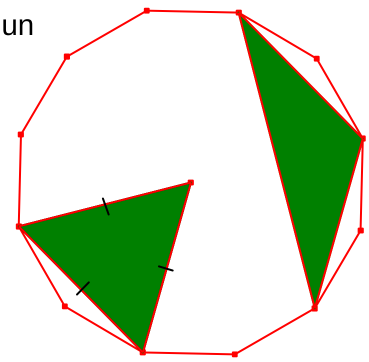
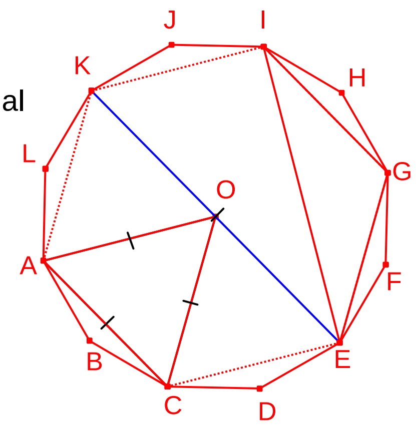
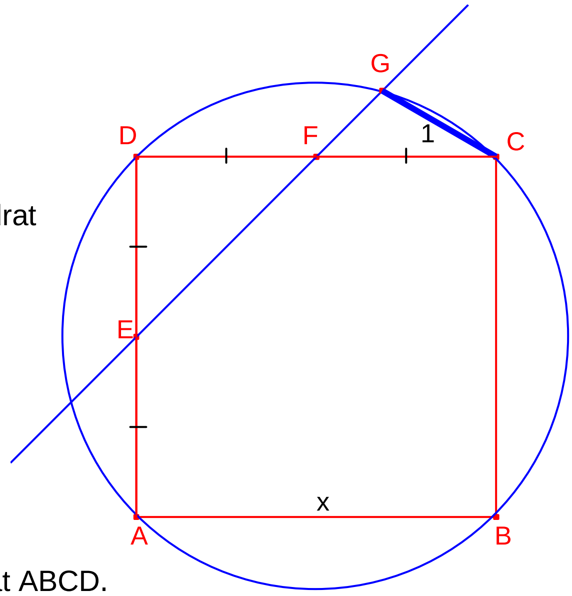
Problemes de Geometria per a l'ESO 200

1991.- En un dodecàgon regular s'han dibuixat dos triangles, un d'ells equilàter.
Proveu que els dos triangles tenen la mateixa àrea.



Solució:
Siga ABCDEFGHIJKL el dodecàgon regular de centre O.
Els vèrtex A, C són els costats de l'hexàgon regular de centre O.
Aleshores, el centre O és vèrtex del triangle equilàter.
El segment $\overline{EK}$ és paral·lel al segment $\overline{GI}$.
La distància de O al segment $\overline{GI}$ és igual a la distància de O al segment $\overline{AC}$.
$\overline{GI} = \overline{AC}$.
Els dos triangles tenen igual la base i l'altura, aleshores tenen la mateixa àrea.





1992.- En la figura, ABCD és un quadrat.

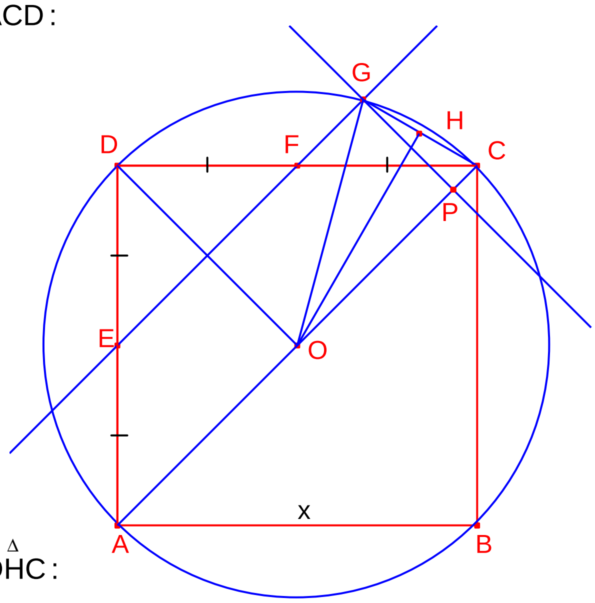
Els punts E i F són punts migs dels costats $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$, respectivament.
La recta EF talla la circumferència circumscrita al quadrat en el punt G.
Si $\overline{CG}=1$ calculeu la mesura x del costat $\overline{AB}$ del quadrat.

Solució:
Siga $x=\overline{AB}$.
Siga O el centre de la circumferència inscrita al quadrat ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$\overline{AC}=x\sqrt{2}$.

$\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OG}=\frac{1}{2}x\sqrt{2}$.



El triangle $\overset{\Delta}{OCG}$ és isòsceles.

EF és la paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.
Siga P la projecció de G sobre $\overline{AC}$.

$\overline{GP}=\frac{1}{2}\overline{OD}=\frac{\sqrt{2}}{4}x$.

Siga H el punt mig del costats desigual del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCG}$:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OHC}$:

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-1}.$$

Calculant l'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCG}$:

$$S_{OCG}=\frac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{GP}=\frac{1}{2}\overline{CG}\cdot\overline{OH}:$$

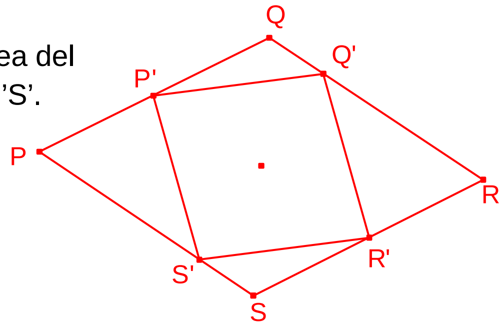
$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}x\frac{\sqrt{2}}{4}x=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-1}$. Simplificant:

$$\frac{1}{2}x^2=\sqrt{2x^2-1}$$

Resolent l'equació:

$$x=\sqrt{4+2\sqrt{3}}\approx 2.73.$$

1993.- El rombe PQRS de costat 1 i $\angle SPQ = \angle SRQ = 60^o$, $\angle PQR = \angle PSR = 120^o$, té inscrit un rombe P'Q'R'S'.
Saben que l'àrea del rombe inscrit és igual a la meitat de l'àrea del rombe PQRS, calculeu la mesura del costat del rombe P'Q'R'S'.
Proposta de Lluís Bonet.



Solució:

$\overset{\Delta}{PQS}$ és un triangle equilàter.

$S_{PQRS} = 2 \cdot S_{PQS} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Siga $\overline{QQ'} = x$, $\overline{QP'} = y$.

$\overline{PP'} = 1 - y$, $\overline{PS'} = \overline{RQ'} = 1 - x$

L'àrea del rombe P'Q'R'S' és igual a la meitat de l'àrea del rombe PQRS. Aleshores:

$S_{P'Q'R'S'} = 2 \cdot S_{P'QQ'} + 2 \cdot S_{PP'S'} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$2\frac{1}{2}xy \cdot \sin 120^o + 2\frac{1}{2}(1-x)(1-y)\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$xy \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (1-x)(1-y)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Simplificant:

$$2xy + 1 - (x+y) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{P'Q'Q}$:

$\overline{P'Q'}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 120^o$. Simplificant:

$\overline{P'Q'}^2 = x^2 + y^2 + xy$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PP'S'}$:

$\overline{P'S'}^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 - 2(1-x)(1-y) \cdot \cos 60^o$. Simplificant:

$\overline{P'S'}^2 = 1 - (x+y) + x^2 + y^2 - xy$.

P'Q'R'S' és un rombe, aleshores, $\overline{P'Q'} = \overline{P'S'}$:

$x^2 + y^2 + xy = 1 - (x+y) + x^2 + y^2 - xy$. Simplificant:

$$2xy = 1 - (x+y) \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} 2xy = -\frac{1}{2} + (x+y) \\ 2xy = 1 - (x+y) \end{cases}.$$

Sumant i restant ambdues expressions: $\begin{cases} xy = \frac{1}{8} \\ x + y = \frac{3}{4} \end{cases}$.

Les solucions del sistema són les solucions de l'equació $z^2 - \frac{1}{8}z + \frac{3}{4} = 0$.

Resolent l'equació:

$z=\frac{1}{2},\frac{1}{4}$. Aleshores, $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$, o bé $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{4} \end{cases}$.

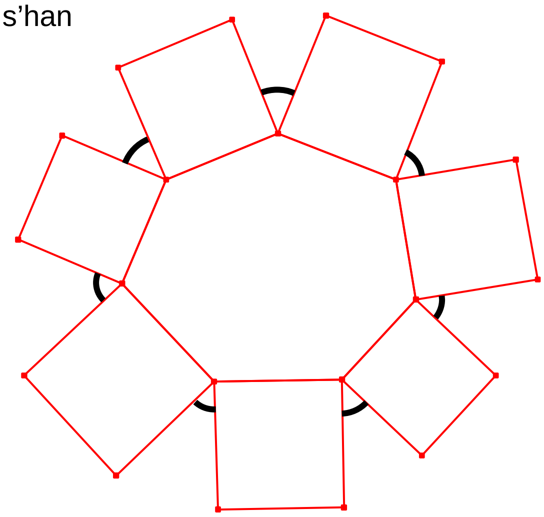
Suposem que $\begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $P'\overset{\Delta}{Q}Q$:

$\overline{P'Q'}^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\frac{1}{4}\frac{1}{2}\cos 120º=\frac{7}{16}$.

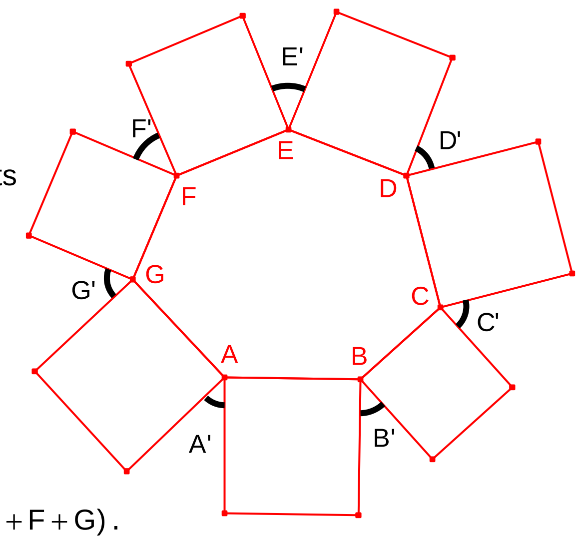
$\overline{P'Q'}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

L'altra solució dóna el mateix resultat.

1994.- En la figura sobre els costats d’un heptàgon convex s’han dibuixat 7 quadrats.



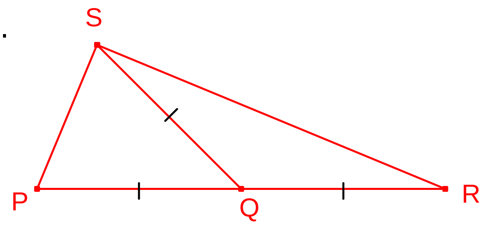
Calculeu la mesura de la suma dels angles marcats.
UKMT, junior 2017.



Solució:
Siguen l’heptàgon convex ABCDEFG.
La suma dels angles d’un polígon convex de n costats és:
$180^{o}(n-2)$.
$A+B+C+D+E+F+G=180^{o}(7-2)=180^{o}\cdot 5$.
Siguen A’, B’, C’, D’. E’, F’, G’ els angles marcats:
$A'=360^{o}-(A+2\cdot 90^{o})=180^{o}-A$. Anàlogament,
$B'=180^{o}-B$, $C'=180^{o}-C$, $D'=180^{o}-D$, $E'=180^{o}-E$,
$F'=180^{o}-F$, , $G'=180^{o}-G$.
$A'+B'+C'+D'+C'+E'+F'+G'=7\cdot 180^{o}-(A+B+C+D+E+F+G)$.
$A'+B'+C'+D'+C'+E'+F'+G'=7\cdot 180^{o}-5\cdot 180^{o}=2\cdot 180^{o}=360^{o}$.

1995.- En la figura, $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{QS}$ i $\angle SPQ = 3\angle QSR$.

Determineu la mesura de l'angle $\angle QRS$.



Solució 1:

$\alpha = \angle QSR$.

$\angle SPQ = 3\alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle QRS = \angle QSR = \alpha$.

$\angle PQS = \angle QSR + \angle QRS = 2\alpha$.

El triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ és isòsceles, aleshores:

$\angle PSQ = \angle SPQ = 3\alpha$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{PQS}$ és 180º:

$3\alpha + 3\alpha + 2\alpha = 180^o$.

Aleshores, $\alpha = \frac{45^o}{2}$.

$\angle QRS = \alpha = \frac{45^o}{2} = 22^o 30'$.

Solució 2:

$\alpha = \angle QSR$.

$\angle SPQ = 3\alpha$.

En un triangle si la mitjana és igual a la meitat del costat sobre la que està traçada el triangle és rectangle.

$\overline{QS}$ és mitjana del triangle $\overset{\Delta}{PRS}$ i $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{QS}$.

Aleshores, $\angle PSR = 90^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{QRS}$ és isòsceles, aleshores:

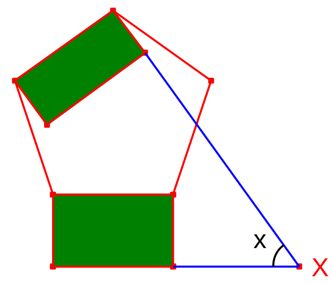
$\angle QRS = \angle QSR = \alpha$.

$\angle PRS + \angle SRP = 90^o$.

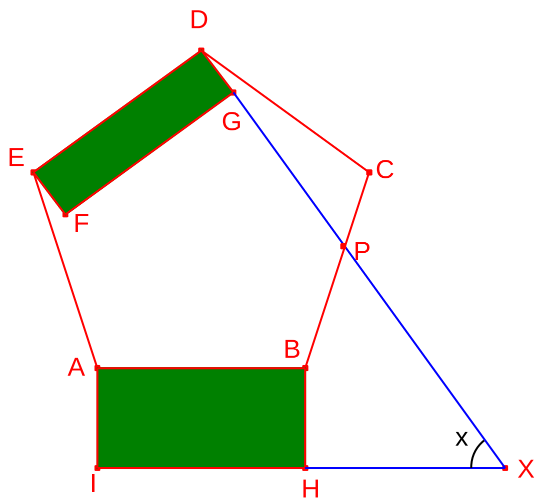
$\alpha + 3\alpha = 90^o$. Resolent l'equació:

$\angle QRS = \alpha = \frac{90^o}{4} = 22^o 30'$.

1996.- En la figura sobre dos costats d'un pentàgon regular s'han dibuixat dos rectangles.



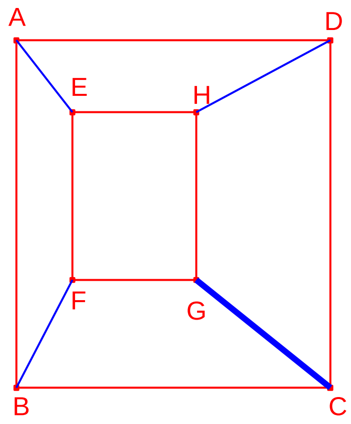
Un costat de cada rectangle s'estenen fins intersectar en el punt X. Determineu la mesura de l'angle x.
UKMT 2017, Intermediate.



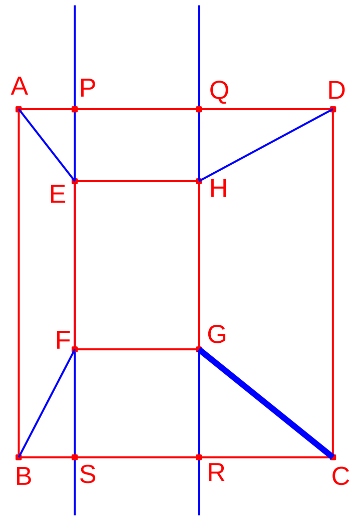
Solució:
Siga ABCDE el pentàgon regular.
$A = B = C = D = E = 108^{o}$.
Siguen DEFG i ABHI els rectangles.
Siga X la intersecció de les rectes DG i IH.
Siga P la intersecció de la recta DG i el costat $\overline{BC}$ del rectangle.
La suma dels angles interior d'un pentàgon convex és $180^{o}(5-2) = 540^{o}$.
Considerem el pentàgon convex ABPDE:
$\angle BPD = 540^{o} - (3 \cdot 108^{o} + 90^{o}) = 126^{o}$.
$\angle BPX = 180^{o} - \angle BPD = 180^{o} - 126^{o} = 54^{o}$.
$\angle PBH = 360^{o} - (\angle ABH + \angle ABP) = 360^{o} - (90^{o} + 108^{o}) = 162^{o}$.
$x = 360^{o} - (\angle BHX + \angle PBH + \angle BPX) = 360^{o} - (90^{o} + 162^{o} + 54^{o}) = 54^{o}$.

1997.- En la figura, els rectangles ABCD i EFGH tenen els costats paral·lels.

Sabent que $\overline{AE}=3$, $\overline{BF}=4$ i $\overline{DH}=5$, calculeu la mesura de $\overline{CG}$.



Solució:



Siga P la projecció de E sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga Q la projecció de H sobre el costat $\overline{AD}$.
Siga R la projecció de H sobre el costat $\overline{BC}$.
Siga S la projecció de E sobre el costat $\overline{BC}$.
Siga $\overline{AP}=\overline{BS}=x$, $\overline{DQ}=\overline{CR}=y$.
Siga $\overline{EP}=\overline{HQ}=a$, $\overline{FS}=\overline{GR}=b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APE}$:

$$3^2=a^2+x^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BSF}$:

$$4^2=b^2+x^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DQH}$:

$$5^2=a^2+y^2 \qquad (3)$$

Efectuant l'operació $(3)+(2)-(1)$:

$$5^2+4^2-3^2=b^2+y^2.$$

$$b^2+y^2=32.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CRG}$:

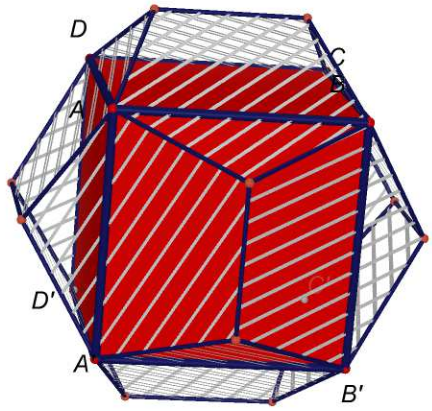
$$\overline{CG}^2=b^2+y^2=32.$$

$$\overline{CG}=4\sqrt{2}.$$

1998.- Dos vèrtex d'un dodecàedre regular d'aresta 1 són vèrtexs d'un cub.

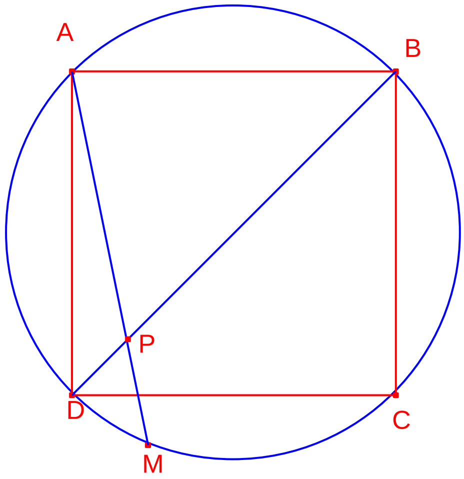
Calculeu el volum del cub.

Solució:
L'aresta del cub és igual a la diagonal del pentàgon regular d'una cara:
La proporció entre la diagonal d'un pentàgon regular i el costat és $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



L'aresta del cub és $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

El volum del cub és $V_{cub} = a^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2+\sqrt{5}$.



1999.- El quadrat ABCD està inscrit en una circumferència de radi 30.

La corda $\overline{AM}$ mesura 50 i talla la diagonal $\overline{BD}$ en el punt P.

Determineu la mesura del segment $\overline{AP}$.

Solució:

Aplicant la potencia del punt P respecte de la circumferència:

$\overline{AP}\cdot\overline{MP}=\overline{DP}\cdot\overline{BP}$.

$\overline{AP}\cdot\left(30-\overline{AP}\right)=\overline{DP}\cdot\left(60-\overline{DP}\right)$.

$$\overline{AP}\cdot\left(30-\overline{AP}\right)=-\overline{DP}^2+60\overline{DP} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{AD}=30\sqrt{2}$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADP}$:

$$\overline{AP}^2=\left(30\sqrt{2}\right)^2+\overline{DP}^2-2\left(30\sqrt{2}\right)\overline{DP}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{AP}^2=\left(30\sqrt{2}\right)^2+\overline{DP}^2-60\overline{DP} \qquad (2)$$

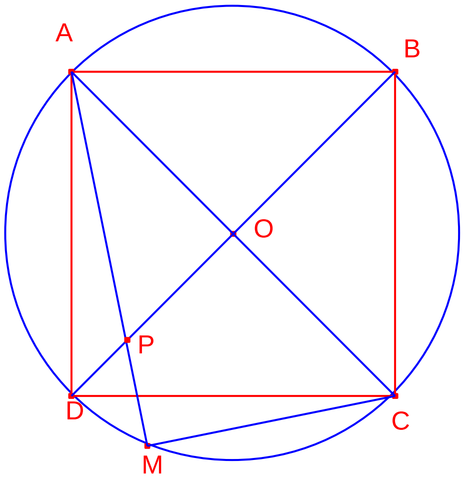
Sumant les expressions (1) i (2):

$\overline{AP}\cdot\left(30-\overline{AP}\right)+\overline{\overline{AP}}^2=1800$.

$30\overline{AP}=1800$.

$\overline{AP}=36$.

Solució 2:



$\overline{OA}=30$, $\overline{AC}=60$.

Siga O el centre del quadrat.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APO}$, $\overset{\Delta}{ACM}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

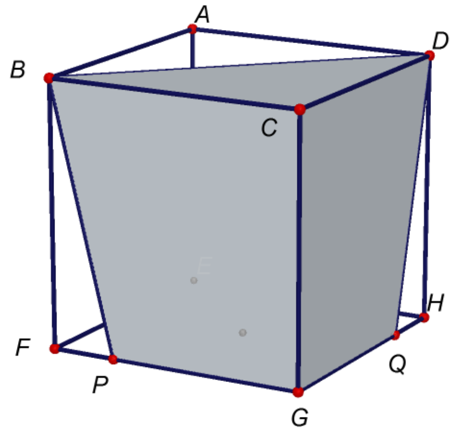
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{AM}}.$$

$\dfrac{\overline{AP}}{60}=\dfrac{30}{50}$. Resolent l'equació:

$\overline{AP}=36$

2000.- Siga el cub ABCDEFGH d'aresta 12.

Siguen P i Q dos punts de les arestes $\overline{FG}$ i $\overline{GH}$, respectivament, tal que $\overline{FP} = \overline{HQ} = 3$.
Calculeu el volum de la secció de cub formada pel plànol DBPQ que conté el vèrtex C.



Solució:
Les rectes BP, CG i DQ s'intersecten en el punt O.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FPB}$, $\overset{\Delta}{GPO}$ són semblants i de raó 3:9:
Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{GO} = 3 \cdot \overline{FB} = 36$.
$\overline{OC} = 48$.
El volum de la secció és igual a la diferència dels volums dels tetràedres BCDO i PGQO:

$$V_{\text{sec ció}} = \frac{1}{3}\frac{12 \cdot 12}{2}48 - \frac{1}{3}\frac{9 \cdot 9}{2}36 = 666$$