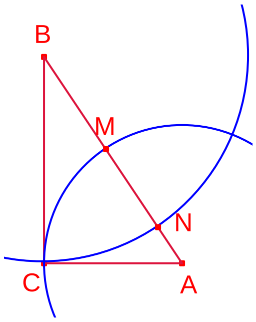
Problemes de Geometria per a l'ESO 2

11.- Siga un triangle rectangle de catets 12cm , 5cm. Amb centre en B dibuixem l'arc de radi $\overline{BC}$ que talla la hipotenusa en el punt N. Amb centre en C dibuixem l'arc de radi $\overline{AC}$ que talla la hipotenusa en el punt M. Calculeu la mesura del segment $\overline{MN}$.

Solució:



Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $C=90º$, de catets a, b.

$\overline{BN}=a$, $\overline{AM}=b$.

Com que $a+c>c$, l'orde del punts en la hipotenusa és ANMB.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$c=\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$.

$\overline{AB}=\overline{BN}+\overline{AM}-\overline{MN}$.

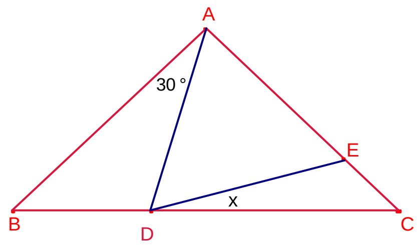
$\overline{MN}=\overline{BN}+\overline{AM}-\overline{AB}=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$.

El resultat del problema és:

$a=12, b=5$.

$\overline{MN}=12+5-\sqrt{12^2+5^2}=4\text{cm}$.

12.- En la figura $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AE} = \overline{AD}$, $\angle BAD = 30^o$.
Calculeu $x = \angle EDC$.



Solució:

Siga $\alpha = \angle ABC$.

Per ser, $\overline{AB} = \overline{AC}$:

$\alpha = \angle ACB$, $\angle BAC = 180^o - 2\alpha$.

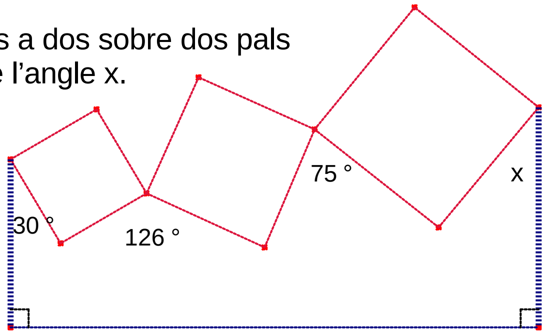
Aleshores, $\angle DAC = 150^o - 2\alpha$.

Per ser $\overline{AE} = \overline{AD}$, $\angle DEA = \angle ADE = \dfrac{180^o - (150^o - 2\alpha)}{2} = 15^o + \alpha$.

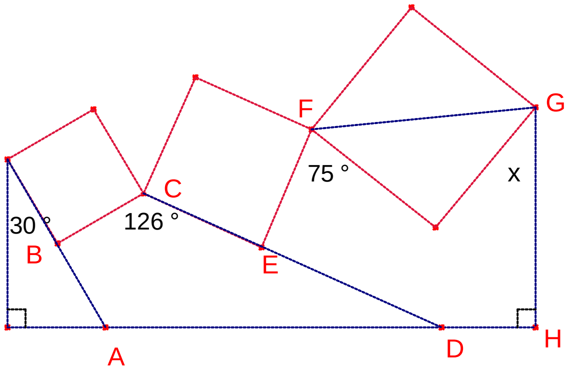
$\angle DEA = x + \alpha$.

Aleshores, $15^o + \alpha = x + \alpha$. Per tant, $x = 15^o$.

13.- Tres quadrats estan units pels seus vèrtexs dos a dos sobre dos pals verticals com els de la figura. Calculeu la mesura de l'angle x.



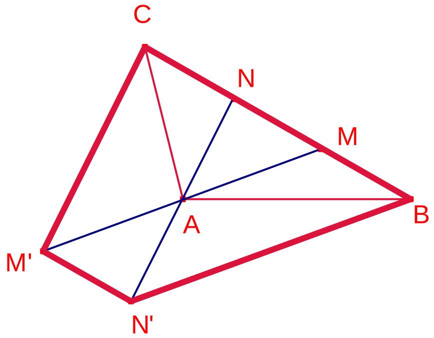
Solució:



En el quadrilàter ABCD, $\angle BAC = 120^o$, $\angle ABC = 90^o$.
Aleshores, $\angle ADC = 360^o - (120^o + 90^o + 126^o) = 24^o$.

En el pentàgon convex DEFGH, $\angle EDH = 156^o$, $\angle FED = 90^o$,
$\angle GFE = 75^o + 45^o = 120^o$, $\angle FGH = 45^o + x$.
Aleshores, $540^o = 156^o + 90^o + 120^o + 45^o + x + 90^o$.
Per tant, $x = 39^o$.

14.- Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ un triangle d'àrea S. Considerem els punts M, N sobre el costat $\overline{BC}$, tal que $\overline{CN}=\overline{NM}=\overline{MB}$. Siga M' el punt simètric de M respecte de A i N' el punt simètric de N respecte de A. Calculeu l'àrea del quadrilàter BCM'N'.



Solució:

$\overline{CN}=\overline{NM}=\overline{MB}$, aleshores, $\overline{CN}=\overline{NM}=\overline{MB}=\frac{1}{3}\overline{BC}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Aleshores: $\frac{S_{ABM}}{S_{ABC}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}=\frac{1}{3}$.

$S_{ABM}=\frac{1}{3}S$. Anàlogament, $S_{AMN}=\frac{1}{3}S$, $S_{ACN}=\frac{1}{3}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMN}$, $\overset{\Delta}{AM'N'}$ són simètrics respecte del punt A, aleshores:

$S_{AMN}=S_{AM'N'}=\frac{1}{3}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ANB}$, $\overset{\Delta}{AN'B}$ tenen la mateixa altura i les bases $\overline{AN}=\overline{AN'}$, aleshores:

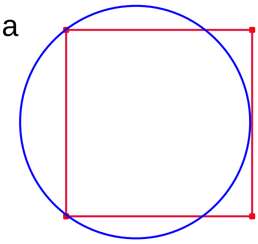
$S_{ANB}=S_{AN'B}=\frac{2}{3}S$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMC}$, $\overset{\Delta}{AM'C}$ tenen la mateixa altura i les bases $\overline{AM}=\overline{AM'}$, aleshores:

$S_{AMC}=S_{AM'C}=\frac{2}{3}S$. Aleshores, l'àrea del quadrilàter BCM'N' és:

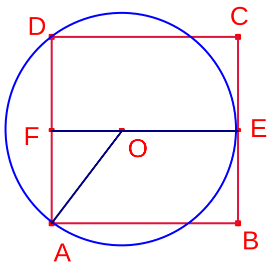
$S_{BCM'N'}=S_{ABC}+S_{AM'C}+S_{AM'N'}+S_{AN'B}=S+\frac{2}{3}S+\frac{1}{3}S+\frac{2}{3}S=\frac{8}{3}S$.

15.- En la següent figura el cercle està situat sobre un quadrat de forma que passa per dos vèrtexs consecutius i pel punt mig del costat oposat. Si el costat del quadrat mesura a quant mesura el radi del cercle.



Problemáticos.

Solució:



Siga el quadrat ABCD i la circumferència de centre O que passa pels punts A, D i E, on E és el punt mig del costat $\overline{BC}$

Siga F el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siga r el radi de la circumferència.

$\overline{FE} = a$, $\overline{OA} = \overline{OE} = r$.

$\overline{FO} = a - r$. $\overline{FA} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OFA}$.

$$(a-r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r^2.$$

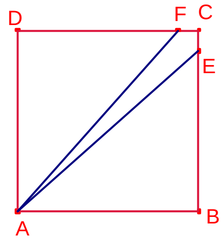
Simplificant:

$2ar = \frac{5}{4}a^2$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{5}{8}a.$$

16.- Es pot col·locar un triangle equilàter de costat 4cm en un quadrat de costat 3cm?.
Pogorélov, A. V. Geometría elemental. Editorial Mir. Moscou. 1974. Pàg. 119. Problema 8.

Solució 1:
Siga el quadrat ABCD de costat 3cm.



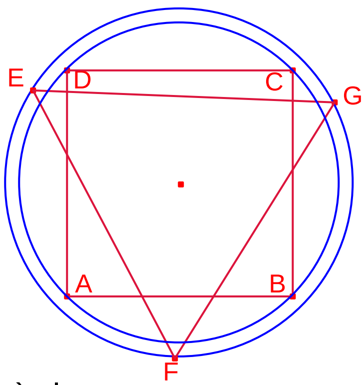
Considerem els punts E, F dels costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{AE} = \overline{AF} = 4$.

Siga $x = \overline{BE} = \overline{DF}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:
$x = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$.
$\overline{CE} = \overline{CF} = 3 - x = 3 - \sqrt{7}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ECF}$:
$\overline{FE} = \left(3 - \sqrt{7}\right)\sqrt{2}$.
$\overline{FE} = \left(3 - \sqrt{7}\right)\sqrt{2} < 4$.

Considerem el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{EAF}$. En tot triangle a costat menor li correspon angle oposat menor.
Aleshores l'angle $\angle EAF < 60^{o}$.
Aleshores no és pot col·locar el triangle equilàter dins del quadrat.

Solució 2:
Siga el quadrat ABCD de costat 3cm.



Siga un triangle equilàter $\overset{\Delta}{EFG}$ de costat 4cm.

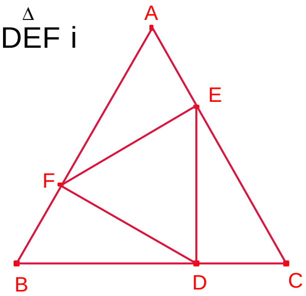
La circumferència circumscrita al quadrat té radi $\frac{AC}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

El radi de la circumferència circumscrita al triangle $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\frac{3\sqrt{2}}{2} < \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Situant el centre del triangle equilàter dins del quadrat sempre hi haurà almenys un vèrtex fora del quadrat.

17.- En un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ inscrivim un triangle equilàter $\overset{\Delta}{DEF}$ amb $\overline{DE}$ perpendicular a $\overline{BC}$ Determineu la raó entre dels àrees dels triangles $\overset{\Delta}{DEF}$ i $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:

El triangle $\overset{\Delta}{EDC}$ és rectangle $D = 90º$, $C = 60º$.
Siga $x = \overline{CD}$, aleshores, $\overline{CE} = 2x$.
Per tant, $\overline{BC} = 3x$.

Siga $y = \overline{DE}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDC}$:

$x^2 + y^2 = (2x)^2$.

$y^2 = 3x^2$.

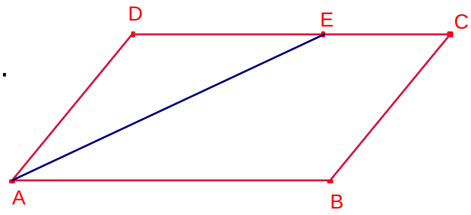
Els triangles equilàters són semblants. La raó entre les àrees és igual al quadrat de la raó de semblança dels triangles:

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{y}{3x}\right)^2 = \frac{y^2}{9x^2} = \frac{3x^2}{9x^2} = \frac{1}{3}.$$

18.- Donat el paral·lelogram de costats a, b, $a > b$, s'ha traçat la bisectriu d'un dels angles que talla un dels costats més grans en un punt. Quant mesuren els segments del costat gran dividits per la bisectriu.

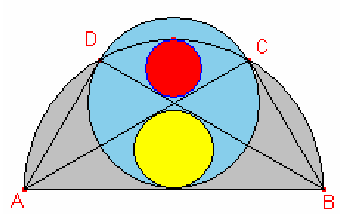
Solució:

Siga el paral·lelogram ABCD $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$.
Siga $\angle DAB = 2\alpha$.



La bisectriu de l'angle $\angle DAB$ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt E.
$\angle EAB = \alpha$.
Per ser AB i CD paral·lels, $\angle DEA = \alpha$.

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{AED}$ és isòsceles, per tant,
$\overline{DE} = \overline{AD} = b$, $\overline{EC} = a - b$.



19.- Calculeu el radi de les tres circumferències en funció del radi de la semicircumferència saben que $\angle BAD = \angle ABC = 60^o$.

Solució:

Siga L el punt mig del segment $\overline{AB}$. Siga $R_1 = \overline{AL}$, radi de la semicircumferència.

Si prolonguem els segments $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ s'intersecten en el punt E.

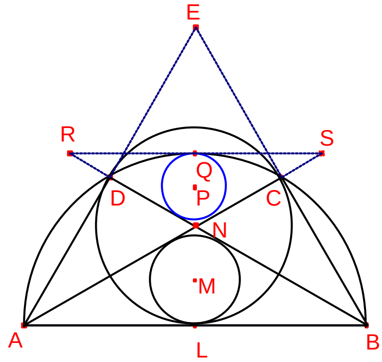
Notem que el triangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és equilàter.

Notem que $\overline{BD}$, $\overline{AC}$ són bisectrius del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$.

Notem que la circumferència gran és inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.

Siga N la intesecció de $\overline{BD}$, $\overline{AC}$, incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABE}$.

Siga $R_2 = \overline{NL}$ radi de la circumferència gran.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALE}$:

$$\overline{EL} = \sqrt{\overline{BE}^2 - \overline{AL}^2} = \sqrt{(2R_1)^2 - R_1^2} = R_1\sqrt{3} .$$

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$R_2 = \overline{NL} = \frac{1}{3}\overline{EL} = \frac{\sqrt{3}}{3}R_1 .$$

Siga M el centre de la circumferència mitjana.

Siga $R_2 = \overline{ML}$ el seu radi.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALN}$:

$$\overline{AN} = \frac{\overline{NL}}{\sin 30^o} = \frac{2\sqrt{3}}{3}R_1 .$$

Aplicant l'àrea del triangle al triangle $\overset{\Delta}{ABN}$:

$$\frac{\overline{AN} + \overline{BN} + \overline{AB}}{2}\overline{ML} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{NL}}{2} .$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{2}R_1 + \frac{2\sqrt{3}}{2}R_1 + 2R_1}{2}R_2 = \frac{2R_1\frac{\sqrt{3}}{2}R_1}{2}$$. Resolent l'equació en R_2 : $R_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}R_1$.

La recta EL talla la circumferència menuda en el punt Q. Tracem una paral·lela al segment $\overline{AB}$ que passa pel punt Q, que forma amb les rectes BD, AD el triangle $\overset{\Delta}{SRN}$, que és semblant al triangle $\overset{\Delta}{ABN}$. La circumferència menuda és inscrita al triangle $\overset{\Delta}{SRN}$. Siga P el centre de la circumferència menuda

Siga $R_3 = \overline{PQ}$ radi de la circumferència menuda.

$$\overline{NQ} = \overline{QL} - \overline{NL} = R_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}R_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3}R_1 .$$

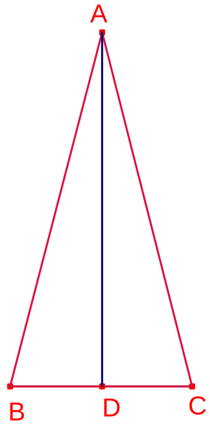
El triangle $\overset{\Delta}{SRN}$ és semblant al triangle $\overset{\Delta}{ABN}$, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{NL}} = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} . \quad R_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\frac{2-\sqrt{3}}{2}R_1 = \frac{3\sqrt{3}-5}{2}R_1 .$$

20.- L'àrea d'un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ és $q\sqrt{15}$. Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$ determineu el perímetre del triangle en funció de q.
Crux Mathematicorum M 345

Solució:

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ es, $S_{ABC} = q\sqrt{15}$.
Si $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, aleshores per ser el triangle isòsceles, $\overline{AC} = \overline{AB}$, o bé, $\overline{AC} = \overline{BC}$.
a) suposem que $\overline{AC} = \overline{AB}$.
Siga $x = \overline{BC}$, aleshores, $\overline{AC} = \overline{AB} = 2x$. Siga $h = \overline{AD}$, altura del triangle.
Siga $p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 5x$ el perímetre del triangle.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$h = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{15}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC}\ \dfrac{\overline{BC} \cdot h}{2} = q\sqrt{15}$:

$$\frac{x\frac{x}{2}\sqrt{15}}{2} = q\sqrt{15}.$$ Simplificant:

$x^2 = 4q$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = 2\sqrt{q}$. El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és $p = 5x = 10\sqrt{q}$.

b) suposem que $\overline{AC} = \overline{BC}$, aleshores $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$, els costats del triangle no complirien la desigualtat triangular, la qual cosa és un absurd.