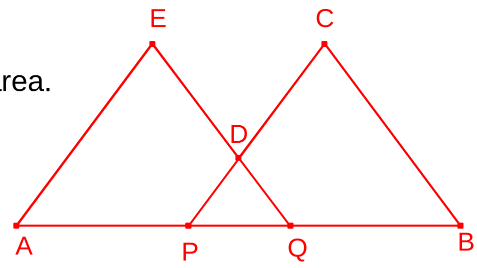
Problemes de Geometria per a l'ESO 203

2021.- En la figura, $\overline{AE}=\overline{EQ}=\overline{BC}=\overline{CP}=10$, $\overline{AQ}=\overline{BP}=12$.
Els punts A, P, Q i B estan alineats.
Si el perímetre del pentàgon ABCDE és 52, calculeu la seua àrea.



Solució:

Els triangles, isòsceles $\overset{\Delta}{AEQ}$, $\overset{\Delta}{PCB}$ són iguals.

Els triangles $\overset{\Delta}{AEQ}$, $\overset{\Delta}{PBD}$ són semblants.

Siga $\overline{PQ}=x$.

$$\overline{PD}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AQ}}x=\frac{5}{6}x.$$

$$\overline{DE}=\overline{DC}=10-\frac{5}{6}x.$$

El perímetre del pentàgon ABCDE és 52:

$64-\frac{5}{6}x=52$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{9}{2}.$$

Aplicant la fórmula d'Heró l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEQ}$ és:

$$S_{AEQ}=\frac{\sqrt{32\cdot 8\cdot 12\cdot 12}}{4}=48.$$

$$\frac{S_{PDQ}}{S_{AEQ}}=\left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}\right)^2=\left(\frac{3}{8}\right)^2.$$

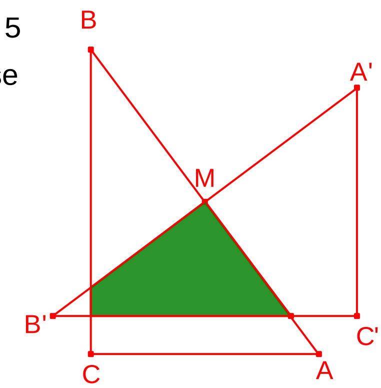
$$S_{PDQ}=\frac{9}{64}48=\frac{27}{4}.$$

L'àrea del pentàgon ABCDE és:

$$S_{ABCDE}=2\cdot S_{AEQ}-S_{PDQ}=2\cdot 48-\frac{27}{4}=\frac{357}{4}.$$

2022.- El triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=4$, $\overline{AB}=5$ l'hem girat 90º al voltant del punt mig M del costat $\overline{AB}$ formant-se un nou triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'B'C'}$.

Calculeu l'àrea intersecció dels dos triangles.

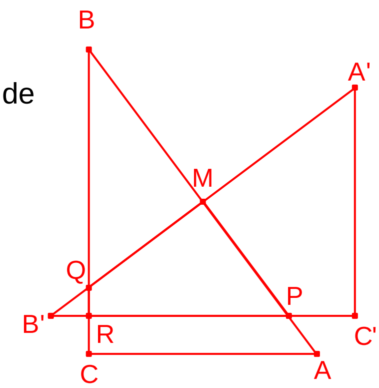


Solució:

Siga PMQR el quadrilàter intersecció dels dos triangles rectangles.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BMQ}$, $\overset{\Delta}{B'MP}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{QM}=\overline{PM}$.



Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PB'M}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{3}{4}=\frac{\overline{PM}}{\overline{B'M}}$. Aleshores, $\overline{PM}=\overline{QM}=\frac{3}{4}\frac{5}{2}=\frac{15}{8}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBR}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{3}{5}=\frac{\overline{PR}}{\overline{BP}}$. Aleshores, $\overline{PR}=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{2}+\frac{18}{8}\right)=\frac{21}{8}$.

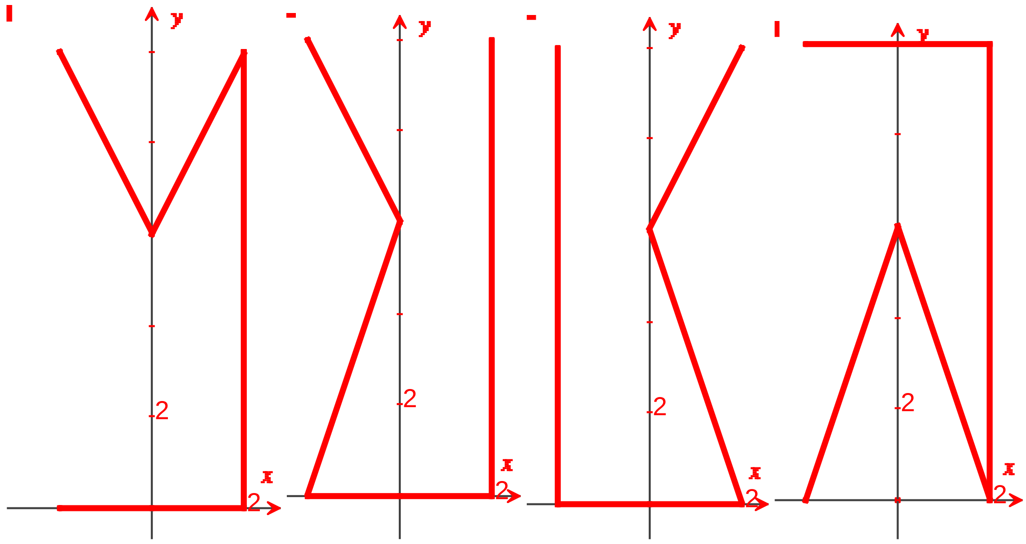
$\frac{4}{3}=\frac{\overline{BR}}{\overline{PR}}$. Aleshores, $\overline{BR}=\frac{4}{3}\frac{21}{8}=\frac{7}{2}$.

L'àrea del quadrilàter PMQR és igual a l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBR}$ menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BMQ}$:

$$S_{PMQR}=S_{BRP}-S_{BMQ}=\frac{\overline{PR}\cdot\overline{BR}}{2}-\frac{\overline{BM}\cdot\overline{QM}}{2}=\frac{\frac{21}{8}\cdot\frac{7}{2}}{2}-\frac{\frac{5}{2}\frac{18}{8}}{2}=\frac{9}{4}.$$

2023.- Determineu el pentàgon còncau d'àrea màxima que té els vèrtex en els punts $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(2,10)$, $(0, 6)$, $(-2, 10)$.

Solució:
Hi ha 4 possibilitats de formar un pentàgon còncau.



L'àrea del rectangle que formen els vèrtexs $(-2, 0)$. $(2, 0)$, $(2,10)$, $(-2, 10)$, que els conté és 40.

Cadascun del pentàgon al rectangle anterior s'ha de restar l'àrea d'un triangle:

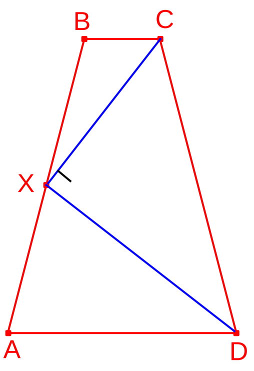
El primer té àrea: $S_1 = 40 - \frac{4 \cdot 4}{2} = 32$.

El segon té àrea: $S_2 = 40 - \frac{10 \cdot 2}{2} = 30$.

El tercer té àrea $S_3 = S_2 = 30$.

El quart té àrea $S_4 = 40 - \frac{4 \cdot 6}{2} = 28$.

El primer pentàgon té àrea màxima.



2024.- Siga el trapezi isòsceles ABCD.

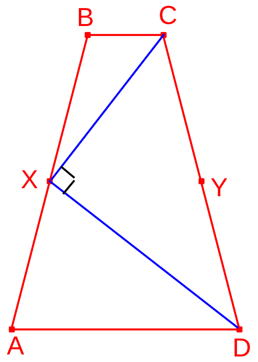
Siga X en el costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AX}=\overline{BX}=1$ i $\angle CXD=90^{o}$.

Determineu el perímetre del trapezi ABCD.

Solució:

$\overline{CD}=\overline{AB}=2$.

La mitjana d'un triangle rectangle referida a l'angle recte mesura la meitat de la hipotenusa.



Siga Y el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Aleshores, $\overline{XY}=\frac{1}{2}\overline{CD}=1$.

$\frac{\overline{BX}}{\overline{CY}}=\frac{\overline{AX}}{\overline{CY}}=1$.

Aleshores, $\overline{XY}$ és paral·lela mitjana del trapezi ABCD.

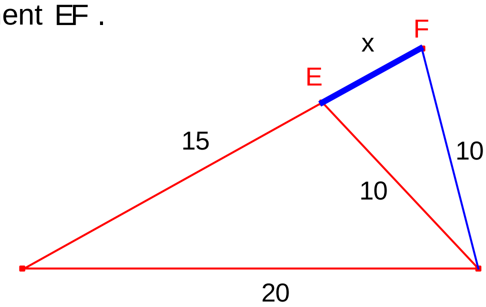
$\frac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}=\overline{XY}=1$.

$\overline{BC}+\overline{AD}=2$.

El perímetre del trapezi és:

$P_{ABCD}=2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AD}=2\cdot 2+2=6$.

2025.- En la figura, calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$.



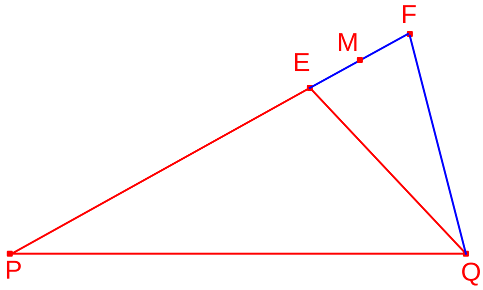
Solució:

Siga $\overline{PQ}=20$, $\overline{PE}=15$, $\overline{QE}=\overline{QF}=10$.

El triangle $\overset{\Delta}{QEF}$ és isòsceles.

Siga M el punt mig del segment $\overline{EF}$. $\angle EMQ=90^{o}$.

Siga $\overline{QM}=y$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMQ}$:

$$20^2=y^2+\left(15+\frac{x}{2}\right)^2 .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EMQ}$:

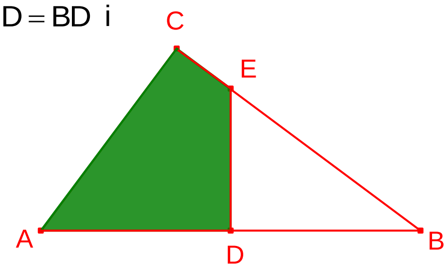
$$10^2=y^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 .$$

Resolent el sistema format per les dues expressions:

$x=5$.

2026.- En la figura, $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle $C=90º$, $\overline{AD}=\overline{BD}$ i $\overline{DE}\perp\overline{AB}$.

Si $\overline{AC}=12$ i $AB=20$, calculeu l'àrea del quadrilàter ADEC.



Solució:

$\overline{AD}=\overline{BD}=10$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{BC}=16$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{EBD}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DE}}{10}=\frac{12}{16}$. Aleshores, $\overline{DE}=\frac{15}{2}$.

$\frac{\overline{BE}}{10}=\frac{20}{16}$. Aleshores, $\overline{BE}=\frac{25}{2}$.

$\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=16-\frac{25}{2}=\frac{7}{2}$.

L'àrea del quadrilàter ADEC és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$ i $\overset{\Delta}{ACE}$:

$S_{ADEC}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\cdot 12\cdot\frac{7}{2}=\frac{117}{2}=58.5$.

2027.- Siguen A i B les interseccions d'una circumferència de radi 2r i centre O i una circumferència de radi $r+1$ que passa per O.

Si $\overline{AB}$ és el diàmetre de la circumferència de radi $r+1$, calculeu el valor de r.

Solució:

$\overline{AB}$ és perpendicular a la recta que passa pels centres de les dues circumferències.

Si $\overline{AB}$ és el diàmetre de la circumferència de radi $r+1$ el centre P de la circumferència és el punt mig del segment $\overline{AB}$.

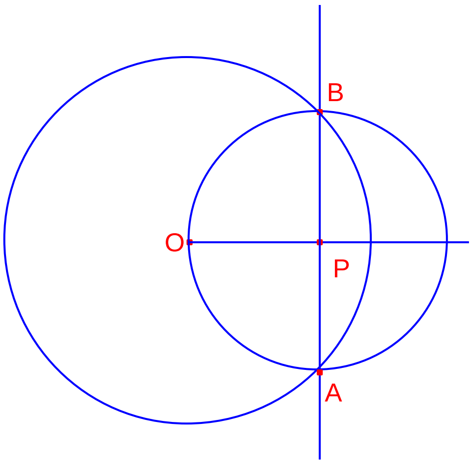
$\overline{OB}=2r$, $\overline{OP}=\overline{PB}=r+1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPB}$:

$(2r)^2=2(r+1)^2$.

Resolent l'equació:

$r=1+\sqrt{2}$.



2028.- Siga M la intersecció de les rectes PS i RT passant pels vèrtexs d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ i un quadrat QRST.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{PTM}$ és isòsceles.

Solució:

Considerarem dos casos.

a) Que el quadrat QRST siga exterior al triangle equilàter.

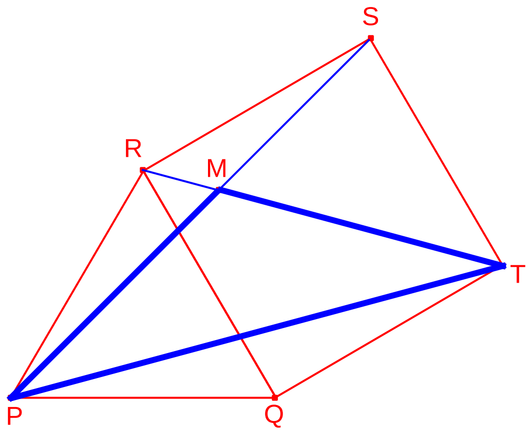
$\angle PQT = 60^o + 90^o = 150^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és isòsceles:

$\angle TPQ = \angle PTQ = 15^o$.

$\angle RTQ = 45^o$.

$\angle PTM = \angle RTQ - \angle PTM = 30^o$.



$\angle PRS = 60^o + 90^o = 150^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{PRS}$ és isòsceles:

$\angle RPS = \angle RSP = 15^o$.

$\angle MPT = \angle RPQ - \angle RPS - \angle TPQ = 30^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PTM}$ és isòsceles, $\overline{PM} = \overline{TM}$

b) Que el quadrat QRST continga el triangle equilàter.

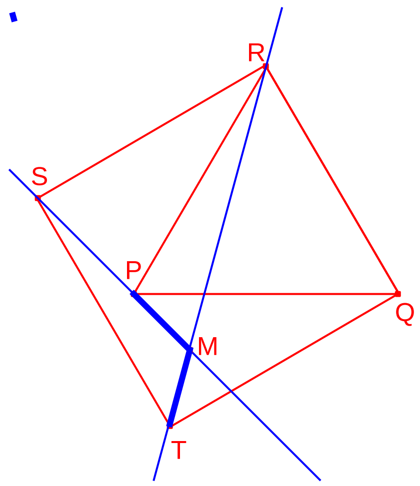
$\angle SRP = 90^o - 60^o = 30^o$.

El triangle $\overset{\Delta}{SPR}$ és isòsceles:

$\angle RSP = \angle SPR = 75^o$.

$\angle PST = 90^o - 75^o = 15^o$

$\angle STP = \angle PST = 15^o$.



$\angle STR = 45^o$.

$\angle PTM = \angle STR - \angle STP = 45^o - 15^o = 30^o$.

$\angle MPT = \angle STP + \angle PST = 15^o + 15^o = 30^o$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PTM}$ és isòsceles, $\overline{PM} = \overline{TM}$

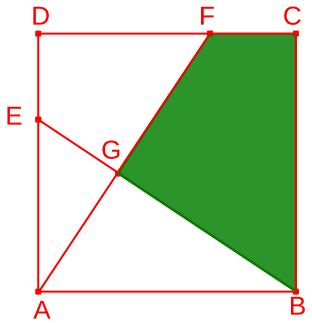
2029.- Siga ABCD un quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siguen D i E dos punts dels costats $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{AE} = \frac{2}{3}\overline{AD}$, $\overline{DF} = \frac{2}{3}\overline{CD}$. Els segments $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ se intersectan en el punt G.

Calculeu la mesura dels segments $\overline{AG}$, $\overline{GF}$, $\overline{BG}$ i $\overline{GE}$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter BCFG.

Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABL}$, $\overset{\Delta}{DAE}$ són iguals i els catets iguals són perpendiculars, aleshores, les hipotenuses $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ són perpendiculars.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{BE} = a\frac{\sqrt{13}}{3}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AGB}$, $\overset{\Delta}{EAB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}}.$$

$\dfrac{\overline{AG}}{\frac{2}{3}a} = \dfrac{a}{\frac{\sqrt{13}}{3}a}$. Aleshores, $\overline{AG} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}a$.

$$\overline{GE} = \overline{AF} - \overline{AG} = \left(\frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)a = \frac{7\sqrt{13}}{39}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AGB}$:

$$\overline{BG} = a\sqrt{1^2 - \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$$

$$\overline{GE} = \overline{BE} - \overline{BG} = \left(\frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{3\sqrt{13}}{13}\right)a = \frac{4\sqrt{13}}{39}a.$$

L'àrea del quadrilàter BCFG és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{BGF}$ i $\overset{\Delta}{BCF}$:

$$S_{BCFG} = \frac{1}{2}\left(\frac{7\sqrt{13}}{39}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{1}{3}\cdot 1\right)a^2 = \frac{17}{39}a^2.$$

2030.- Siga ABCD un quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

Siguen D i E dos punts dels costats $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$, respectivament, tal que $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AD}$,

$\overline{CF} = \frac{1}{3}\overline{CD}$. Els segments $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ se intersecten en el punt G.

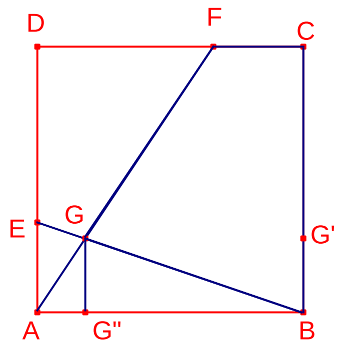
Calculeu l'àrea del quadrilàter BCFG.

Solució:

Siga G' la projecció de G sobre el costat $\overline{BC}$.

Siga G" la projecció de G sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga $\overline{AG"} = x$.



Els triangle rectangles $\overset{\Delta}{ADF}$, $\overset{\Delta}{GG"A}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{GG"} = \frac{3}{2}x.$$

Els triangle rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{G"BG}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{GG"}}{\overline{BG"}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}.$$

$\dfrac{\frac{3}{2}x}{c-x} = \dfrac{1}{3}$. Resolent l'equació amb la incògnita x:

$$x = \overline{AG"} = \frac{2}{11}c.$$

$\overline{GG"} = \frac{3}{11}c$, $\overline{GG'} = \frac{9}{11}c$, $\overline{CG'} = \frac{8}{11}c$.

L'àrea del quadrilàter BCFG és igual a la suma de les àrees del trapezi GG'CF i del triangle rectangle $\overset{\Delta}{GG'B}$:

$$S_{BCFG} = \frac{\frac{9}{11}c + \frac{1}{3}c}{2} \cdot \frac{8}{11}c + \frac{\frac{9}{11}c \cdot \frac{3}{11}c}{2} = \frac{35}{66}c^2.$$