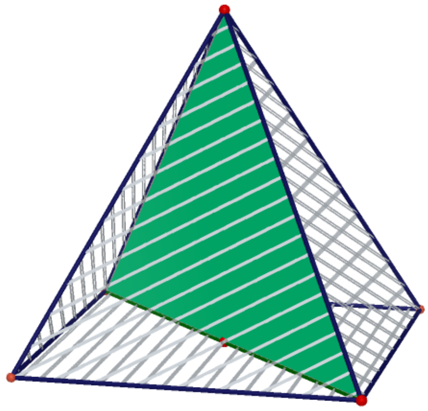
Problemes de Geometria per a l'ESO 205



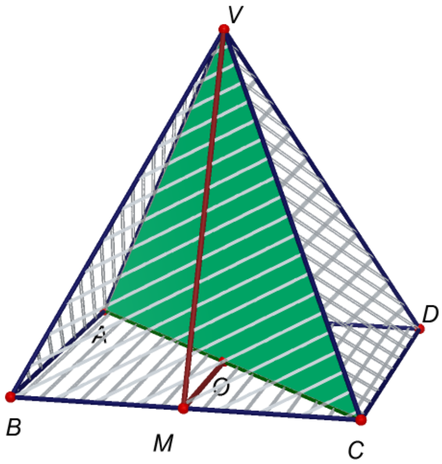
2041.- L'àrea de la figura que resulta de tallar una piràmide quadrangular regular per dues arestes laterals oposades és igual a $100\,\mathrm{m}^2$ i l'aresta de la base és 12 m. Determineu l'àrea total de la piràmide.

Solució:
Siga ABCDV la piràmide de base el quadrat ABCD de costat 12.
Siga O el centre del quadrat, projecció del vèrtex V sobre la base.
Siga $h = \overline{OV}$, altura de la piràmide.

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACV}$ és $100\,\mathrm{m}^2$:

$$100 = \frac{12\sqrt{2}\cdot h}{2}.$$

$$h = \frac{25\sqrt{2}}{3}.$$



Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga $\overline{MV} = a$, apotema de la piràmide.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOV}$:

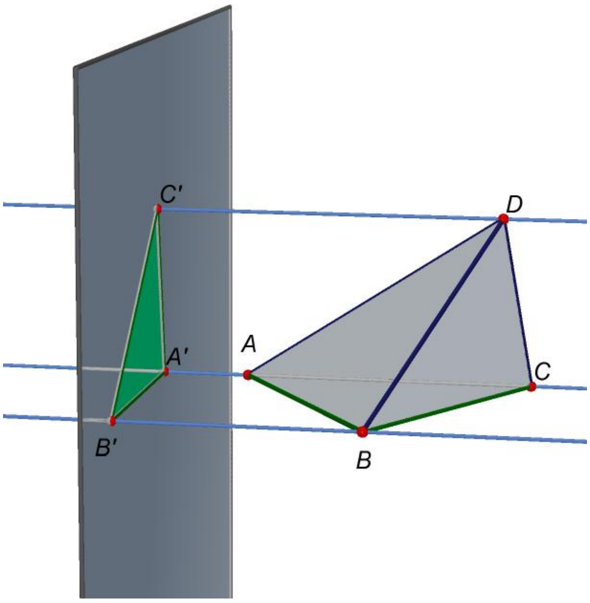
$$a = \sqrt{\left(\frac{25\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{1574}}{3}.$$

L'àrea total de la piràmide és igual a l'àrea del quadrat ABCD més 4 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCV}$:

$$S = 12^2 + 4\cdot\frac{12\frac{\sqrt{1574}}{3}}{2} = 144 + 8\sqrt{1574} \approx 461.39\,\mathrm{m}^2.$$

2042.- En un tetraedre una de les seues arestes mesura 5 m.
El tetraedre es projecta sobre un plànol perpendicular a l'aresta anterior.
La projecció forma un triangle d'àrea $6\,m^2$.
Calculeu el volum del tetraedre.

Solució:



Siga ABCD el tetraedre tal que $\overline{AC}=5$.
Siga un plànol perpendicular a la recta AC.
Siguen A', B', i C' les projecció de A, B, i C sobre el plànol, respectivament.

Siga $\overline{A'B'}=b$ base del triangle $A'\overset{\Delta}{B'}C'$. Siga h la seua altura.

b és l'altura del triangle $A\overset{\Delta}{B}C$ sobre la base $\overline{AC}$

h és l'altura del tetraedre sobre la base $A\overset{\Delta}{B}C$.

L'àrea del triangle $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ és:

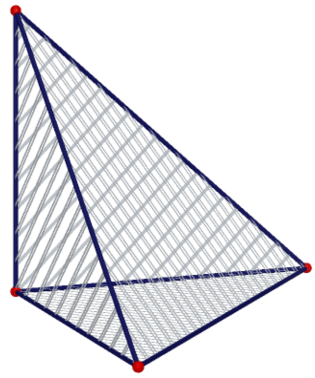
$$\frac{bh}{2}=6.$$

$$bh=12.$$

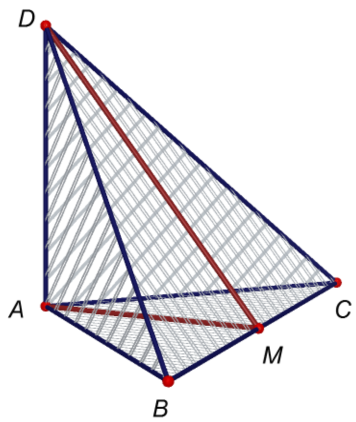
El volum del tetraedre ABCD és:

$$V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h=\frac{1}{3}\frac{\overline{AC}\cdot b}{2}h=\frac{1}{3}\frac{5}{2}bh=\frac{5}{6}\cdot 12=10\,m^3.$$

2043.- La base d'una piràmide és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8 m.
L'aresta lateral que conté el vèrtex de l'angle recte d'aquesta base és perpendicular a la base i mesura 5m.
Determineu l'àrea total de la piràmide.



Solució:



Siga la piràmide ABCD de base el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$.

$\overline{BC} = 8$, aleshores, $\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC} = 4\sqrt{2}$.

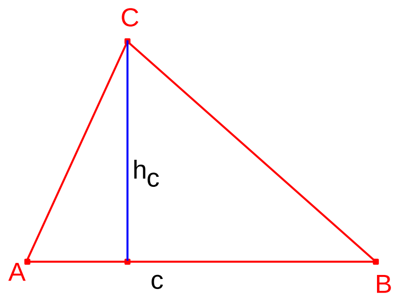
Siga M el punt mig de la hipotenusa del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
$\overline{AM} = \overline{BM} = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAD}$:
$\overline{DM} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.
L'àrea total de la piràmide és:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} 4\sqrt{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{41} = 16 + 20\sqrt{2} + 4\sqrt{41} \approx 69.90\,m^2$$

2044.- Determineu els costats d'un triangle sabent que els volums generats pel triangle, al girar successivament al voltant de cadascun d'ells, són equivalents a tres esferes de radis $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{12}$, $\sqrt[3]{7.2}$.

Solució:



Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Suposem que el doble con al girar sobre el costat $\overline{AB}$ és equivalent a l'esfera de radi $\sqrt[3]{9}$.

$\frac{1}{3}\pi \cdot {h_c}^2 \cdot c = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{9}\right)^3$. Simplificant:

${h_c}^2 \cdot c = 36$. Notem que $h_c \cdot c = 2 \cdot S$

$h_c \cdot 2S = 36$.

$h_c \cdot S = 18$ (1)

Suposem que el doble con al girar sobre el costat $\overline{AC}$ és equivalent a l'esfera de radi $\sqrt[3]{12}$.

$\frac{1}{3}\pi \cdot {h_b}^2 \cdot b = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{12}\right)^3$. Simplificant:

$h_b \cdot S = 24$ (2)

Suposem que el doble con al girar sobre el costat $\overline{BC}$ és equivalent a l'esfera de radi $\sqrt[3]{7.2}$.

$\frac{1}{3}\pi \cdot {h_a}^2 \cdot a = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{7.2}\right)^3$. Simplificant:

$h_a \cdot S = 14.4$ (3)

Dividint les expressions (1) (3) i les expressions (2) (3):

$\frac{h_c}{h_a} = \frac{5}{4}$. $\frac{h_b}{h_a} = \frac{5}{3}$.

$h_c \cdot c = h_b \cdot b = h_a \cdot a$. Aleshores:

$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle, $A = 90^o$, $a : b : c = 5 : 3 : 4$.

$a = 5k$, $b = 3k$, $c = 4k$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

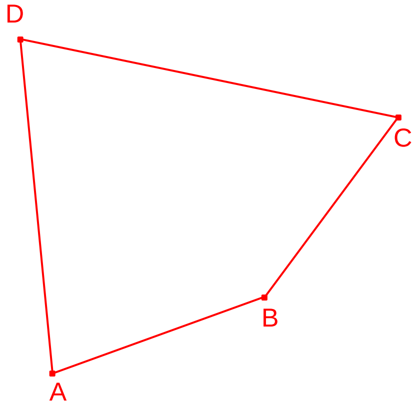
$S = \frac{5k \cdot h_a}{2} = \frac{4k \cdot 3k}{2} = 6k^2$. Simplificant: $h_a = \frac{12}{5}k$.

Substituint els valors de S i $h_a = \frac{12}{5}k$ en l'expressió (3):

$\frac{12}{5}k \cdot 6k^2 = 14.4$. Resolent l'equació: $k = 1$

Aleshores, $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$.

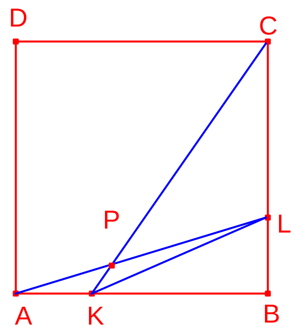
Ricard Peiró i Estruch



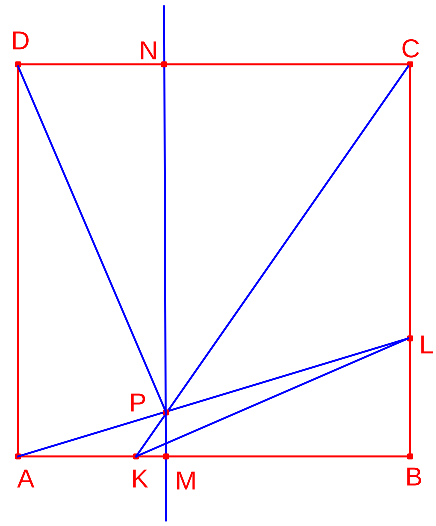
2045.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle isòsceles amb $\overline{AB} = \overline{BC}$.
$\angle ABC = 2 \cdot \angle ADC$, $\angle ACD = 48^o$, $\angle BAD = 76^o$.
Calculeu les mesures dels angles $\angle ABC$ i $\angle BCD$.

Solució:
Siga $\angle ADC = \alpha$, $\angle BAC = \angle BCA = \beta$.
$\angle ABC = 2\alpha$.
$\angle DAC = \angle BAD - \angle BAC = 76^o - \beta$.
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és 180º:
$2\alpha + 2\beta = 180^o$.
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és 180º:
$\alpha + 76^o - \beta + 48^o = 180^o$.
Considerem el sistema format per les dues equacions:
$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180^o \\ \alpha + 76^o - \beta + 48^o = 180^o \end{cases}$.
$\begin{cases} \alpha + \beta = 90^o \\ \alpha - \beta = 56^o \end{cases}$. Resolent el sistema:
$\begin{cases} \alpha = 73^o \\ \beta = 17^o \end{cases}$.
$\angle ABC = 2\alpha = 146^o$ i $\angle BCD = 48^o + \beta = 65^o$.

2046.- En un quadrat ABCD es marquen els punts K i L sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ de mode que $\overline{KB}=\overline{LC}$.
Siga P el punt intersecció dels segments $\overline{AL}$ i $\overline{CK}$.
Demostreu que els segments $\overline{DP}$ i $\overline{KL}$ són perpendiculars.



Solució:
Siga $\overline{AB}=c$ costat del quadrat.
Siga $x=\overline{KB}=\overline{LC}$.
$\overline{AK}=\overline{BL}=c-x$.
Siga la recta que passa per P i perpendicular al costat $\overline{AB}$ que talla els costats $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ en els punts M, N, respectivament.
Siga $h=\overline{PN}$, $y=\overline{DN}$.

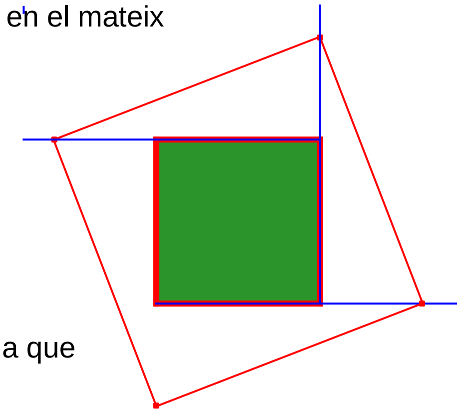


Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CNP}$, $\overset{\Delta}{KBC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{h}{c-y}=\frac{c}{x}.$$
$$xh=c^2-cy \qquad (1)$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMP}$, $\overset{\Delta}{ABL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$$\frac{c-h}{y}=\frac{c-x}{c}.$$
$$c^2-ch=cy-xy \qquad (2)$$
Sumant les expressions (1) (2):
$$(c-x)h=xy \qquad (3)$$

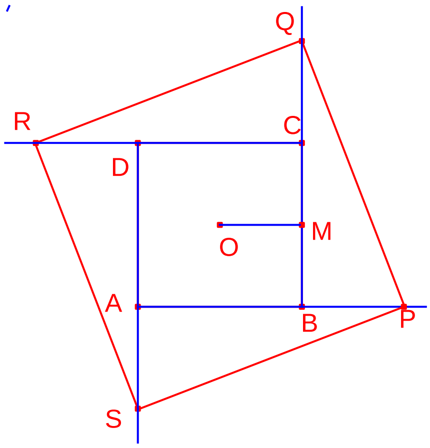
Els segments $\overline{DP}$ i $\overline{KL}$ són perpendiculars si els triangles $\overset{\Delta}{PND}$, $\overset{\Delta}{KBL}$ són semblants.
De la expressió (3):
$$\frac{c-x}{x}=\frac{y}{h} \qquad (4)$$
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{PND}$, $\overset{\Delta}{KBL}$ són semblants.

2047.- Donat un quadrat de costat a, prolonguem els costats, en el mateix sentit, una magnitud ka.
Demostreu que el quadrilàter format és un quadrat.
Demostreu que els dos quadrats tenen el mateix centre.
Determineu el valor de k a fi que la proporció de les àrees siga 3.



Solució:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ASP}$, $\overset{\Delta}{BPQ}$, $\overset{\Delta}{CQR}$, $\overset{\Delta}{DRS}$ són iguals ja que tenen iguals els catets corresponents.
Aleshores, els costats del quadrilàter PQRS són iguals.
Siga $\alpha = \angle APS = \angle BQP$.
Aleshores, $\angle BPQ = 90^o - \alpha$.
$\angle SPQ = \angle APS + \angle BPQ = 90^o$.
Anàlogament els angles Q, R, S del quadrilàter PQTS són rectes.
Aleshores, PQRS és un quadrat.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPQ}$, calculem la mesura del quadrat PQRS:

$\overline{PQ}^2 = (ka)^2 + ((1+k)a)^2 = (2k^2 + 2k + 1)a^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SPQ}$:

$\overline{SQ}^2 = 2 \cdot \overline{PQ}^2$

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOQ}$:

$$\overline{OQ}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2}+k\right)a\right)^2 = \frac{1}{2}(2k^2 + 2k + 1)a^2 = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2.$$

Aleshores, $\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{SQ}$, per tant, O és el centre del quadrat PQRS.

Determinem el valor k tal que $S_{PQRS} = 3 \cdot S_{ABCD}$.

$S_{PQRS} = \overline{PQ}^2 = (2k^2 + 2k + 1)a^2$.

$(2k^2 + 2k + 1)a^2 = 3a^2$.

$2k^2 + 2k - 2 = 0$. Resolent l'equació:

$$k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}.$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

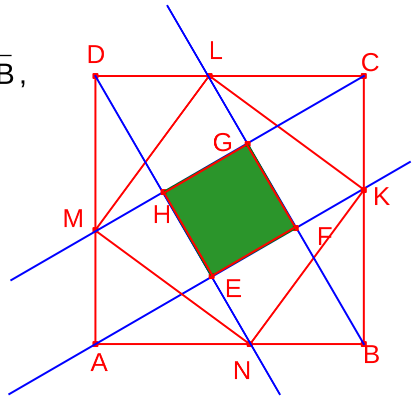
2048.- Siga ABCD el quadrat de costat c.

Siguen K, L, M, N els punts dels costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, respectivament, tals que

$\angle KAB = \angle CBL = \angle DCM = \angle BAK = 30^o$.

La intersecció de les rectes AD, BL, CM, DN formen el quadrilàter EFGH.

Calculeu les àrees dels quadrilàters KLMN i EFGH.



Solució:

Els quadrilàters KLMN i EFGH són quadrats.

$$\overline{BK} = \overline{CL} = \overline{DM} = \overline{AN} = \frac{\sqrt{3}}{3}c.$$

$$\overline{CK} = \overline{DL} = \overline{AM} = \overline{BN} = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMN}$:

$$\overline{MN}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}c\right)^2 + \left(\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)c\right)^2 = \frac{5-2\sqrt{3}}{3}c^2.$$

$$S_{KLMN} = \overline{MN}^2 = \frac{5-2\sqrt{3}}{3}c^2.$$

$$\overline{DH} = \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2}c.$$

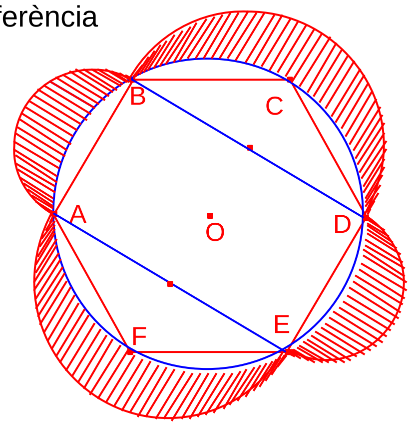
$$\overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{EH} = \overline{DE} - \overline{DH} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}c.$$

$$\overline{EH}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}c\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}c^2.$$

$$S_{EFGH} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}c^2.$$

2049.- Sigaun hexàgon regular ABCDEF, inscrit en una circumferència de centre O i radi R.
Sobre $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DE}$ i $\overline{EA}$ es construeixen , cap a fora semicircumferències.
Calculeu proporció entre l'àrea limitada per les semicircumferències i la circumferència circumscrita a l'hexàgon i l'àrea de l'hexàgon.



Solució:
L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és igual a l'àrea de 6 triangles equilàters de costat R.

$$S_{ABCDEF} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 .$$

L'àrea d'una de les lúnules menudes és igual a l'àrea del semicercle de $\frac{R}{2}$ menys l'àrea d'un sector circular de 60º de radi R, més l'àrea d'un triangle equilàter de costat R:

$$S_{L1} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \left(-\frac{1}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 .$$

$\overline{AE} = \sqrt{3}R$.

Notem que $S_{AFE} = S_{AFO}$

L'àrea d'una de les lúnules grans és igual a l'àrea del semicercle de $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ menys l'àrea d'un sector circular de 120º de radi R, més l'àrea d'un triangle equilàter de costat R:

$$S_{L2} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 - \frac{1}{3}\pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}R^2 = \left(\frac{1}{24}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)R^2 .$$

L'àrea ombrejada és:

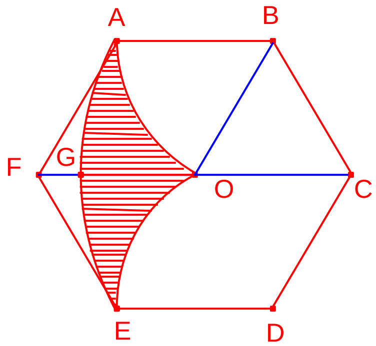
$$S_{ombrejada} = 2(S_{L1} + S_{L2}) = \sqrt{3}R^2 .$$

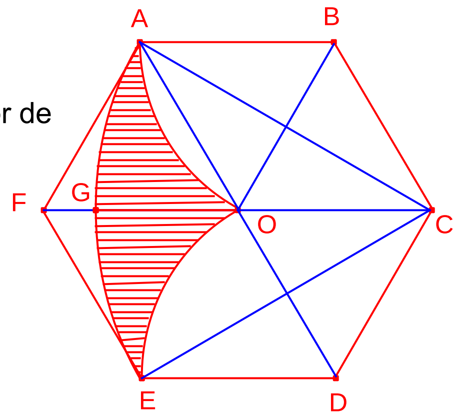
La proporció entre l'àrea limitada per les semicircumferències i la circumferència circumscrita a l'hexàgon i l'àrea de l'hexàgon és:

$$\frac{S_{ombrejada}}{S_{ABCDEF}} = \frac{\sqrt{3}R^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2} = \frac{2}{3} .$$

2050.- Siga ABCDEF l'hexàgon regular de centre O i costat c.
Des dels punts B i D com centres i amb radi c es dibuixen dos arcs de circumferència.

Des del punt C com centre és dibuixa l'arc $\overset{\frown}{AGE}$.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.





Solució:
$\overline{AE} = \sqrt{3}c$.
L'àrea d'una de les lúnules grans és igual a l'àrea del sector de 60º i radi $\sqrt{3}c$ menys l'àrea e dos sectors circulars de 60º de radi c:

$$S_{Ombrejada} = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{3}c\right)^2 - 2\left(\frac{1}{6}\pi c^2\right) = \frac{\pi}{6}c^2.$$