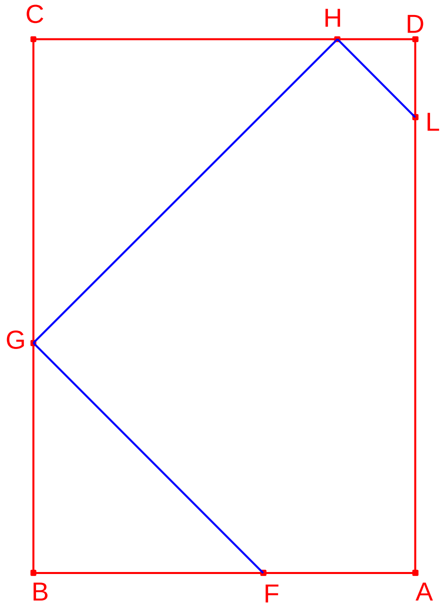
Problemes de Geometria per a l'ESO 202

2011.- Siguen F, G, H i L punts del rectangle ABCD tals que BG, GH i HL formen angles de 45º amb els costats.

Si $\overline{AF}=2$, $\overline{GC}=4$.

Calculeu la mesura del segment $\overline{LA}$.



Solució:

Siga $x=\overline{BF}=\overline{BG}$, $y=\overline{DL}=\overline{DH}$.

$\overline{BA}=\overline{CD}$, aleshores:

$2+x=4+y$.

$x-y=2$.

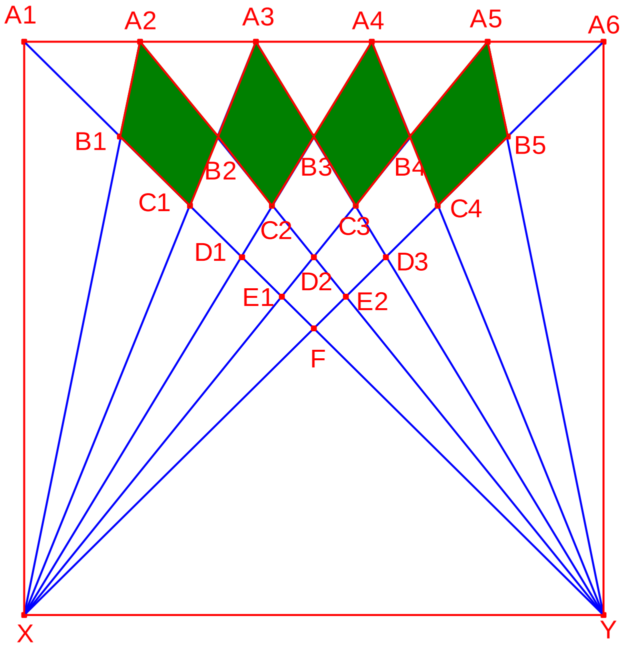
$\overline{BC}=\overline{AD}$, aleshores:

$x+4=y+\overline{AL}$.

$\overline{AL}=x-y+4=2+4=6$

2012.- El polígon A_1A_6YX és un quadrat.

El costat $\overline{A_1A_6}$ s'ha dividit en cinc parts iguals amb ajut dels punts A_2, A_3, A_4 i A_5.
El punt X s'uneix amb segments amb els punts A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6.
El punt Y s'uneix amb segments amb els punts A_1, A_2, A_3, A_4 i A_5.
Siguen els punts B_i, C_i, D_i, E_5 i F els punts intersecció dels segments, com mostra la figura.



Determineu la raó de proporcionalitat entre la suma de les àrees dels quadrilàters ombrejats $B_1A_2B_2C_1$, $B_2A_3B_3C_2$, $B_3A_4B_4C_3$ i $B_4A_5B_5C_4$ i l'àrea del quadrat A_1A_6YX.

Crux Mathematicorum 4297

Solució:

Siga $\overline{XY} = 5c$ costat del quadrat A_1A_6YX.

L'àrea del quadrat A_1A_6YX és:

$S_{B_1A_2YX} = 25c^2$.

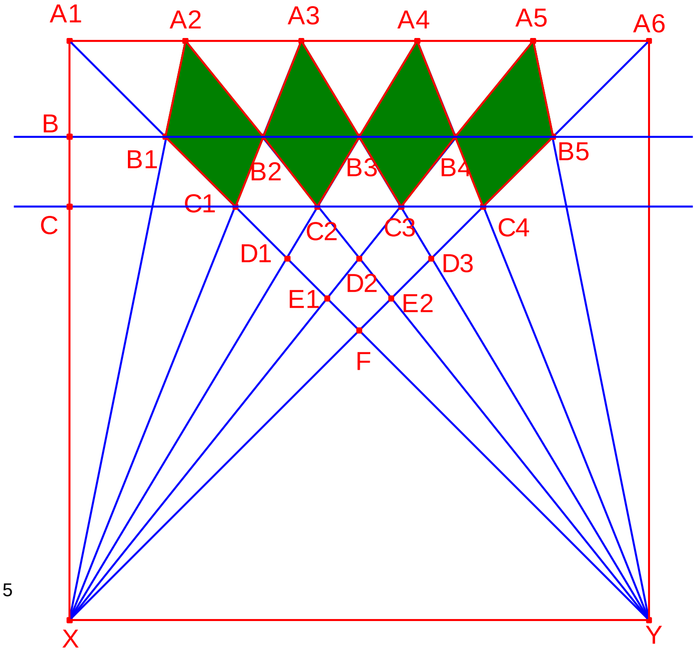
Els triangles $\overset{\Delta}{XYB_1}$ $\overset{\Delta}{A_2A_1B_1}$ són semblants i la raó de proporcionalitat és 5:1.

Siga B la projecció de B_1 sobre $\overline{XA_1}$.

Aleshores: $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{XB}} = \dfrac{1}{5}$. Aleshores, $\dfrac{\overline{BA_1}}{\overline{XA_1}} = \dfrac{1}{6}$.

$\overline{BA_1} = \dfrac{5}{6}c$.

Anàlogament, B és la projecció de B_2, B_3, B_4, B_5 sobre el costat $\overline{XA_1}$.



$A_1\overset{\Delta}{A_2}B_1$, $A_2\overset{\Delta}{A_3}B_2$, $A_3\overset{\Delta}{A_4}B_3$, $A_4\overset{\Delta}{A_5}B_4$, $A_5\overset{\Delta}{A_6}B_5$ tenen la mateixa àrea:

$S_{A_1A_2B_1} = \frac{1}{2}c \cdot \frac{5}{6}c = \frac{5}{12}c^2$.

Els triangles $X\overset{\Delta}{Y}C_1$ $A_3\overset{\Delta}{A_1}C_1$ són semblants i la raó de proporcionalitat és 5:2.

Siga C la projecció de C_1 sobre $\overline{XA_1}$.

Aleshores: $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{XC}} = \frac{2}{5}$. Aleshores, $\frac{\overline{CA_1}}{\overline{XA_1}} = \frac{2}{7}$.

$\overline{CA_1} = \frac{10}{7}c$.

Anàlogament, C és la projecció de C_2, C_3, C_4 sobre el costat $\overline{XA_1}$.

$A_1\overset{\Delta}{A_3}c_1$, $A_2\overset{\Delta}{A_4}C_2$, $A_3\overset{\Delta}{A_5}C_3$, $A_4\overset{\Delta}{A_6}C_4$ tenen la mateixa àrea:

$S_{A_1A_2B_1} = \frac{1}{2}2c \cdot \frac{10}{7}c = \frac{10}{7}c^2$.

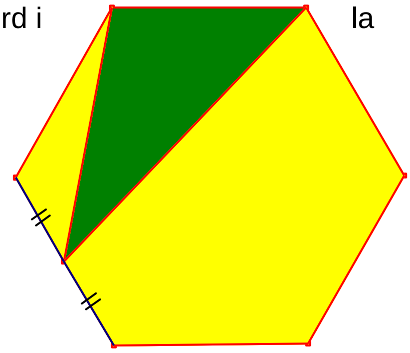
Els quadrilàters ombrejats $B_1A_2B_2C_1$, $B_2A_3B_3C_2$, $B_3A_4B_4C_3$ i $B_4A_5B_5C_4$ tenen la mateixa àrea:

$S_{B_1A_2B_2C_1} = S_{A_1A_2B_1} - 2 \cdot S_{A_1A_2B_1} = \frac{10}{7}c^2 - 2 \cdot \frac{5}{12}c^2 = \frac{25}{42}c^2$.

La raó entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat és:

$$\frac{S_{B_1A_2B_2C_1}}{S_{A_1A_6YX}} = \frac{\frac{25}{42}c^2}{25c^2} = \frac{1}{42}.$$

2013.- Calculeu la proporció entre les àrees del triangle verd i la resta de l'hexàgon pintada de color groc.

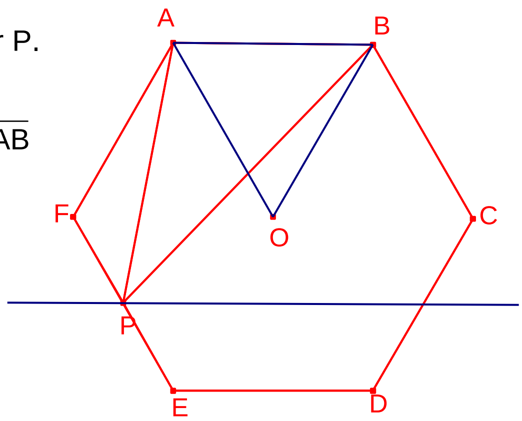


Solució:

Siga ABCDEF l'hexàgon regular de centre O.

Tracem la recta paral·lela al costat $\overline{AB}$ que passa per P.

Aquesta recta és paral·lela mitjana de trapezi CFED.



Les altures dels triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{ABP}$ sobre la base $\overline{AB}$ estan en proporció 2:3.

Aleshores:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{ABO}} = \frac{3}{2}.$$

L'àrea de l'hexàgon regular és:

$$S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{ABO}.$$

L'àrea ombrejada de groc és:

$$S_{groc} = S_{ABCDEF} - S_{ABP} = 6 \cdot S_{ABO} - S_{ABP}.$$

La proporció entre les àrees del triangle verd i la resta de l'hexàgon pintada de color groc és:

$$\frac{S_{ABP}}{S_{groc}} = \frac{\frac{3}{2}S_{ABO}}{6 \cdot S_{ABO} + \frac{3}{2}S_{ABO}} = \frac{1}{3}.$$

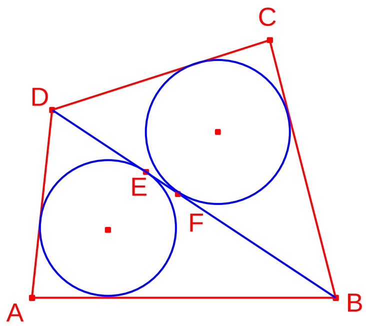
2014.- Siga el quadrilàter ABCD, $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=7$, $\overline{CD}=6$, $\overline{DA}=5$.

Siga E el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ i el costat $\overline{BD}$.

Siga F el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ i el costat $\overline{BD}$.

Calculeu la mesura $\overline{EF}$.

KöMaL, K566.



Solució:

Per ser E punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ i el costat $\overline{BD}$:

$$\overline{DE}=\frac{\overline{BD}+\overline{DA}-\overline{AB}}{2}.$$

$$\overline{DE}=\frac{\overline{BD}+5-8}{2} \qquad (1)$$

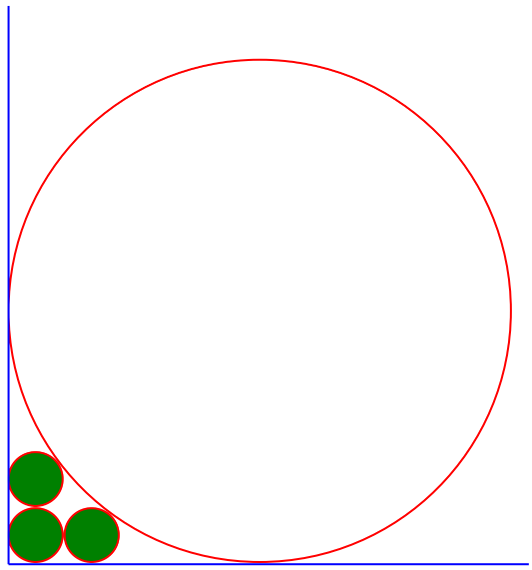
Per ser F punt de tangència de la circumferència incsrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ i el costat $\overline{BD}$:

$$\overline{DF}=\frac{\overline{BD}+\overline{CD}-\overline{BC}}{2}.$$

$$\overline{DF}=\frac{\overline{BD}+6-7}{2} \qquad (2)$$

Restant les expressions (1) i (2):

$$\overline{EF}=\overline{DF}-\overline{DE}=\frac{\overline{BD}+6-7}{2}-\frac{\overline{BD}+5-8}{2}=1.$$

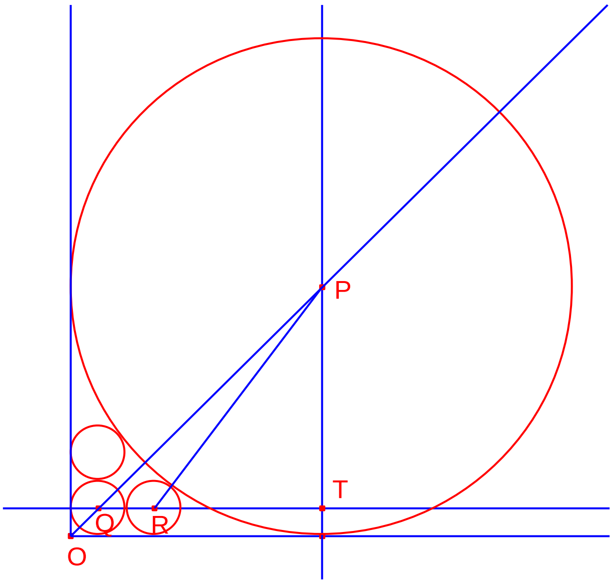


2015.- Tres circumferències de radi s estan

dibuixades en el primer quadrant del plànol.
Una primera circumferència es tangent als dos eixos una segona circumferència és tangent a l'eix OX i a la circumferència anterior i el tercer és tangent a l'eix OX i a la primera circumferència.
Una circumferència de radi $r > s$ és tangent als dos eixos i a la segona i tercera circumferència.

Calculeu la proporció $\frac{r}{s}$.

Solució:



Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{RTP}$:

$\overline{PT} = r - s$, $\overline{RT} = r - 3s$, $\overline{PR} = r + s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$(r+s)^2 = (r-s)^2 + (r-3s)^2$.

Simplificant:

$r^2 - 10rs + 9s^2 = 0$.

Dividint l'equació per s^2:

$\left(\frac{r}{s}\right)^2 - 10\left(\frac{r}{s}\right) + 9 = 0$.

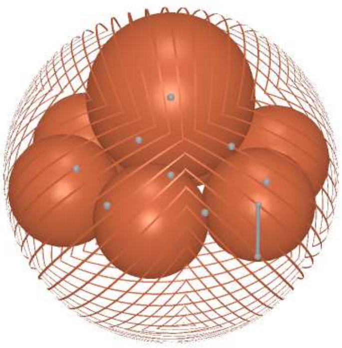
Resolent l'equació:

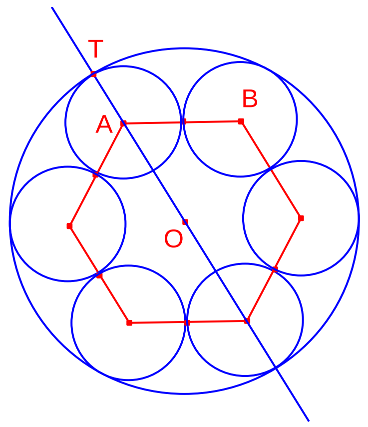
$\frac{r}{s} = 9$.

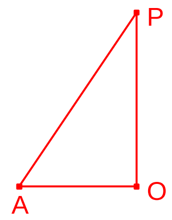
2016.- Sis esferes de radi 1 es posicionen de manera que els seus centres estan en els vèrtexs d'un hexàgon regular de longitud lateral 2.

Les sis esferes són internament tangents a una esfera més gran del centre el centre de l'hexàgon. Una vuitena esfera és externament tangent a les sis esferes més petites i internament tangents a l'esfera més gran.
Calculeu el radi d'aquesta vuitena esfera.

Solució:







Considerem A i B els centres de dues esferes tangents de radis 1 i centres en un hexàgon regular de centre O.

$\overline{OA} = 2$.

El radi de l'esfera tangent exterior a les 6 esferes i de centre O és:

$\overline{OT} = 3$.

El centre de la vuitena esfera té el centre en la recta perpendicular al plànol de l'hexàgon regular que passa pel centre O.

Siga P el centre de l'esfera i s el seu radi.

$\overline{OP} = 3 - s$, $\overline{AP} = 1 + s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

$(s+1)^2 = 2^2 + (3-s)^2$.

Simplificant:

$8s = 12$.

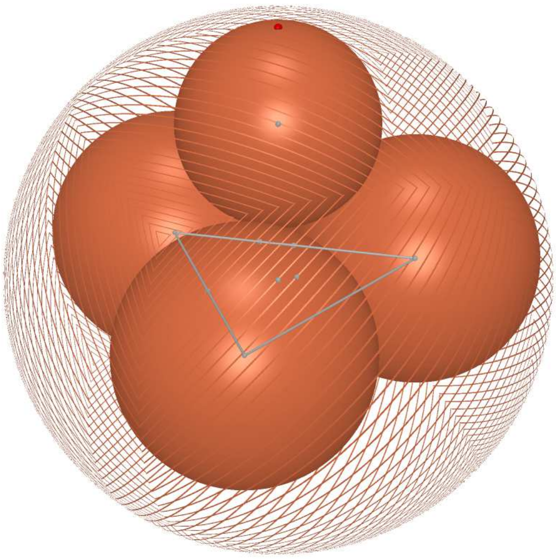
Resolent l'equació:

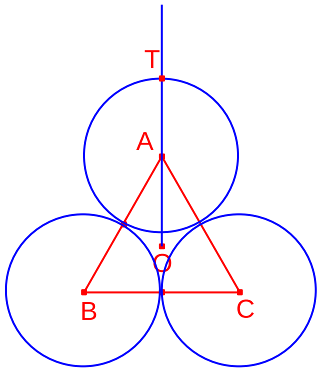
$s = \frac{3}{2}$.

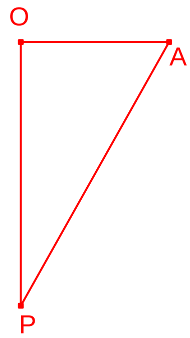
2017.- Tres esferes de radi 1 es posicionen de manera que els seus centres estan en els vèrtexs d'un triangle equilàter de costat 2.

Les tres esferes són internament tangents a una esfera més gran del centre el centre del triangle equilàter. Una cinquena esfera és externament tangent a les tres esferes més petites i internament tangents a l'esfera més gran.
Calculeu el radi d'aquesta cinquena esfera.

Solució:







Considerem A, B i C els centres de tres esferes tangents de radis 1 i centres en un triangle equilàter de centre O.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$ del triangle equilàter.

$\overline{AM} = \sqrt{3}$.

$\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El radi de l'esfera tangent exterior a les 6 esferes i de centre O és:

$\overline{OT} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El centre de la vuitena esfera té el centre en la recta perpendicular al plànol del triangle equilàter passa pel centre O.
Siga P el centre de l'esfera i s el seu radi.

$\overline{OP} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - s$, $\overline{AP} = 1 + s$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

$$(s+1)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - s)\right)^2 .$$

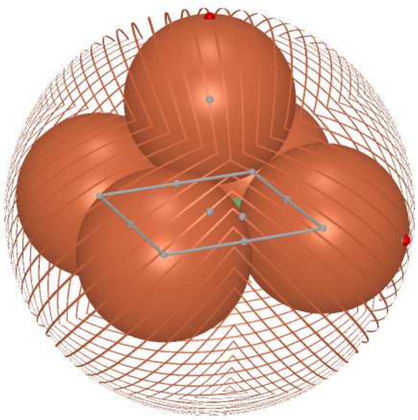
Resolent l'equació:

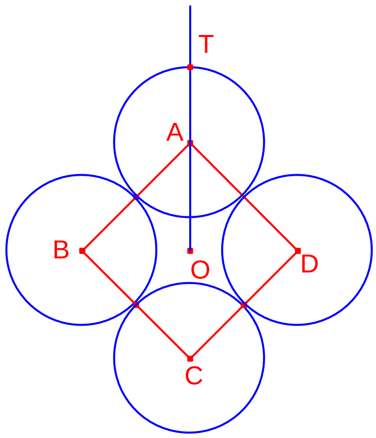
$s = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

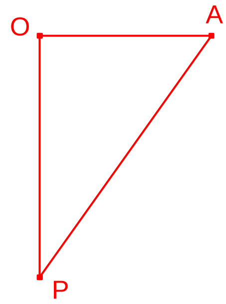
2018.- Quatre esferes de radi 1 es posicionen de manera que els seus centres estan en els vèrtexs d'un quadrat de costat 2.

Les quatre esferes són internament tangents a una esfera més gran del centre el centre del quadrat. Una sisena esfera és externament tangent a les sis esferes més petites i internament tangents a l'esfera més gran.
Calculeu el radi d'aquesta sisena esfera.

Solució:







Considerem A, B, C i D els centres de les quatre esferes tangents de radis 1 i centres en un quadrat de centre O.

$\overline{OA} = \sqrt{2}$.

El radi de l'esfera tangent exterior a les 6 esferes i de centre O és:

$\overline{OT} = 1 + \sqrt{2}$.

El centre de la vuitena esfera té el centre en la recta perpendicular al plànol del quadrat que passa pel centre O.

Siga P el centre de l'esfera i s el seu radi.

$\overline{OP} = 1 + \sqrt{2} - s$, $\overline{AP} = 1 + s$.

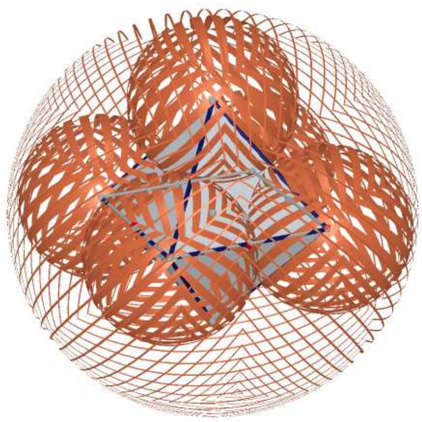
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOP}$:

$(s+1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{2} - s\right)^2$.

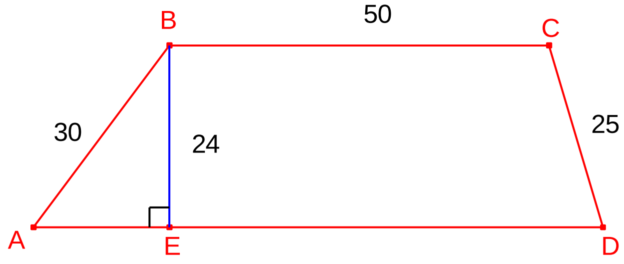
Resolent l'equació:

$s = 1$.

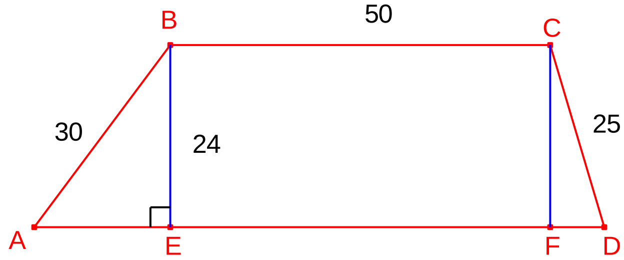
Notem que el centre de la quinta circumferència forma part de l'octògon regular de vèrtexs A, B, C i D.



2019.- Calculeu el perímetre i l'àrea del trapezi ABCD.



Solució:



Siga F la projecció de C sobre el costat $\overline{AD}$.

$\overline{CF} = 24$, $\overline{EF} = 50$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$:

$\overline{AE} = 18$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CFD}$:

$\overline{FD} = 7$.

$\overline{AD} = 18 + 50 + 7 = 75$.

El perímetre del trapezi és:

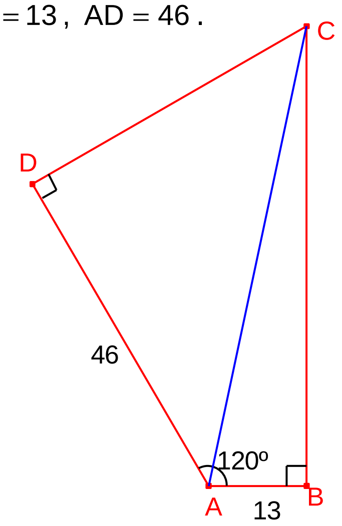
$P_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{Cd} + \overline{AB} = 30 + 50 + 25 + 75 = 180$.

L'àrea del trapezi és:

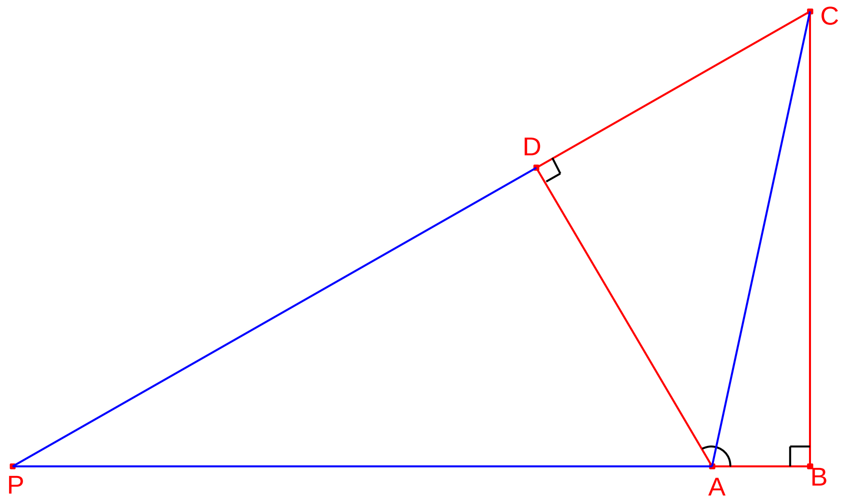
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\overline{BE} = \frac{75 + 50}{2} \cdot 24 = 1500.$$

2020.- En el quadrilàter $ABCD$, $A = 120^\circ$, $B = D = 90^\circ$, $\overline{AB} = 13$, $\overline{AD} = 46$.

Calculeu la mesura de la diagonal $\overline{AC}$.



Solució:



Siga P la intersecció de les rectes AB i CD.

$\angle APD = 30^\circ$.

$\overline{PA} = 2 \cdot \overline{AD} = 2 \cdot 46 = 92$.

$\overline{PB} = 92 + 13 = 105$.

$\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{PB} = 35\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC}^2 = 13^2 + \left(35\sqrt{3}\right)^2 = 3844$.

$\overline{AC} = \sqrt{3844} = 62$.