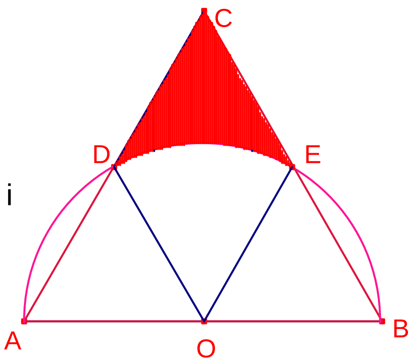
Problemes de Geometria per a l'ESO 20

191.- Sobre un semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ es dibuixa un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Determineu l'àrea de la regió compresa a l'interior del triangle i exterior al semicercle
Crux Mathematicorum M427

Solució:



Siga O el punt mig del segment $\overline{AB}$, centre del semicercle de diàmetre $\overline{AB} = 2r$.

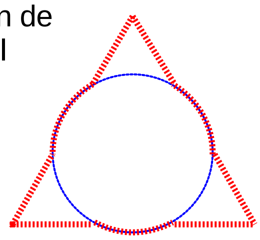
Siguen D, E els punts d'intersecció del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ i l'arc.

Notem que el triangles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overset{\Delta}{DEO}$ són equilàters de costat r.

L'àrea de l'interior del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ exterior al semicercle
es igual al doble de l'àrea del triangle equilàter de costat r menys la sisena part del cercle de radi r.

$$S = 2\left(\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{1}{6}\pi \cdot r^2 = \left(\frac{3\sqrt{3} - \pi}{6}\right) r^2 .$$

192.- Un triangle equilàter de costat e i un cercle de radi 1 se superposen de manera que els centre de les dues figures coincideixen. Quant mesura el perímetre de la figura que s'obté així?.
Proves cangur 2009, nivell 4, p16.



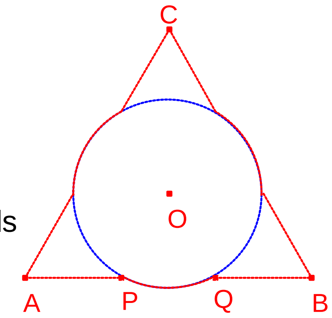
Solució 1:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat 3 i centre O

$\overline{AO}$ és i qual a $\frac{2}{3}$ de l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AO}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}3\right)=\sqrt{3}$.

Siga la circumferència de centre O i radi $r=1$ que talla el costat en els punts P, Q.



Siga $x=\overline{AP}$. $\overline{AQ}=3-x$.

Aplicant la potència de A respecte de la circumferència:

$\overline{AP}\cdot\overline{AQ}=\overline{AO}^2-r^2$.

$x(3-x)=2$.

Resolent l'equació: $x=1$.

aleshores, $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{AQ}=1$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és equilàter.
Aleshores, l'arc de circumferència abraça 60º.
Per tant el perímetre de la figura és:

$p=6\cdot\overline{AP}+\frac{1}{2}(2\pi r)=6+\pi$.

Solució 2:

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

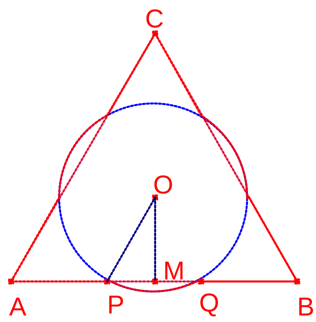
$\overline{MO}$ és i qual a $\frac{1}{3}$ de l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aleshores, $\overline{MO}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:

$\overline{PM}=\frac{1}{2}$. Aleshores, $\overline{PQ}=1$

$\overline{AP}=\overline{BQ}$. Aleshores, $\overline{AP}=\overline{BQ}=1$.

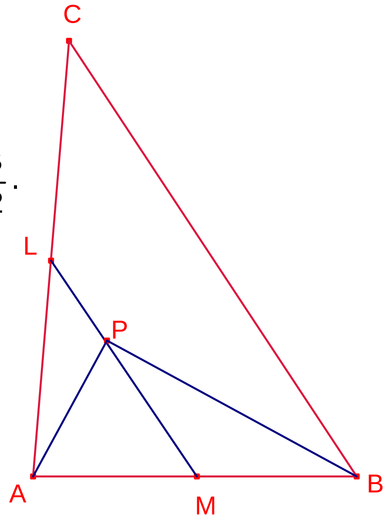


Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és equilàter.
Aleshores, l'arc de circumferència abraça 60º.
Per tant el perímetre de la figura és:

$p=6\cdot\overline{AP}+\frac{1}{2}(2\pi r)=6+\pi$.

193.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overline{AB} < \overline{BC}$, L és el punt mig del costat $\overline{AC}$ i M és el punt mig del costat $\overline{AB}$. Si P es un punt del segment $\overline{LM}$ tal que $\overline{MP} = \overline{MA}$. Proveu que $\angle PBA = \angle PBC$.
Crux Mathematicorum M433

Solució:



El segment $\overline{ML}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Aleshores $\angle AML = B$.

El triangle $\overset{\Delta}{AMP}$ és isòsceles, $\overline{MP} = \overline{MA}$. Aleshores, $\angle PAM = 90º - \frac{B}{2}$.

$\overline{PM}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{APM}$. $\overline{MP} = \overline{MA} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{APM}$ és rectangle, $\angle APB = 90º$.

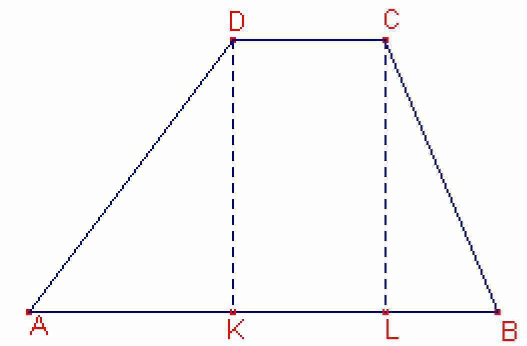
Per tant, $\angle PBA = 90º - \angle PAB = \frac{B}{2}$.

$\angle PBC = B - \angle PBA = \frac{B}{2}$.

Aleshores, $\angle PBA = \angle PBC$.

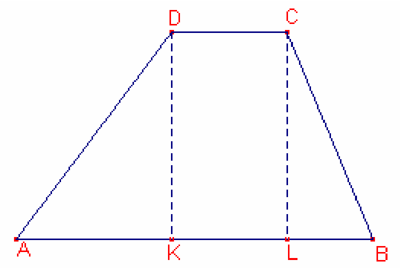
Si eliminem la condició $\overline{AB} < \overline{BC}$ i considerem el punt P sobre la recta LM la propietat s'acompleix anàlogament.

194.- Les bases d'un trapezi mesuren 62 i 20cm i els costats laterals 45 i 39cm. Calculeu la seu àrea.
Gúsiev 256



Solució:
Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles
$\overline{AB} = 62$, $\overline{CD} = 20$ i costats laterals $\overline{AD} = 45$, $\overline{BC} = 39$.
Siga $\overline{DK} = \overline{CL} = h$ altures del trapezi.
Siga $x = \overline{BL}$, aleshores, $\overline{AK} = 42 - x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles rectangles $A\overset{\Delta}{K}D$, $L\overset{\Delta}{B}C$, respectivament:
$45^2 = h^2 + (42 - x)^2$.
$39^2 = h^2 + x^2$.
Resolent el sistema format per les dues equacions:
$$\begin{cases} x = 15 \\ h = 36 \end{cases}.$$
L'àrea del trapezi és:
$$S_{ABCD} = \frac{62 + 20}{2} 36 = 1476 cm^2.$$

195.- Les bases d'un trapezi mesuren 30 i 12cm i les diagonals 20 i 34cm. Calculeu la seu àrea.
Gúsiev 257



Solució:
Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $\overline{AB}=30$, $\overline{CD}=12$ i diagonals $\overline{AC}=20$, $\overline{BD}=34$.
Siga $\overline{DK}=\overline{CL}=h$ altures del trapezi.
Siga $x=\overline{AK}$, aleshores, $\overline{KB}=30-x$, $\overline{AL}=12+x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangles rectangles $\overset{\Delta}{ALC}$, $\overset{\Delta}{BKD}$, respectivament:

$20^2=h^2+(12+x)^2$.

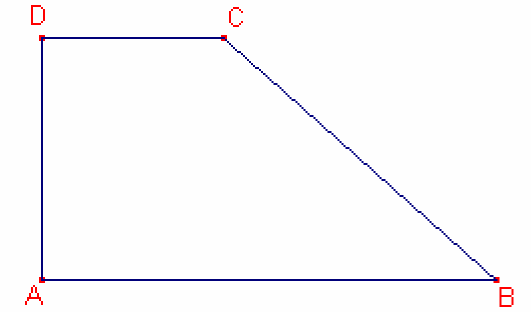
$34^2=h^2+(30-x)^2$.

Resolent el sistema format per les dues equacions:

$\begin{cases} x=0 \\ h=16 \end{cases}$. Notem que el trapezi és isòsceles.

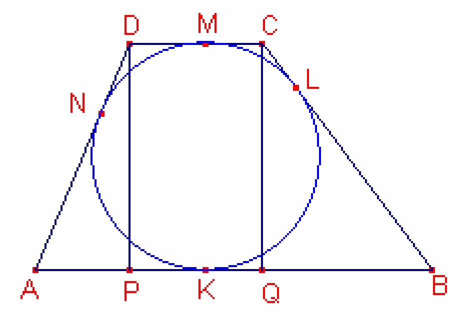
L'àrea del trapezi és:

$S_{ABCD}=\dfrac{30+12}{2}16=336cm^2$.



196.- Una de les bases d'un trapezi és 7.
El trapezi té una circumferència inscrita tal que el punt de tangència divideix un dels costats laterals en dos segments de longitud 9 i 4.
Determineu l'àrea del trapezi.
Gúsiev 258.

Solució:
Siga el trapezi ABCD.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi.
$\overline{AK} = \overline{AN} = 9$.
$\overline{DM} = \overline{DN} = 4$.
Amb aquestes condicions el costat menor és $\overline{CD} = 7$.
$\overline{CM} = \overline{CL} = 3$.
Siga $\overline{BK} = \overline{BL} = x$.
Siga $\overline{DP} = \overline{DQ} = h$ altura del trapezi.
$\overline{AP} = \overline{AK} - \overline{DM} = 9 - 4 = 5$. $\overline{BQ} = \overline{BK} - \overline{CM} = x - 3$.

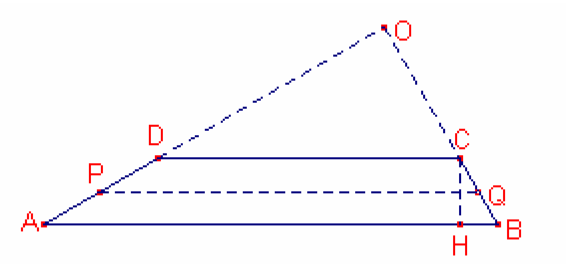


Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{APD}$, $\overset{\Delta}{BQC}$, respectivament:
$13^2 = h^2 + 5^2$.
$(3 + x)^2 = h^2 + (x - 3)^2$.
Resolent el sistema format per les dues equacions:
$\begin{cases} x = 1 \\ h = 12 \end{cases}$.
L'àrea del trapezi és:
$S_{ABCD} = \frac{21+7}{2} 12 = 168 \text{cm}^2$.

197.- Un dels angles aguts d'un trapezi mesura 30º, els costats laterals són perpendiculars.
Una base mesura 8cm i la paral·lela mitjana 10cm.
Calculeu la mesura dels costats i la seua àrea.
Gúsiev 80.

Solució:

Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = 8$.
Siga $\angle DAB = 30^o$.
Siga $\overline{PQ} = 10$ la paral·lela mitjana.
La continuació dels costats laterals s'intersecta en el punt O tal que $\angle AOB = 90^o$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDO}$:

$\overline{CO} = \dfrac{\overline{CD}}{2} = 4$, $\overline{OD} = 4\sqrt{3}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQO}$:

$\overline{QO} = \dfrac{\overline{PQ}}{2} = 5$, $\overline{OP} = 5\sqrt{3}$.

$\overline{QC} = 1$, $\overline{PD} = \sqrt{3}$.

Per ser $\overline{PQ}$ paral·lela mitjana:

$\overline{BP} = \overline{QC} = 1$, $\overline{AP} = \overline{PD} = \sqrt{3}$.

$\overline{BC} = 2$, $\overline{AD} = 2\sqrt{3}$.

$\overline{OB} = 6$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABO}$:

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{OB} = 12$.

Siga $\overline{CH}$ altura del trapezi ABCD.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CHB}$:

$\overline{CH} = \sqrt{3}$.

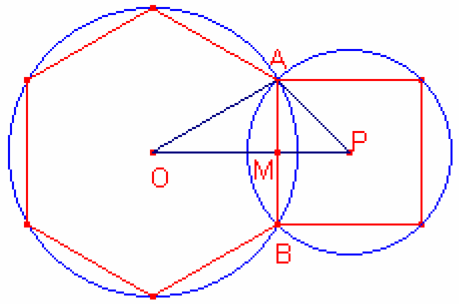
L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{12+8}{2}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$$

198.- La corda comuna de dues circumferències que s'intersecten és igual a a, a més a més, per a una circumferència és el costat d'un hexàgon regular inscrit i per a l'altra el costat d'un quadrat inscrit. Calculeu la distància entre els centres de les dues circumferències.
Gúsiev 117.

Solució:
Siga $a=\overline{AB}$ corda comuna a les dues circumferències.
Siga O el centre de la circumferència que té inscrita l'hexàgon regular.
Siga P el centre de la circumferència que té inscrit el quadrat.
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.
Hi ha dues solucions a aquest problema.

a) El quadrat i l'hexàgon només s'intersecten en la corda $\overline{AB}$.



$\overline{OA}=a$, $\overline{AM}=\frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

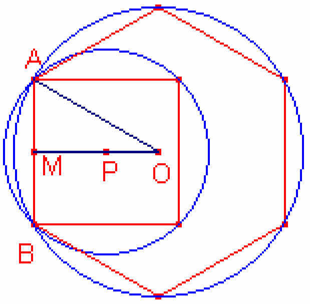
$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\overline{MP}=\frac{a}{2}$.

Aleshores, la distància entre els centres és:

$\overline{OP}=\overline{OM}+\overline{MP}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}a$.

b) El quadrat és interior a l'hexàgon.



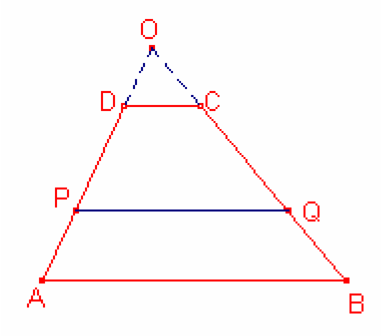
$\overline{OA}=a$, $\overline{AM}=\frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA}$:

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. $\overline{MP}=\frac{a}{2}$.

Aleshores, la distància entre els centres és: $\overline{OP}=\overline{OM}-\overline{MP}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}a$.

199.- Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}=20$, $\overline{CD}=5$.
Es dibuixa una paral·lela a les bases que divideix el costat $\overline{BC}$ en dos segments, el contigu a la base $\overline{AB}$ mesura 6 i l'altre 9.
Calculeu la mesura del segment que forma la paral·lela i el trapezi.
García Ardura, problema 404.

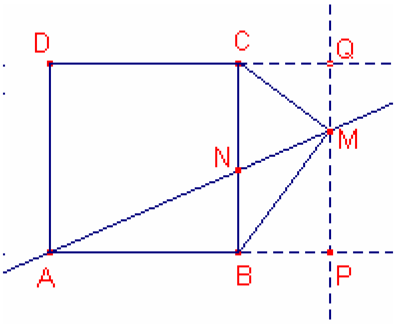


Solució:
Siga el segment $\overline{PQ}$ paral·lel a les bases tal que $\overline{BQ}=6$, $\overline{CQ}=9$.
Les rectes BC i AD s'intersecten en el punt O.
Siga $\overline{OA}=a$.
$\overline{BC}=15$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{DCO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{5}{a}=\frac{20}{15+a}$. Resolent l'equació:
$a=5$.
Els triangles $\overset{\Delta}{PQO}$, $\overset{\Delta}{DCO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{5}{a}=\frac{\overline{PQ}}{9+a}$.
$\overline{PQ}=14$.

200.- Per un punt M de l'exterior d'un quadrat ABCD de costat 15m, que dista 9m del vèrtex C i 12m del vèrtex B, s'ha dibuixat la recta AM que talla el costat $\overline{BC}$ en el punt N.
Calculeu la distància entre els punts A, N.
García Ardura, problema 405.

Solució:

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{BCM}$ és rectangle ja que $\overline{CB}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{BM}^2$.
Siga P la projecció de M sobre la recta AB.
Siga Q la projecció de M sobre la recta CD.
Siga $x = \overline{BP}$, $y = \overline{MP}$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCM}$ és:

$$S_{BCM} = \frac{\overline{BC}\cdot x}{2} = \frac{\overline{CM}\cdot\overline{BM}}{2}.$$

$\frac{15x}{2} = \frac{9\cdot 12}{2}$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{36}{5}.$$

$$\overline{AP} = 15 + x = \frac{111}{5}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPM}$:

$$y = \sqrt{12^2 - \left(\frac{36}{5}\right)^2} = \frac{48}{5}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - \left(\frac{111}{5}\right)^2} = 3\sqrt{65}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{APM}$, $\overset{\Delta}{ABN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}.$$

$\frac{\overline{AN}}{15} = \frac{3\sqrt{65}}{\frac{111}{5}}$. Resolent l'equació:

$$\overline{AN} = \frac{75\sqrt{65}}{37} \approx 16`34\text{m}.$$