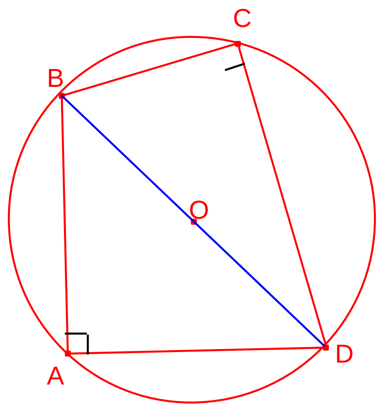
Problemes de Geometria per a l'ESO 206

2051.- Donada una circumferència de centre O i radi R, dibuixem les cordes $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ iguals al costat del quadrat inscrit i la corda $\overline{BC}$ igual a costat de l'hexàgon regular.
a) Calculeu la mesura dels angles B i D del quadrilàter ABCD.
b) L'àrea del quadrilàter ABCD en funció del radi.

Solució:
Per ser costats d'un quadrat, la mesura dels arcs és:



$\overset{\frown}{AB} = 90º$, $\overset{\frown}{AD} = 90º$. Aleshores:

$\angle ABD = \angle ADB = \frac{1}{2} 90º = 45º$.

$A = 90º$.
Per ser angles oposats d'un quadrilàter cíclic:
$C = 180º - A = 90º$.
Per ser costat d'un hexàgon regular, la mesura de l'arc és:

$\overset{\frown}{BC} = 60º$. Aleshores:

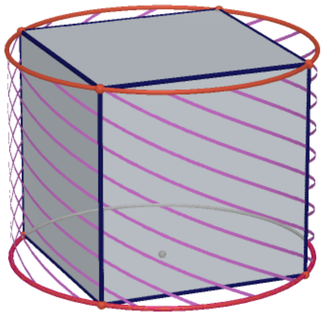
$\angle BDC = \frac{1}{2} 60º = 30º$.

$\angle CBD = 90º - \angle BDC = 60º$.
$B = \angle ABD + \angle CBD = 45º060º = 105º$.
Per ser angles oposats d'un quadrilàter cíclic:
$D = 180º - B = 75º$.
L'àrea del quadrilàter ABCD és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}$ i $\overset{\Delta}{BCD}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{AB} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} R$. $\overline{BC} = R$, $\overline{CD} = R\sqrt{3}$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} R \frac{\sqrt{2}}{2} R + \frac{1}{2} R \cdot R\sqrt{3} \cdot = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4} R^2 .$$

2052.- Un cilindre de 1 m de diàmetre està circumscrit a un cub.
Calculeu la diferència entre els volums dels dos sòlids.



Solució:
Siga a l'aresta d'un cub.
El volum del cub és:

$V_{cub} = a^3$.

La diagonal d'una cara del cub és igual al diàmetre del cilindre.
$a\sqrt{2} = 1$. Resolent l'equació:

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

El cilindre té radi $\frac{1}{2}$ i altura a.
El volum del cilindre és:

$$V_{cilindre} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 a = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

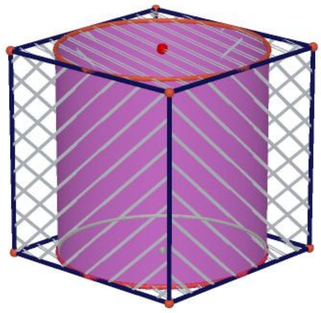
El volum del cub és:

$$V_{cub} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

La diferència entre els volums dels dos sòlids és:

$$V = V_{cilindre} - V_{cub} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.2018 \text{ m}^3.$$

2053.- Un cub d'aresta 1m està circumscrit a un cilindre (les bases del cilindre pertanyen a cares oposades del cub. Calculeu la diferència entre els volums dels dos sòlids.



Solució:

El radi del cilindre és igual a la meitat de l'aresta del cub i l'altura és igual a l'aresta.

$$V_{cilindre} = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{4}.$$

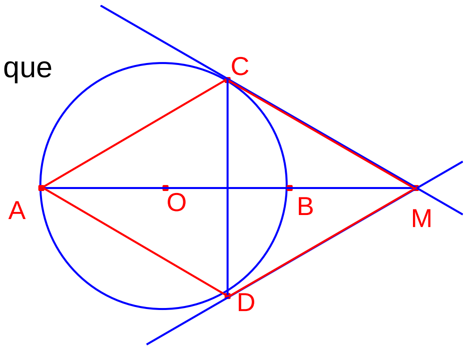
El volum del cub és:

$$V_{cub} = 1^3 = 1.$$

La diferència entre els volums dels dos sòlids és:

$$V = V_{cub} - V_{cilindre} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146 \text{ m}^3.$$

2054.- Siga una circumferència de centre O i radi R.
En la prolongació del diàmetre $\overline{AB}$ dibuixem el punt M tal que $\overline{OM} = 2R$.
Siguen MC i MD les tangent (C, D punts de tangència).
Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{CDM}$ és equilàter.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ACMD.

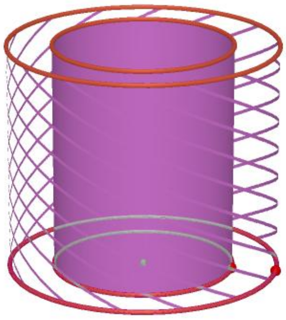


Solució:
$\angle OCM = \angle ODM = 90^o$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OCM}$, $\overset{\Delta}{ODM}$ són iguals .
Aleshores, $\overline{CM} = \overline{DM}$, $\overline{OM} = 2 \cdot \overline{OC} = 2R$.
Aleshores, $\angle OMC = 30^o$. $\overline{CM} = R\sqrt{3}$.
Per tant, $\angle CMD = 60^o$ i $\overline{CM} = \overline{DM}$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CDM}$ és equilàter.
$\overline{CD} = \overline{CM} = R\sqrt{3}$.

Siga P la intersecció de $\overline{AM}$ i $\overline{CD}$
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{APD}$ són iguals .
Aleshores, $\overline{AC} = \overline{AD}$.
Aleshores, ACMD és un cometa.
$\overline{AM} = 3R$. .
L'àrea del cometa ACMD és:
$$S_{ACMD} = \frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} 3R \cdot R\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 .$$

2055.- Calen $1\,\text{cm}^3$ d'or per daurar la superfície lateral d'un cilindre de 75 cm d'altura i 20 cm de radi.
Determineu l'espessor de la capa d'or, que suposem uniforme per a tota la superfície lateral del cilindre.

Solució
Siga x l'espessor de la capa d'or.
El cilindre que ocupa tota la capa té radi $20+x$ i la mateixa altura.



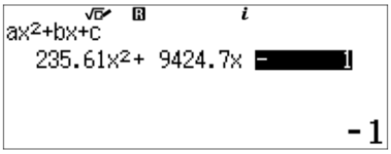
La diferència dels dos volums és $1\,\text{cm}^3$:

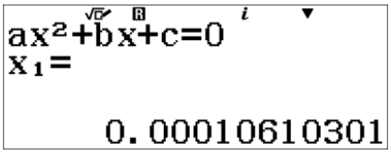
$\pi(20+x)^2\cdot 75-\pi 20^2\cdot 75=1$.

Simplificant:

$75\pi\cdot x^2+3000\pi\cdot x-1=0$.

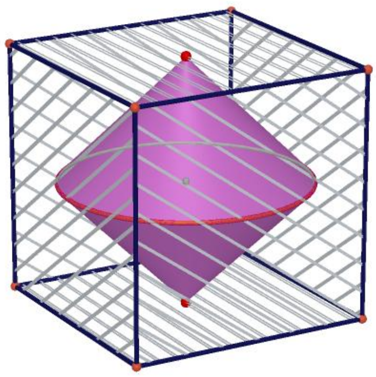
Resolent l'equació amb ajut de la calculadora:





$x=0.00011\,\text{cm}$.

2056.- Un cub d'aresta 10 cm té inscrit un doble con que té els vèrtexs en els centres de dues cares oposades i els les bases comunes són tangents a les altres quatre cares. Calculeu la diferència entre els volums dels dos sòlids.



Solució:
Siga a l'aresta del cub.
El volum del cub és:

$$V_{cub} = a^3 .$$

El volum del doble con és igual al volum del con de radi $\frac{1}{2}a$ i altura a.

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 a = \frac{\pi}{12}a^3 .$$

La diferència entre els volums dels dos sòlids és:

$$V = V_{cub} - V_{con} = \left(1 - \frac{\pi}{12}\right)a^3 .$$

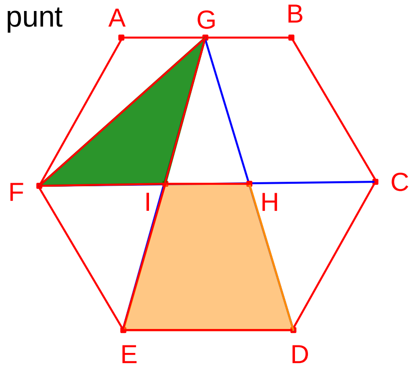
Si $a = 10$:

$$V = \left(1 - \frac{\pi}{12}\right)10^3 \approx 738.2 \text{ cm}^3 .$$

2057.- En la figura, ABCDEF és un hexàgon regular, G és el punt mig del costat $\overline{AB}$, i H i I són els punts d'intersecció dels segments $\overline{GD}$ i $\overline{GE}$ amb el segment $\overline{FC}$, respectivament.

Calculeu la raó entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{GIF}$ i el trapezi IHDE.

Prova Cangur, 2018



Solució:

$\overline{IH}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{EDG}$.

Aleshores, $\overline{IH}=\frac{1}{2}\overline{ED}$.

$\overline{FC}=2\cdot\overline{ED}$.

Aleshores, $\overline{FI}=\dfrac{2\cdot\overline{ED}-\frac{1}{2}\overline{ED}}{2}=\frac{3}{4}\overline{ED}$.

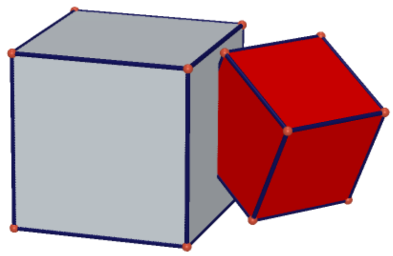
El triangle $\overset{\Delta}{GIF}$ i el trapezi tenen la mateixa altura sobre les bases $\overline{FI}$ i $\overline{ED}$, $\overline{IH}$, respectivament.

Siga h aquesta altura:

$$S_{GIF}=\frac{1}{2}\overline{FI}\cdot h=\frac{1}{2}\frac{3}{4}\overline{ED}\cdot h=\frac{3}{8}\overline{ED}\cdot h.$$

$$S_{IHDE}=\frac{1}{2}\left(\overline{ED}+\overline{IH}\right)h=\frac{1}{2}\left(\overline{ED}+\frac{1}{2}\overline{ED}\right)h=\frac{3}{4}\overline{ED}\cdot h.$$

$$\frac{S_{GIF}}{S_{HIDE}}=\frac{\frac{3}{8}\overline{ED}\cdot h}{\frac{3}{4}\overline{ED}\cdot h}=\frac{1}{2}.$$



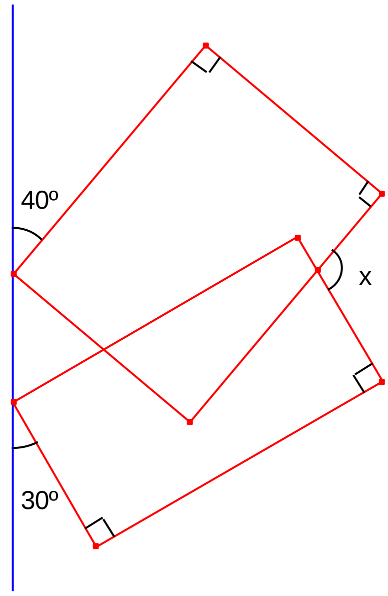
2058.- Dos cubs de volums V i W s’ntersecten.
La part del cub de volum V que no és comuna als dos cubs és el 90% del seu volum.
La part del cub de volum W que no és comuna als dos cubs és el 85% del seu volum.
Quina és la relació entre V i W?.
Prova Cangur 2018.

Solució:
La part comuna als dos cub és igual al 10% del volum V i el 15% del volum W.

$$\frac{10}{100}V=\frac{15}{100}W\,.$$

$$\frac{V}{W}=\frac{3}{2}\,.$$

2059.- Dos rectangles estan situats, com mostra la figura, amb angles de 40º i 30º respecte d'una recta.
Calculeu la mesura de l'angle x.
Prova Cangur 2018.



Solució:

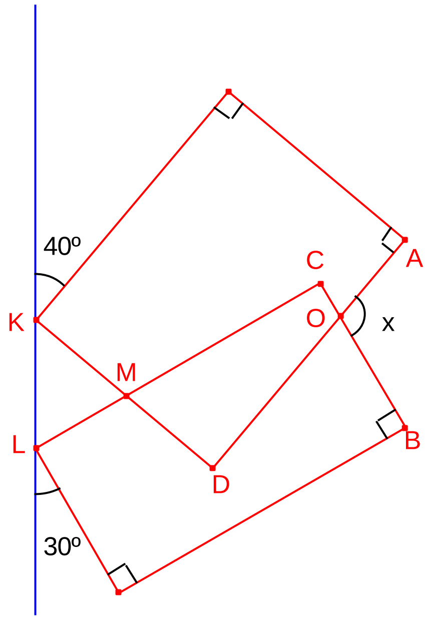
$\angle MKL = 60^{o}$, $\angle MLH = 60^{o}$.

Aleshores, $\angle LMK = 180^{o} - (60^{o} + 40^{o}) = 70^{o}$.

$\angle CMD = \angle LMK = 70^{o}$.

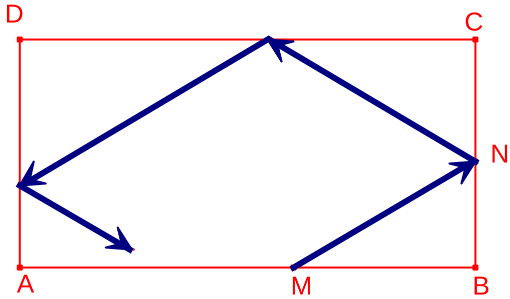
$\angle COD = 360^{o} - (2 \cdot 90^{o} + 70^{o}) = 110^{o}$.

$x = \angle AOB = \angle COD = 110^{o}$.

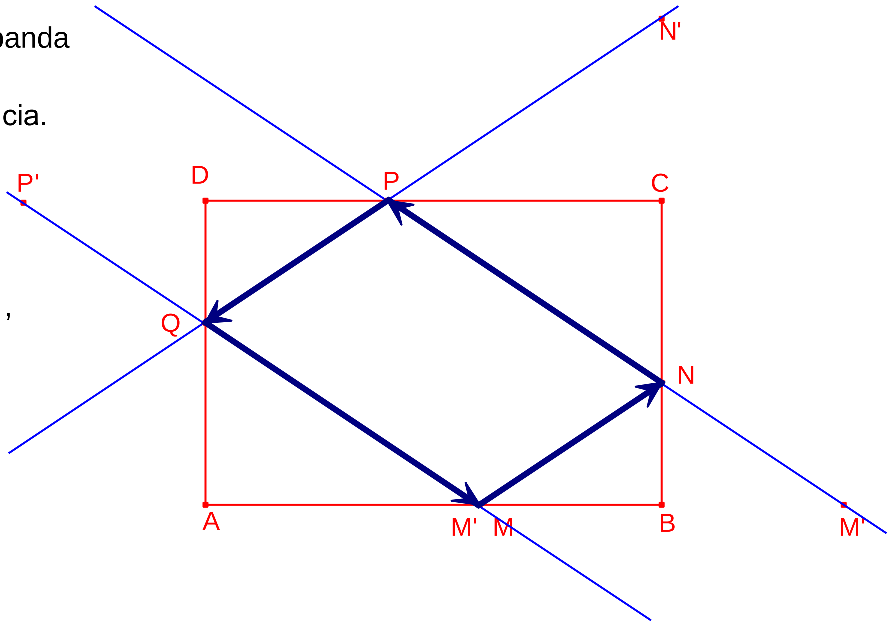


2060.- Tenim un billar rectangular de costats 3 m i 2m. Una bola es llança des del punt M, situat en un dels costats llargs, i rebota en els altres costats com es veu a la figura.
A quina distància del punt A tocarà el costat inicial si $\overline{BM} = 1.2\text{ m}$ i $\overline{BN} = 0.8\text{ m}$

Prova Cangur 2018.



Solució:
Quan una bola rebota en la banda l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió:



Siga M' el punt on rebota en la banda inicial.
Siga $\alpha = \angle MNB$ angle d'incidència.
$\angle PNC = \alpha$.
$\angle NPC = \angle QPQ = 90^\circ - \alpha$.
$\angle DQP = \angle AQM = \alpha$.

Els triangles, $\overset{\Delta}{NBM}$, $\overset{\Delta}{PCN}$, $\overset{\Delta}{PDQ}$, $\overset{\Delta}{M'AQ}$ són semblants.

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = \frac{0.8}{1.2} = \frac{2}{3}.$$

$$\overline{CN} = 2 - \overline{BN} = 1.2 = \frac{6}{5}.$$

$$\overline{CP} = \frac{3}{2}\overline{CN} = \frac{9}{5}.$$

$$\overline{DP} = 3 - \overline{CP} = \frac{6}{5}.$$

$$\overline{DQ} = \frac{2}{3}\overline{DP} = \frac{4}{5}.$$

$$\overline{AQ} = 2 - \overline{DQ} = \frac{6}{5}.$$

$$\overline{AM'} = \frac{3}{2}\overline{AQ} = \frac{9}{5}.$$

Notem que $\overline{AM} = 3 - \overline{BM} = 1.8 = \frac{9}{5}$. Aleshores, $M = M'$.