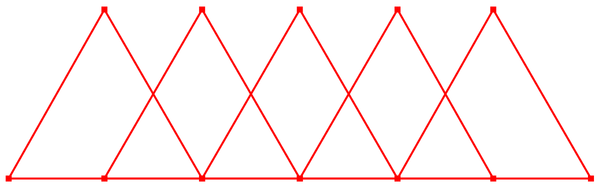
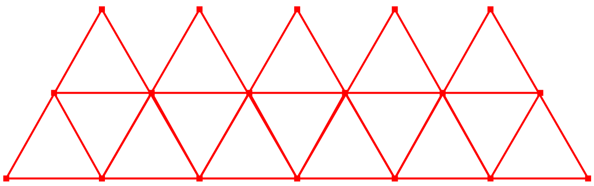
Problemes de Geometria per a l'ESO 204

2031.- En la figura, s'ha col·locat cinc triangles equilàters de costat $2\sqrt{3}$.
Si el punt mig de la base és vèrtex del triangle següent, calculeu l'àrea de la regió Roberta pels cinc triangles.



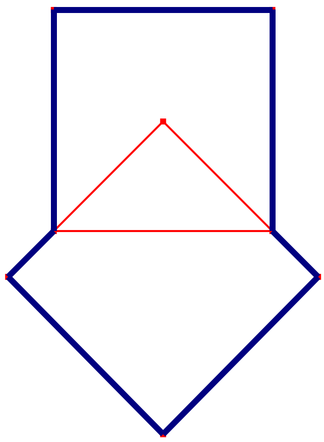
Solució:



Podem dividir la figura amb 16 triangles equilàters de costat $\sqrt{3}$.
L'àrea que cerquem és:

$$S = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 = 12\sqrt{3}.$$

2032.-En la figura, els quadrats són iguals de costa 10.
El centre del costat superior és un vèrtex del quadrat inferior. Dos vèrtexs del quadrat superior pertanyen al quadrat inferior.
Calculeu l'àrea i el perímetre del polígon exterior que formen els dos quadrats.



Solució:
Siga ABCDEFG el polígon exterior que formen els quadrats ABCG i ODEF.
L'àrea del polígon és igual a l'àrea de dos quadrats de costat 10 menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OCG}$ l'àrea del qual és la quarta part del quadrat de costat 10.

$S_{ABCDEFG} = 2 \cdot 10^2 - \frac{1}{4} \cdot 10^2 = 175$.

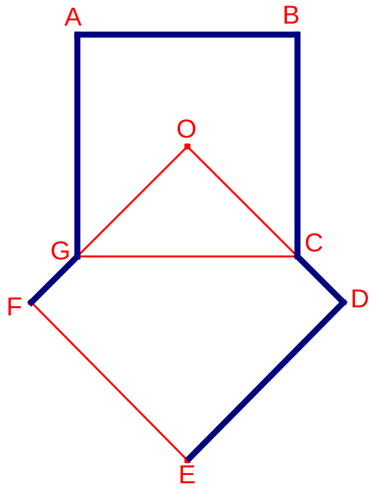
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OCG}$:

$\overline{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{2}$.

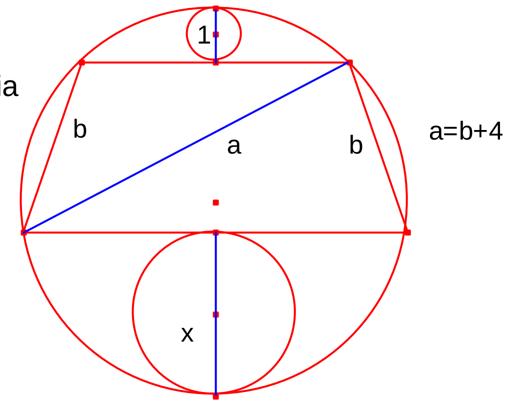
$\overline{CD} = 10 - \overline{OC} = 10 - 5\sqrt{2}$.

El perímetre del polígon és:

$P_{ABCDEFG} = 5 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CD} = 5 \cdot 10 + 2\left(10 - 5\sqrt{2}\right) = 70 - 10\sqrt{2}$.

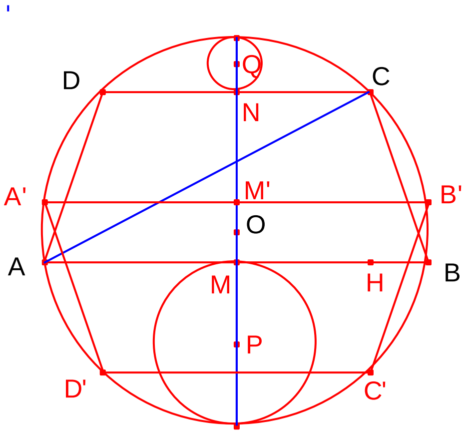


2033.- En una circumferència s'ha inscrit un trapezi isòsceles de costats iguals b i diagonal a tal que $a=b+4$.



En el costat superior paral·lel del trapezi hi ha una circumferència de diàmetre 1 tangent a la circumferència inicial i al costat del trapezi.
En el costat inferior paral·lel del trapezi hi ha una circumferència de diàmetre x tangent a la circumferència inicial i al trapezi.
Calculeu el valor de x.

Solució:



Siga O el centre de la circumferència i r el seu radi.
Siga ABCD el trapezi isòsceles $\overline{AD}=\overline{BC}=b$, $\overline{AC}=\overline{BD}=b+4$.
Siguen M el punt mig de la base $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig de la base $\overline{CD}$.
Aplicant la potència de M respecte de la circumferència de centre O.

$$x(2R-x)=\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Aplicant la potència de N respecto de la circumferència de centre O.

$$1(2R-1)=\left(\frac{\overline{CD}}{2}\right)^2.$$

Siga el trapezi A'B'C'D' simètric del trapezi ABCD respecte del centre O de la circumferència.
Siga M' el punt mig del costat $\overline{A'B'}$.
$\overline{MM'}=2R-2x$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMM'}$

$$R^2=(2R-2x)^2+\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):
$R^2=(2R-2x)^2+x(2R-x)$.
Simplificant:

$3x^2-6xR+3R^2=0$.

$3\left(\frac{x}{R}\right)^2-6\left(\frac{x}{R}\right)+3=0$. Resolent l'equació:

$\frac{x}{R}=1$.

Aleshores $\overline{AB}$ és un diàmetre.

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{CH}=R-1$ la altura.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$b^2+(b+4)^2=(2R)^2$. Simplificant:

$$b^2+4b=2R^2-8 \qquad (3)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{b+4}{2R}=\frac{R-1}{b}$$

$$b^2+4b=R^2-2R \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (4):

$2R^2-8=2R^2-2R$.

Resolent l'equació:

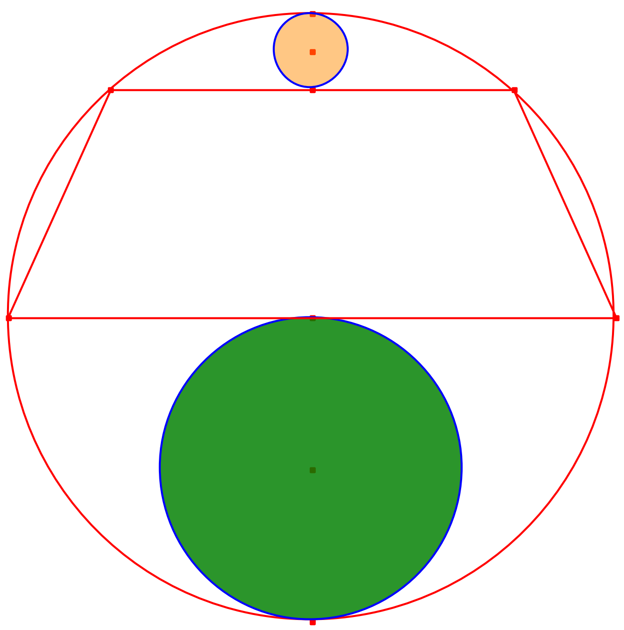
$$x=R=4 \qquad (5)$$

Solució gràfica:

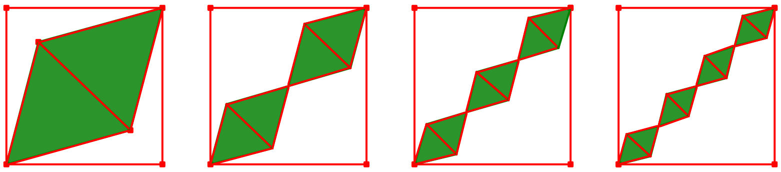
$x=R=4$

$b=-2+2\sqrt{7}$

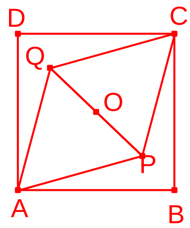
$a=2+2\sqrt{7}$



2034.- En els quadrats de costat 1 de la figura, s'han inscrit sobre la diagonal rombes formats per dos triangles equilàters.
Calculeu els costats de la successió de rombes.



Solució:
Siga ABCD el quadrat de costat 1.
Siga O el centre del quadrat.



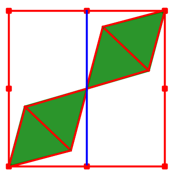
$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la meitat de la diagonal del quadrat.

Siga $\overline{AP} = c_1$ costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$.

$\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1$ altura del triangle equilàter.

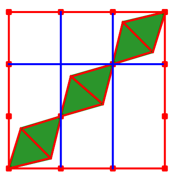
$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} c_1$. Resolent l'equació:

$c_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$.



Els rombes de la segona figura tenen el costat igual a la meitat del costat del primer rombe:

$c_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{3}$.



Els rombes de la tercera figura tenen el costat igual a la meitat del costat del primer rombe:

$c_3 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{6}}{3}$.

La successió dels costats dels rombes el seu terme general és:

$c_n = \frac{1}{n} \frac{\sqrt{6}}{3}$.

La successió de la suma de les àrees dels rombes de cadascun dels quadrats és:

$S_n = 2n \frac{\sqrt{3}}{4} c_n{}^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{1}{n}$.

2035.- Les distàncies d'un punt interior d'un hexàgon regular a tres vèrtexs consecutius són 4, 4 i 8. Calculeu la mesura dels costats de l'hexàgon.
KöMaL, K586.

Solució:

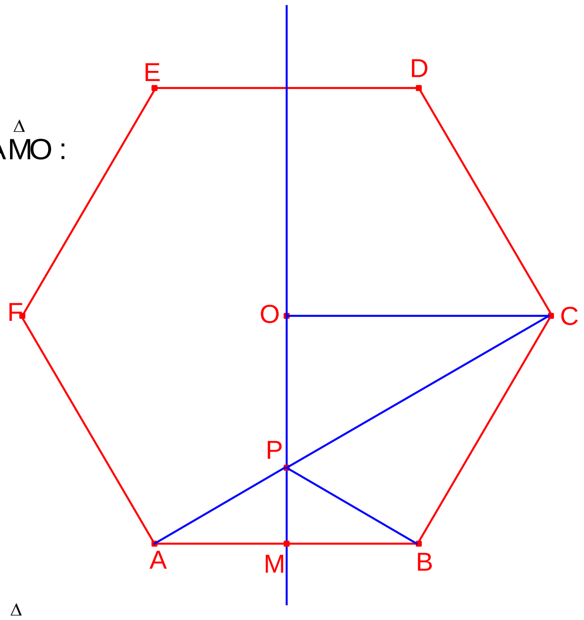
Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB}=c$ i centre O.

Siga P interior a l'hexàgon regular tal que $\overline{AP}=\overline{BP}=4$, $\overline{CP}=8$.

P pertany a la mediatriu del costat $\overline{AB}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Els punts M, P, O estan alineats.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$\overline{PM}=\frac{\sqrt{64-c^2}}{2}$.

$\overline{OP}=\overline{OM}-\overline{PM}=\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{64-c^2}}{2}$

$\overline{OC}$ és perpendicular a la recta OM. $\overline{OC}=\overline{AB}=c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{POC}$:

$8^2=c^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{64-c^2}}{2}\right)^2$.

$64=c^2+\frac{3c^2+64-c^2-2c\sqrt{192-3c^2}}{4}$. Simplificant:

$3c^2-96=c\sqrt{192-3c^2}$. Elevant al quadrat:

$c^4-64c^2+768=0$.

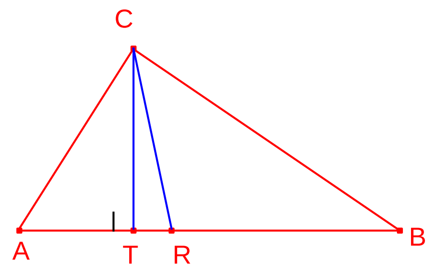
$c=4\sqrt{3}, 4$. La segona solució no és vàlida.

2036.- El peu de l'altura traçada des del vèrtex C del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és T i pertany al costat $\overline{AB}$. La bisectriu del vèrtex C talla el costat $\overline{AB}$ en el punt R.

Si $\overline{AB}=10$, $\overline{AT}=3$ i $\overline{AR}=4$, calculeu els costats del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

KöMaL, C1469.

Solució:



$\overline{TR}=1$.

$\overline{BR}=6$.

$\overline{BT}=7$.

Aplicant la propietat de la bisectriu al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{4}{b}=\frac{6}{a} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATC}$:

$$\overline{CT}^2=b^2-3^2 \qquad (2)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTC}$:

$$\overline{CT}^2=a^2-7^2 \qquad (3)$$

Igualant les expressions (2) (3):

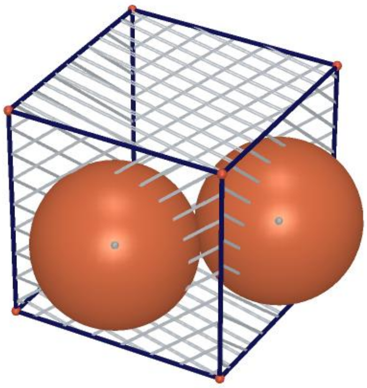
$$a^2-b^2=40 \qquad (4)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (4) :

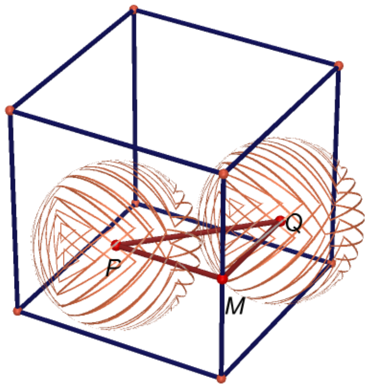
$$\begin{cases}\dfrac{4}{b}=\dfrac{6}{a}\\ a^2-b^2=40\end{cases}$$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases}a=6\sqrt{2}\\ b=4\sqrt{2}\end{cases}.$$

2037.- Calculeu el radi de dues esferes iguals i tangents que tenen els centres en dues cares adjacents d'un cub d'aresta 1.
KöMaL, C1470.



Solució:
Siguen P i Q els centres de les dues esferes tangents.
Siga r el seu radi.
$\overline{PQ} = 2r$.
Siga M el punt mig de l'aresta comuna a les dues cares que contenen els centres P i Q.
$\overline{PM} = \overline{QM} = \frac{1}{2}$.
$\angle AMQ = 90^{o}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMQ}$:
$(2r)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:
$r = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

2038.- Demostreu que la suma de distàncies d'un punt interior als costats d'un polígon equilàter és constant.

Solució:

Siga un polígon de n costats equilàters de costat c.

Siguen h_i les distàncies del punt P als costats del polígon.

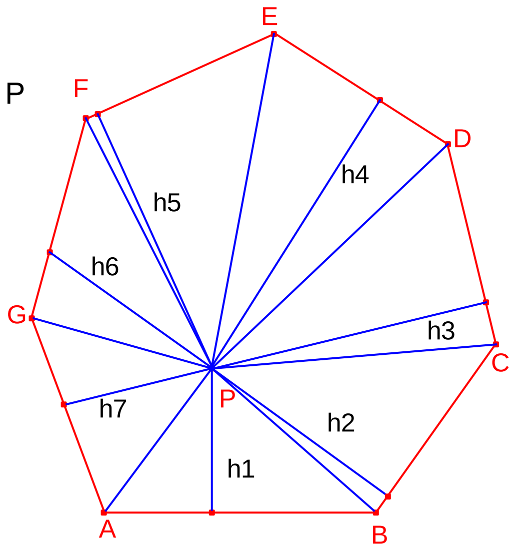
h_i són les altures dels n triangles que determinen el punt P i els vèrtexs consecutius del polígon.

L'àrea del polígon regular és igual a l'àrea del n triangles anteriors:

$$S_{polígon} = \frac{1}{2}c \cdot h_1 + \frac{1}{2}c \cdot h_2 + ... + \frac{1}{2}c \cdot h_n = \frac{c}{2}(h_1 + h_2 + ... + h_n).$$

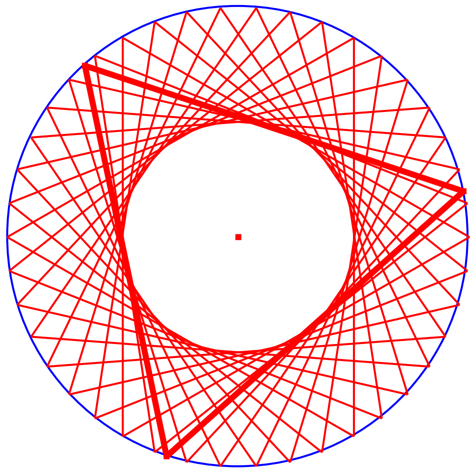
$$h_1 + h_2 + ... + h_n = \frac{2 \cdot S_{polígon}}{c}.$$

Aleshores, la suma de les distàncies d'un punt interior P als costats del polígon és constant.



2039.- Donada una circumferència, determineu la probabilitat d'escollir un punt qualsevol interior a la circumferència i que aquest punt pertany a un triangle equilàter inscrit en la circumferència.

Solució:
Si modelitzem el problema en un programa de geometria dinàmica observem que el lloc geomètric dels costats triangles equilàters és l'envolupant de la circumferència inscrita al triangle qualsevol triangle equilàter.

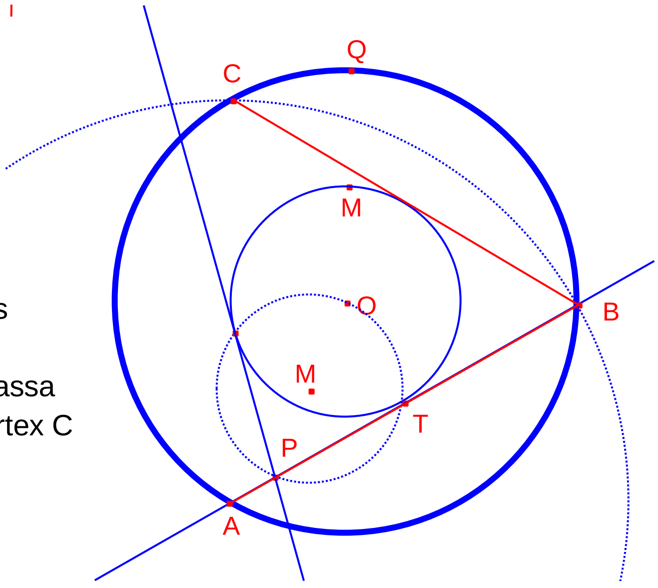


Siga R el radi de la circumferència inicial.

El radi de la circumferència inscrita a qualsevol triangle equilàter és $\frac{R}{2}$.

A fi que en un punt interior de la circumferència es puga dibuixar un triangle equilàter el punt ha de pertànyer a la corona circular que radis $\frac{R}{2}$ i R.

Per dibuixar el triangle equilàter donat el punt P de la corona efectuarem els següents passos:
Donada la circumferència de centre O, i el punt interior P.
a) Siga Q qualsevol punt de la circumferència de centre O.
b) Dibuixeu el punt mig del segment $\overline{OP}$.
c) Dibuixeu la circumferència de centre O que passa per M (circumferència inscrita al triangle equilàter).
d) Dibuixar la recta tangent a la circumferència inscrita que passa per P (el problema té dues possibles solucions).
e) La recta tangent talla la circumferència en els punts A i B (vèrtexs dels triangle equilàter).
f) Dibuixeu la circumferència de centre A que passa per B que talla la circumferència inicial en el vèrtex C del triangle equilàter.
g) Dibuixeu el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

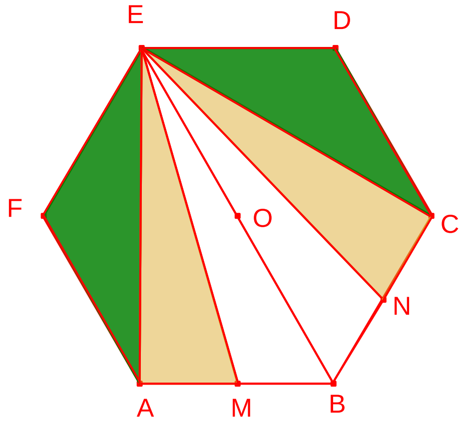


La probabilitat que cerquem és:

$$P = \frac{S_{\text{corona circular}}}{S_{\text{circuminicial}}} = \frac{\pi\left(R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2\right)}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

2040.- En un hexàgon regular els 5 segments que uneixen un vèrtex amb els altres i amb els punts migs dels costats que formen el vèrtex oposat divideixen l'hexàgon regular en 6 parts d'igual àrea.

Solució:



Siga ABCDFEF un hexàgon regular.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga O el centre de l'hexàgon regular.

Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura, tenen la mateixa àrea.

Aleshores, $S_{AME} = S_{MBE} = S_{BNE} = S_{NCE}$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases:

Aleshores,

$$S_{AME} = \frac{1}{2} S_{ABE}.$$

$$S_{AOE} = \frac{1}{2} S_{ABE}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{AOE}$, $\overset{\Delta}{CDE}$.

Aleshores, $S_{AME} = S_{MBE} = S_{BNE} = S_{NCE} = S_{AFE} = S_{CDE}$.