}=\overline{AB}$.
Els punts M i N són respectivament punts mitjans dels segments $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$.
Si $\angle NMC=\alpha$, calculeu la mesura de l'angle $\angle BAC$.
Prova Cangur 2017. 1r batxillerat



Solució:
Siga H la projecció de B sobre el costat $\overline{AC}$.
Siga $\overline{BH}=h$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\sin A=\frac{h}{c}$, $\overline{AH}=c\cdot\cos A$.

Siga T la projecció de N sobre el costat $\overline{AC}$.



$\overline{NT}=\frac{1}{2}\overline{BH}=\frac{h}{2}$.

$\overline{AD}=b-c$.

$\overline{AM}=\overline{MD}=\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{b-c}{2}$

$\overline{HC}=b-c\cdot\cos A$.

$\overline{HT}=\overline{CT}=\frac{1}{2}\overline{HC}$.

$\overline{HT}=\frac{b-c\cdot\cos A}{2}$.

$$\overline{MT}=\overline{AH}+\overline{HT}-\overline{AM}=c\cdot\cos A+\frac{b-c\cdot\cos A}{2}-\frac{b-c}{2}=\frac{c+c\cdot\cos A}{2}.$$

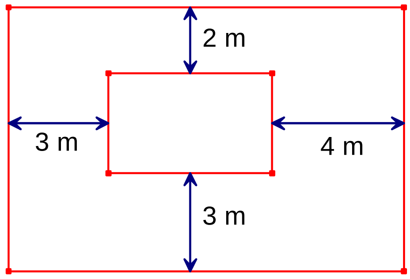
$$tg\alpha=\frac{\overline{NT}}{\overline{MT}}=\frac{\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}(c+c\cdot\cos A)}=\frac{h}{c+c\cdot\cos A}=\frac{c\cdot\sin A}{c+c\cdot\cos A}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=tg\frac{A}{2}.$$

Aleshores, $\frac{A}{2}=\alpha$.

$A=2\alpha$.

1990.- La figura mostra dos rectangles de costats paral·lels.

Calculeu la diferencia dels perímetres.
Prova Cangur 2017. 4t ESO.



Solució:

Siga KLMN el rectangle interior de costats $\overline{KL} = x$, $\overline{KN} = y$.

Siga ABCD el rectangle exterior:

$\overline{AB} = x + 7$, $\overline{AD} = y + 5$.

La diferencia dels perímetres és:

$P_{ABCD} - P_{KLMN} = 2(x + 7 + y + 5) - 2(x + y) = 24$.