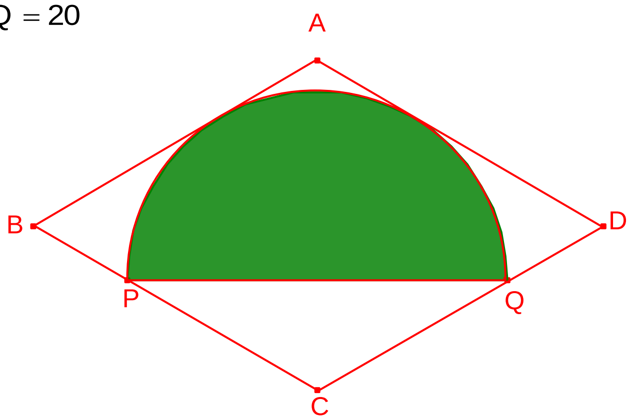
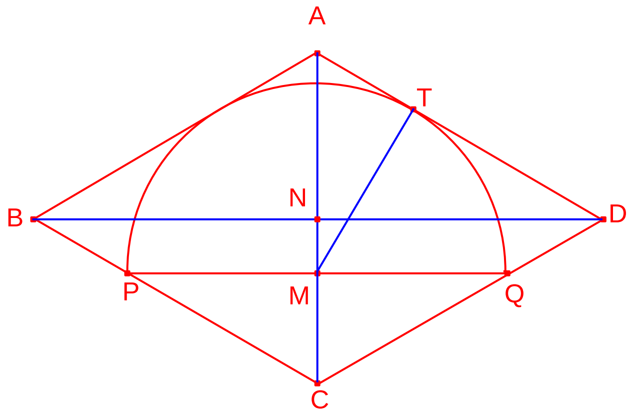
Problemes de Geometria per a l'ESO 201

2001.- En el dibuix, un semicercle de diàmetre $\overline{PQ}=20$ està inscrit en un rombe ABCD, tal que P i Q pertanyen als costat $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$, respectivament.
El semicercle és tangent als costats $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.
L'eix de simetria del semicercle coincideix amb la diagonal $\overline{AC}$.
Si $\angle CBA = 60^{o}$ determineu l'àrea del rombe.



Solució:

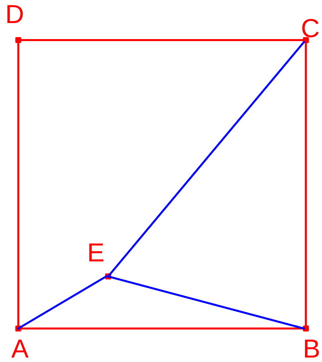


Si $\angle CBA = 60^{o}$ el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.
Aleshores, $\overline{AB}=\overline{AC}$.
Siga M el punt mig del diàmetre $\overline{PQ}$.
$\overline{PM}=10$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMC}$:
$\overline{CM}=\frac{10}{3}\sqrt{3}$.
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i el costat $\overline{AD}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATM}$:
$\overline{AM}=\frac{20}{3}\sqrt{3}$.
$\overline{AC}=\overline{CM}+\overline{AM}=10\sqrt{3}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{BD}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANB}$:
$\overline{BN}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}=15$.
$\overline{BD}=2\cdot\overline{BN}=30$.
L'àrea del rombe ABCD és:
$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}10\sqrt{3}\cdot 30=150\sqrt{3}\approx 259.81.$$

2002.- Siga E un punt interior del quadrat ABCD tal que $\overline{BE}$ és el doble de $\overline{AE}$ i $\overline{CE}$ el triple de $\overline{AE}$.

a) Calculeu la proporció entre $\overline{AE}$ i $\overline{DE}$.

b) Calculeu l'angle $\angle AEB$.



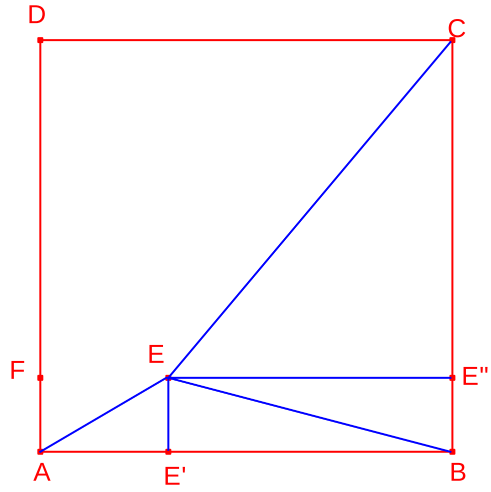
Solució:

Suposem que $\overline{AB}=1$.

Siga $\overline{AE}=x$, $\overline{BE}=2x$, $\overline{CE}=3x$.

Siga E' la projecció de E sobre el costat $\overline{AB}$. Siga $\overline{EE'}=a$.

Siga E" la projecció de E sobre el costat $\overline{BC}$. Siga $\overline{EE''}=b$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AE'E}$:

$$x^2=a^2+(1-b)^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BE'E}$:

$$4x^2=a^2+b^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CE''E}$:

$$9x^2=b^2+(1-a)^2 \qquad (3)$$

Efectuant $(1)+(3)-2\cdot(2)$:

$$x^2=-(a+b)+1 \qquad (4)$$

Efectuant $(3)-(1)$:

$$4x^2=b-a \qquad (5)$$

Resolent el sistema format per les expressions (4) (5) en les incògnites a, b:

$$\begin{cases} a+b=1-x^2 \\ -a+b=4x^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a=\dfrac{1-5x^2}{2} \\ b=\dfrac{1+3x^2}{2} \end{cases} \qquad (6)$$

Substituint les expressions (6) en l'expressió (2):

$$17x^4-10x^2+1=0 \qquad (7)$$

Resolent l'equació:

$$x^2=\frac{5-2\sqrt{2}}{17}, \text{ aleshores, } a=\frac{-4+5\sqrt{2}}{17}, \ b=\frac{16-3\sqrt{2}}{17}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFD}$:

$$\overline{DE}^2=(1-b)^2+(1-a)^2=a^2+b^2-2(a+b)+2=4x^2-2\left(1-x^2\right)+2=6x^2.$$

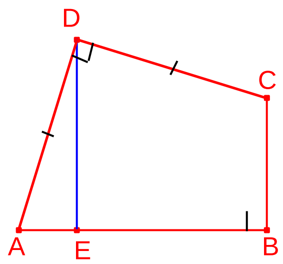
Aleshores, $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\dfrac{\sqrt{6x^2}}{x}=\sqrt{6}$.

$$\angle AEB=\operatorname{arctg}\frac{1-b}{a}+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\left(1+2\sqrt{2}\right)=135^{\circ}.$$

2003.- En la figura, ABCD és un quadrilàter tal que $\overline{AD} = \overline{DC}$ i $\angle ADC = \angle ABC = 90^{o}$.

El punt E és la projecció de punt D sobre el costat $\overline{AB}$.

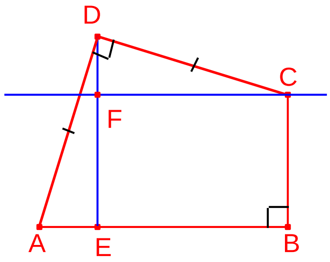
Si $\overline{DE} = 25$, calculeu l'àrea del quadrilàter ABCD.



Solució:

Siga F la projecció del punt C sobre $\overline{DE}$.

$\angle ADE = \angle FCD$, $\overline{AD} = \overline{DC}$.



Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{CFD}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CF} = \overline{DE} = 25$.

Siga $x = \overline{AE} = \overline{EF}$.

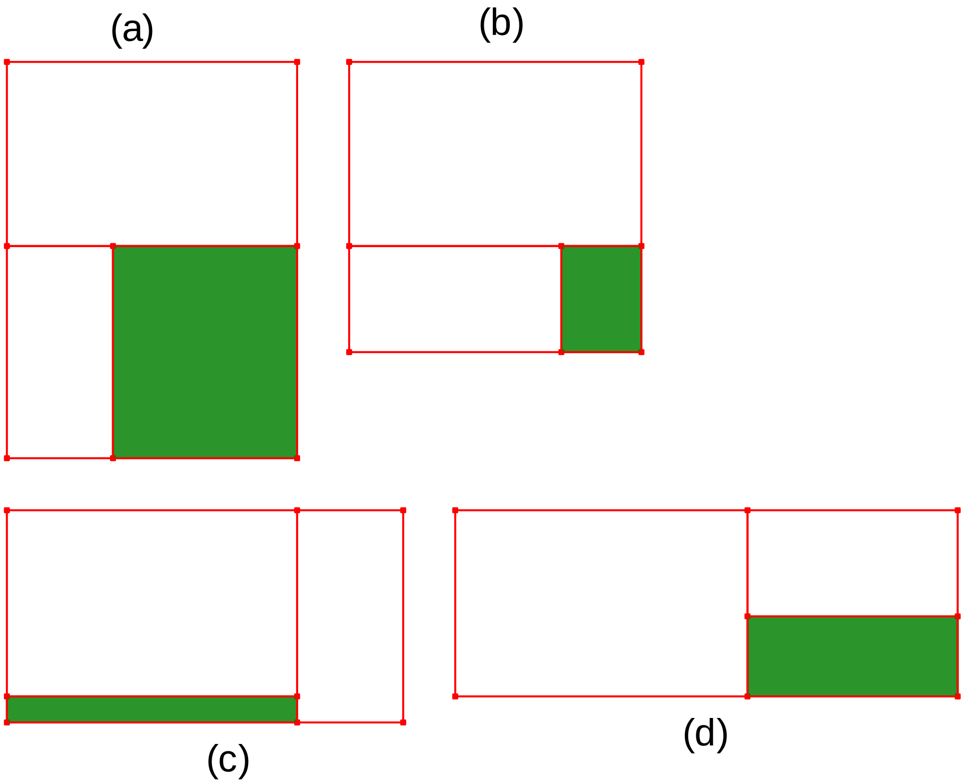
$\overline{CF} = 25 - x$.

L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma dels dels àrees del triangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{CFD}$ i el rectangle EBCF:

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{AEF} + S_{EBCF} = 2\frac{25x}{2} + 25(25 - x) = 625.$$

2004.- Tres rectangles es col·loquen mútuament adjacents i sense espais o superposicions per formar un rectangle més gran.
Un dels tres rectangles té dimensions de 70 per 110.
Un altre dels rectangles té dimensions 40 per 80.
a) Quin és el perímetre màxim del tercer rectangle?
b) Quin és el rectangle que fa màxim el rectangle total?

Solució:



Només hi ha quatre formes de formar un rectangle amb tres rectangles:
a) El rectangle que falta té dimensions 70 per 80.
Té perímetre 300 i l'àrea del rectangle gran és $150 \cdot 110 = 16500$.

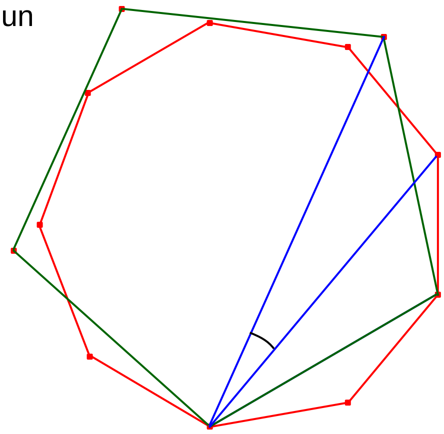
b) El rectangle que falta té dimensions 30 per 40.
Té perímetre 140 i l'àrea del rectangle gran és $110 \cdot 110 = 12100$.

c) El rectangle que falta té dimensions 110 per 10.
Té perímetre 240 i l'àrea del rectangle gran és $80 \cdot 150 = 12000$.

c) El rectangle que falta té dimensions 80 per 30.
Té perímetre 220 i l'àrea del rectangle gran és $70 \cdot 190 = 13300$.

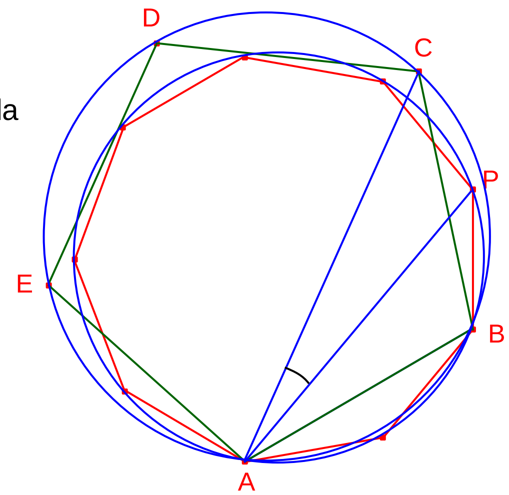
El de perímetre màxim és el (a).
El que fa l'àrea del rectangle exterior màxima és el (a).

2005.- En la següent figura hi ha un pentàgon regular i un polígon regular de 9 costats.
Determineu la mesura de l'angle marcat.



Solució:
Siga ABCDE el pentàgon regular.
$\angle CAB$ és l'angle inscrit de la circumferència inscrita al pentàgon que abraça un arc que és la quinta part de la circumferència:

$\angle CAB = \frac{1}{2}\frac{360^o}{5} = 36^o$.



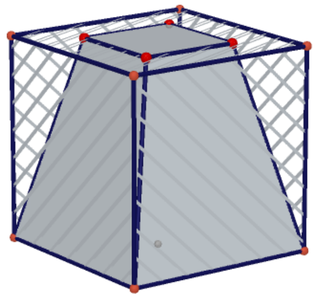
$\angle PAB$ és l'angle inscrit de la circumferència inscrita al enneàgon que abraça un arc que és la novena part de la circumferència:

$\angle PAB = \frac{1}{2}\frac{360^o}{9} = 20^o$.

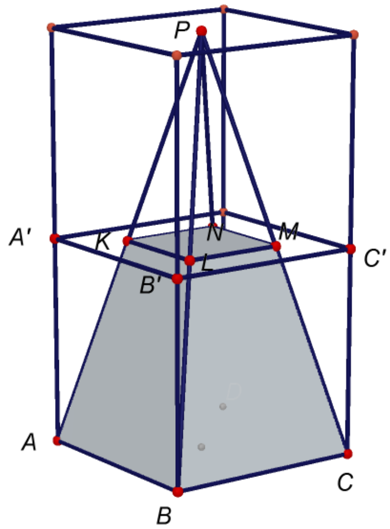
L'angle que cerquem és:

$\angle CAP = \angle CAB - \angle PAB = 36^o - 20^o = 16^o$.

2006.- En un cub s'ha inscrit una piràmide truncada tal que la cara superior és un quadrat de costat igual a la meitat del costat inferior.
Calculeu la proporció entre el volum de la piràmide truncada i el volum del cub.



Solució:
Siga $a=\overline{AB}$ l'aresta del cub ABCDA'B'C'D'.
El volum del cub és:
$V_{cub}=a^3$.
Construïm un cub sobre el cub que conté la piràmide truncada.
Considerem el centre P de la cara superior del cub superior.
Si unim el punt P amb els vèrtexs A, B, C, D del cub inferior els segments $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ i $\overline{DP}$ tallen la cara superior del cub ABCDA'B'C'D' en els punts K, L, M, N, respectivament.
Les pirámides ABCDP, K, L, M, N són semblants i de raó 2:1



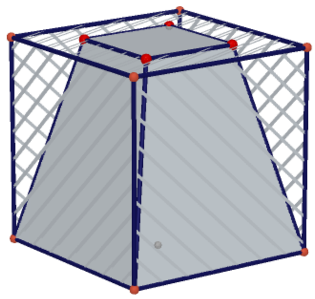
Aleshores, KLMN és la cara superior de la piràmide truncada del problema.
El volum de la piràmide truncada és igual al volum de la piràmide ABCDP menys el volum de la piràmide KLMNP.

$$V_{piram.trunc}=\frac{1}{3}a^2\cdot 2a-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 a=\frac{7}{12}a^3.$$

La proporció entre el volum de la piràmide truncada i el volum del cub és:

$$\frac{V_{piram.trunc}}{V_{cub}}=\frac{7}{12}.$$

2007.- En un cub s'ha inscrit una piràmide truncada tal que la cara superior és un quadrat de costat igual a la meitat del costat inferior i les cares laterals són trapezis isòsceles iguals Calculeu la proporció entre l'àrea de la piràmide truncada i l'àrea del cub.



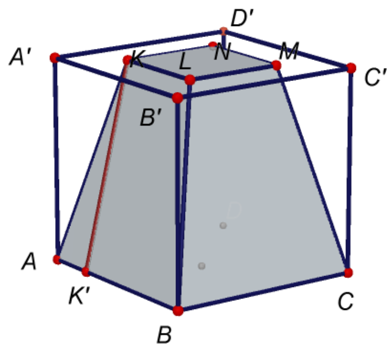
Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ l'aresta del cub ABCDA'B'C'D'.

L'àrea del cub és:

$S_{cub}=6a^2$.

Siga ABCDKLMN la piràmide truncada, $\overline{KL}=\frac{1}{2}a$.



$\overline{A'C'}=a\sqrt{2}$.

$\overline{KM}=a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{A'K}=\frac{\overline{A'C'}-\overline{KM}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AA'K}$:

$\overline{AK}=\frac{3\sqrt{2}}{4}a$.

Siga K' la projecció de K sobre l'aresta $\overline{AB}$.

$\overline{AK'}=\frac{\overline{AB}-\overline{KL}}{2}=\frac{1}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AK'K}$:

$$\overline{KK'}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}a.$$

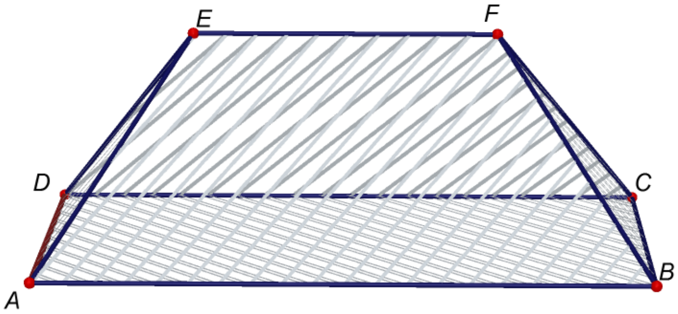
L'àrea de la piràmide truncada ABCDKLMN és igual a la suma de l'àrea del quadrat ABCD més l'àrea del quadrat KLMN més quatre vegades l'àrea del trapezi isòsceles ABLK:

$$S_{piram.trunc}=a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2+4\left(\frac{a+\frac{1}{2}a}{2}\frac{\sqrt{17}}{4}a\right)=\frac{5+3\sqrt{17}}{4}a^2.$$

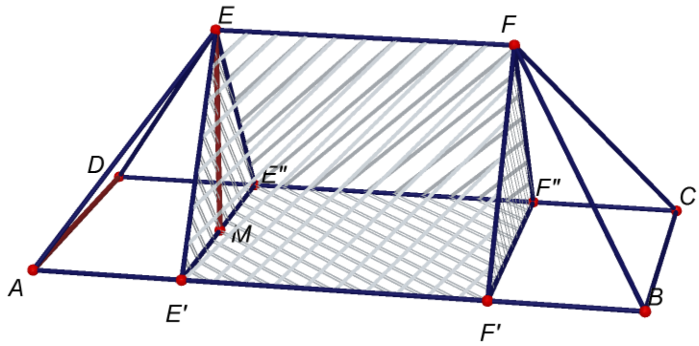
La proporció entre les àrees de la piràmide truncada i el cub és:

$$\frac{S_{piram.trunc}}{S_{cub}}=\frac{\frac{5+3\sqrt{17}}{4}a^2}{6a^2}=\frac{5+3\sqrt{17}}{24}.$$

2008.- En la figura, ABCD és un rectangle $\overline{AB}=20$, $BC=10$, $A\overset{\Delta}{D}E$ i $B\overset{\Delta}{C}F$ són triangles equilàters i $\overline{EF}=10$ i és paral·lel al segment $\overline{AB}$.
Calculeu el volum del cos.



Solució:



Siga E' la projecció de E sobre $\overline{AB}$.
Siga F' la projecció de F sobre $\overline{AB}$.
Siga E" la projecció de E sobre $\overline{CD}$.
Siga F" la projecció de F sobre $\overline{CD}$.

$$\overline{AE'}=\overline{DE''}=\overline{BF'}=\overline{CF''}=\frac{\overline{AB}-\overline{EF}}{2}=5.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{D'}E$:

$$\overline{EE'}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}.$$

Siga M el punt mig del segment $\overline{E'E''}$.

$$\overline{E'M}=\frac{1}{2}\overline{BC}=5.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $A\overset{\Delta}{D'}E$:

$$\overline{EM}=\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2-5^2}=5\sqrt{2}.$$

El volum de la figura és igual a la suma del volum del prisma de EE'E"FF'F"" de base triangular més dues vegades el volum de la piràmide AE'E"DE de base rectangular.
El volum del prisma EE'E"FF'F"" és:

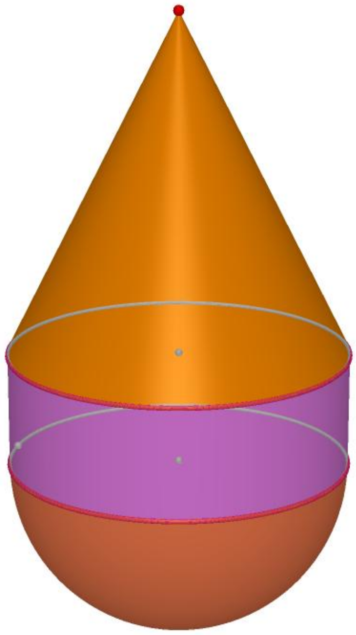
$$V_{EE'E''FF'F''}=\frac{1}{2}\overline{E'E''}\cdot\overline{EM}\cdot\overline{EF}=\frac{1}{2}10\cdot5\sqrt{2}\cdot10=250\sqrt{2}.$$

El volum de la piràmide AE'E"DE és:

$$V_{AE'E''DE}=\frac{1}{3}\overline{AE'}\cdot\overline{E'E''}\cdot\overline{EM}=\frac{1}{3}5\cdot10\cdot5\sqrt{2}=\frac{250}{3}\sqrt{2}.$$

El volum de la figura és:

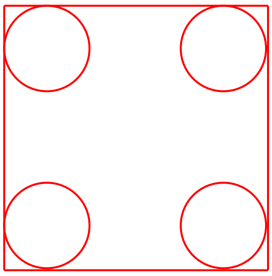
$$V=250\sqrt{2}+2\left(\frac{250}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{1250}{3}\sqrt{2}.$$



2009.- Sobre una semiesfera de radi 3 hi ha superposat un cilindre i sobre la cara superior del cilindre un con recte.
Si la semiesfera el cilindre i el con tenen el mateix volum quina és l'altura de la figura.

Solució:
Siga $r = 3$ el radi de les tres figures.
Siga h_1 l'altura del cilindre.
Siga h_2 l'altura del con.
L'altura de la figura és:
$h = r + h_1 + h_2$.
Els tres volums són iguals, aleshores:
$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h_2 .$$
Aleshores:
$$h_1 = \frac{2}{3}r , \; h_2 = 2r .$$
L'altura de la figura és:
$$h = r + h_1 + h_2 = r + \frac{2}{3}r + 2r = \frac{11}{3}r = 11.$$

2010.- S'ha tallat un disc de radi de 3 cm des de cada cantonada d'una planxa quadrada de 18 cm com es mostra a la figura. Les peces menudes que cauen a les cantonades van ser llançades. Quina és l'àrea de la zona de la resta de la planxa?
KöMaL, K563



Solució:
Les peces que cauen són 4 cercles i 4 superfícies que juntes amb un cercle formen un quadrat de 6 cm de costat.

L'àrea de la zona que resta en la planxa és igual a l'àrea del quadrat de costat 18 menys l'àrea de 3 cercles de radi 3, menys l'àrea d'un quadrat de costat 6:
$S = 18^2 - \left(3 \cdot \pi 3^2 - 6^2\right) = 288 - 27\pi \approx 203.18\,\text{cm}^2$.