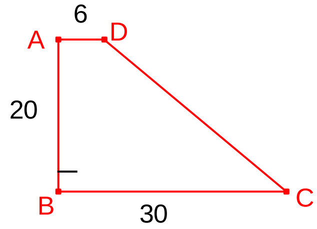
Problemes de Geometria per a l'ESO 207

2061.- En la figura, ABCD és un trapezi rectangle amb $\overline{AD}$ paral·lela a $\overline{BC}$ i $\overline{BC}$ és perpendicular a $\overline{AB}$. A més a més, $\overline{AD}=6$, $\overline{AB}=20$ i $\overline{BC}=30$.



a) Determineu l'àrea del trapezi ABCD.

b) Existeix un punt K sobre el costat $\overline{AB}$ de manera que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KBC}$ és igual a l'àrea del quadrilàter KADC. Determineu la longitud del segment $\overline{BK}$.

c) Existeix un punt M sobre el costat $\overline{CD}$ de manera que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és igual a l'àrea del quadrilàter MBAD. Determineu la longitud del segment $\overline{CM}$.

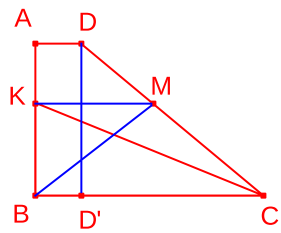
Crux Mathematicorum CC320.

Solució:

a)

$$S_{ABCD}=\frac{30+6}{2}20=360.$$

b)



Siga $x=\overline{BK}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{KBC}$ és la meitat de l'àrea del trapezi ABCD:

$S_{KBC}=\frac{1}{2}30x=\frac{1}{2}360$. Resolent l'equació:

$x=12$.

c)

Siga D' la projecció de D sobre el costat $\overline{BC}$.

$\overline{DD'}=\overline{AB}=20$, $\overline{D'C}=\overline{BC}-\overline{AD}=24$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DD'C}$:

$$\overline{CD}=\sqrt{24^2+20^2}=4\sqrt{61}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MBC}$ és igual a la meitat de l'àrea del trapezi ABCD.

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{KBC}$, $\overset{\Delta}{MBC}$.

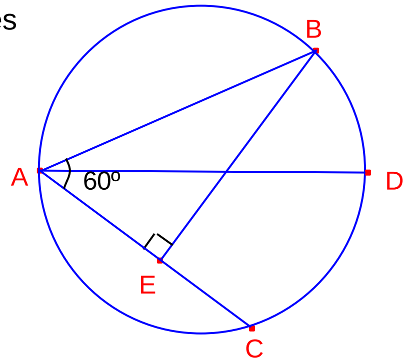
Aleshores, la recta KM és paral·lela als costats $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{KB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}.$$

$\frac{\overline{CM}}{12}=\frac{4\sqrt{61}}{20}$. Resolent l'equació:

$$\overline{CM}=\frac{12\sqrt{61}}{5}.$$



2062.- En un cercle de diàmetre $\overline{AD}$ hem dibuixat les cordes $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ de manera que $\angle BAC = 60^o$. Tracem $\overline{BE}$ perpendicular a $\overline{AC}$ i resulta que el segment $\overline{CE} = 3$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BD}$.
Prova Cangur 2018

Solució:
Siga $\overline{AE} = x$.
$\overline{AB} = 2x$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEB}$:
$\overline{BE} = x\sqrt{3}$.
Els angles $\angle ADB = \angle ACB$ per ser angles inscrits en la circumferència i abraçar el mateix arc.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BEC}$ són semblants, ja que tenen un dels angles aguts iguals.
Aplicant el teorema de Tales:

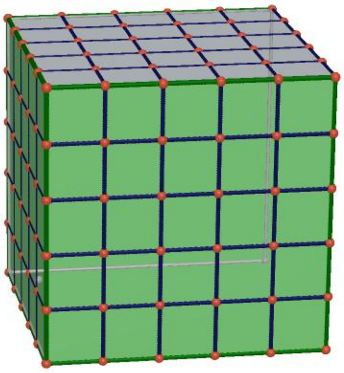
$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}.$$

$$\frac{3}{\overline{BD}} = \frac{x\sqrt{3}}{2x}.$$

$$\overline{BD} = 2\sqrt{3}.$$

2063.- Martina construeix un cub gran enganxant petits cubs idèntics i punta del tot algunes cares del cub construït.
El seu germà Marc, deixa caure el cub que es descompon en els petits cubs inicials.
Hi ha 45 d'aquests petits cubs que no tenen cap cara pintada.
Quantes cares del cub gran no va pintar Martina.
Prova Cangur

Solució:
Suposem que el cub gran que pinta Martina té aresta n.
Siga m el nombre de cares d'aquest cub gran que no pinta.

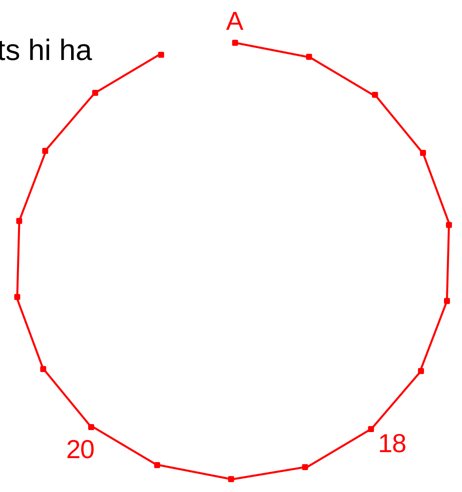


Hi ha un cub interior d'aresta $n-2$ que no té cap cara pintada.
Aleshores, $(n-2)^3 \leq 45$.
$n \leq 5$.
$n > 4$ ja que en un cub gran d'aresta 4 hi ha un total de 64 cub, si puntem una cara 16 cub restarien $64-16=48$ cub sense pintar. Si pintàrem un altra cara en restarien menys de 45 sense pintar.
Aleshores, $n=5$.
La part interior quedarien $3^3=27$ cubs sense pintar.
En la part exterior quedarien $45-27=18$ cubs sense pintar.
En una cara sense pintar hi ha $3^2=9$ cubs sense pintar.
Si hi ha dues cares oposades sense pintar hi ha 18 cubs sense pintar.

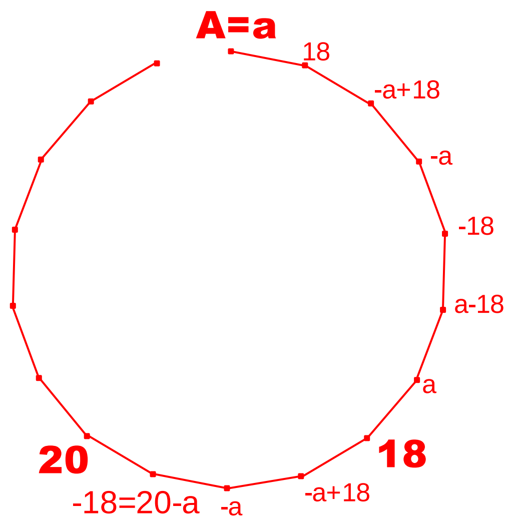
Si hi ha dues cares contigües sense pintat hi ha $3\cdot 4+3\cdot 3=21$ cubs sense pintar.

Aleshores, el cub gran que pinta Martina té aresta 5 i es queden sense pintar dues cares oposades.

2064.- A cadascun dels vèrtexs d'un polígon de 18 costats hi ha un nombre igual a la suma dels nombres dels dos adjacents.
Sabem dos dels nombres, tal com es veu a la figura.
Quin nombre hi ha al vèrtex A?
Prova Cangur 2018



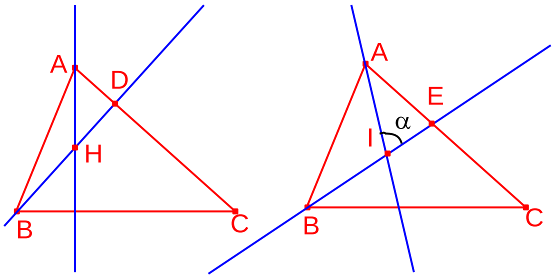
Solució:
Siga a el nombre que esta a la dreta de 18.
El vèrtex $A = a$.
El vèrtex que està a la dreta de 20 és:
$20 - a = -18$.
Resolent l'equació:
$a = 36$.



2065.- L'angle que formen les altures corresponents als costats a i b d'un triangle acutangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mesura 42º. Quant mesura l'angle que formen les bisectrius corresponents als vèrtexs A i B?

Prova Cangur 2018

Solució:



Siga H l'ortocentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga D el peu de l'altura referida al costat b.

$\angle AHD = 42^o$.

$\angle BAH = 90^o - B$, $\angle ABH = 90^o - A$.

$\angle AHD = \angle BAH + \angle ABH = 180^o - (A + B)$.

$42^o = 180^o - (A + B)$.

Aleshores, $A + B = 138^o$.

Siga I l'incentre del triangle.

Siga E el peu de la bisectriu referida al vèrtex B.

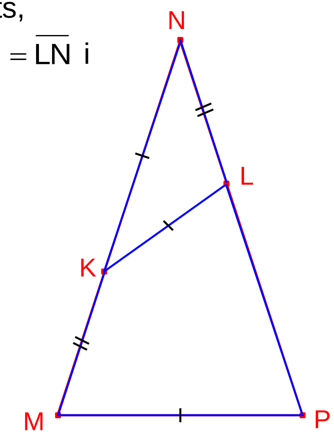
Siga $\angle AIE$ l'angle que formen les dues bisectrius.

$\angle BAI = \dfrac{A}{2}$, $\angle ABI = \dfrac{B}{2}$.

$$\angle AIE = \angle BAI + \angle ABI = \frac{A+B}{2}.$$

$$\alpha = \angle AIE = \frac{138}{2} = 69^o.$$

2066.- El triangle $\overset{\Delta}{MNP}$ és isòsceles. Els punts K i L estan situats, respectivament, en els costats $\overline{MN}$ i $\overline{NP}$ i compleixen $\overline{MK}=\overline{KL}=\overline{LN}$ i $\overline{KN}=\overline{MP}$, tal com s'indica a la figura.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle MNP$.
Prova Cangur 2018



Solució:
Siga $\alpha=\angle MNP$.

$\angle NMP=\angle MPN=90º-\frac{\alpha}{2}$.

$\angle NKL=\angle KML=\alpha$.

$\angle KLP=\angle KNL+NKL=2\alpha$.

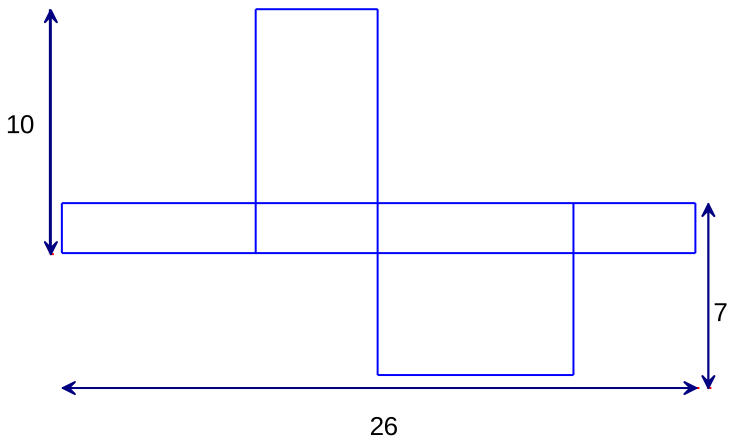
Per ser $\overset{\Delta}{MNP}$ isòsceles $\overline{PL}=\overline{KN}=\overline{MP}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{MPK}$, $\overset{\Delta}{LPK}$ són iguals ja que tenen els costats corresponents iguals.
Aleshores, $\angle KMP=\angle KLP$:

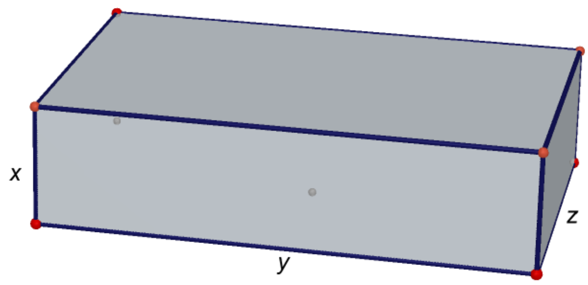
$90º-\frac{\alpha}{2}=2\alpha$. Resolent l'equació:

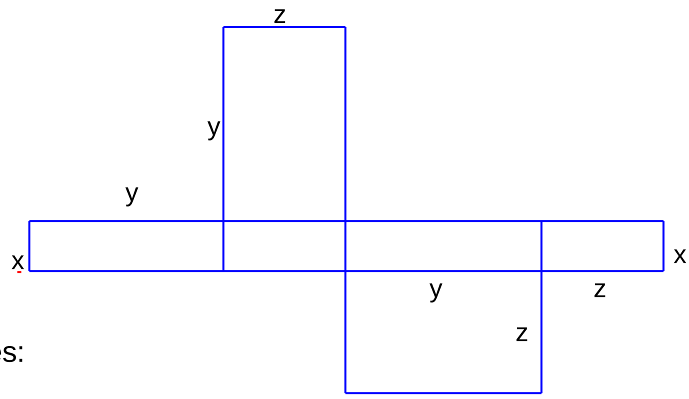
$\alpha=36º$.

2067.- El diagrama mostra el desenvolupament d’una caixa rectangular.
Calculeu el volum de la caixa quan la construïm.
Prova Cangur 2018



Solució:





Considerem la caixa amb les seues mesures:

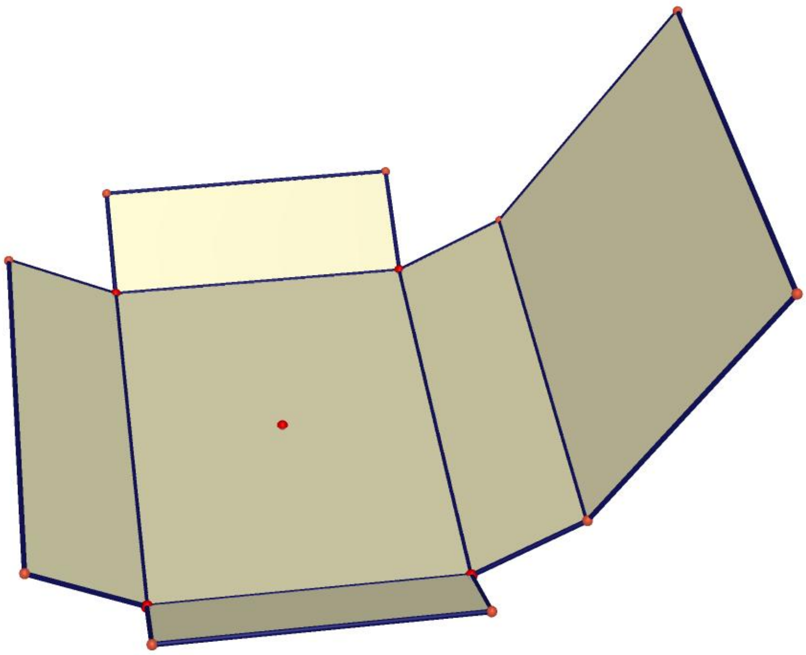
$$\begin{cases} x+y=10 \\ x+z=7 \\ 2y+2z=26 \end{cases}.$$

Resolent el sistema:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=8 \\ z=5 \end{cases}$$

El volum de la caixa és:

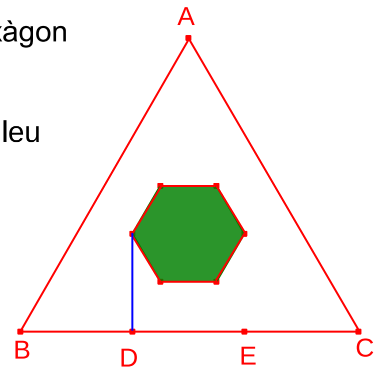
$V=xyz=80$.



2068.- A l'interior d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ s'ha dibuixat un hexàgon regular.

Si $\overline{DE}$ és igual a $\frac{1}{3}$ del costat $\overline{AB}$ i l'àrea de l'hexàgon és 1, calculeu l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Prova Cangur 2018



Solució:

$\overline{DE}$ és diagonal major de l'hexàgon regular.

El costat de l'hexàgon regular és $\frac{1}{2}\overline{DE}$.

L'àrea de l'hexàgon regular és igual l'àrea de 6 triangles equilàters de costat $\frac{1}{2}\overline{DE}$.

$$S_{hexàgon} = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{2}\overline{DE}\right)^2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}\overline{DE}^2.$$

El costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és $3 \cdot \overline{DE}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

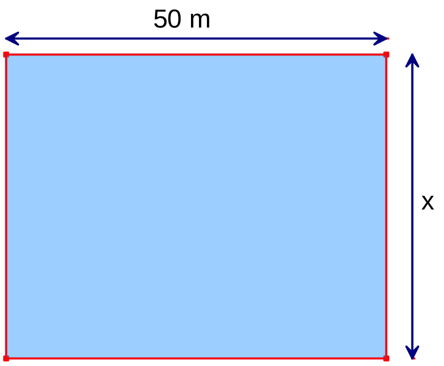
$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(3 \cdot \overline{DE}\right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}\overline{DE}^2.$$

La proporció entre les dues àrees és:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{hexàgon}} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}\overline{DE}^2}{\frac{3\sqrt{3}}{8}\overline{DE}^2} = 6.$$

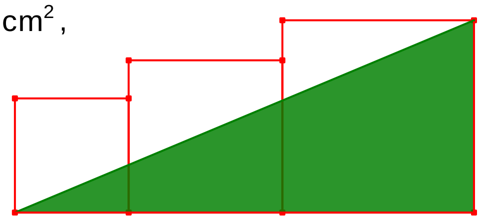
$$S_{ABC} = 6 \cdot S_{hexàgon} = 6.$$

2069.- En Simó i Na Isabel fan una cursa. Simó la fa corrent al voltant d'una piscina i Isabel la fa nedant els llargs de 50 m de la piscina.
La velocitat de Simó és tres voltes la velocitat d'Isabel.
En el temps que Isabel fa 6 llargs, Simó li dóna 5 vegades a la piscina.
Calculeu l'amplada de la piscina.
Prova Cangur 2018

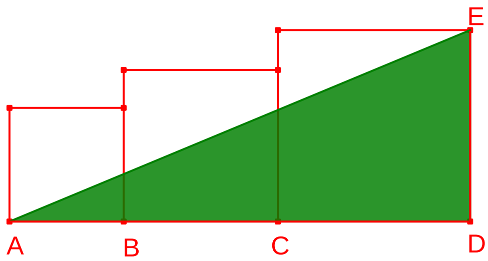


Solució:
L'espai que recorre Isabel és:
$e_I = 50 \cdot 6 = 300$.
L'espai que recorre Simó és:
$e_S = (100 + 2x)5 = 500 + 10x$.
El temps és el mateix per als dos.
$t = \frac{e_I}{v_I} = \frac{e_S}{v_S}$.
La velocitat de Simo és tres vegades la velocitat d'Isabel:
$v_S = 3 \cdot v_I$.
$\frac{300}{v_I} = \frac{500 + 10x}{3 \cdot v_I}$.
Simplificant:
$300 = \frac{500 + 10x}{3}$.
Resolent l'equació:
$x = 40\,\text{m}$.

2070.- En la figura hi ha dibuixats 3 quadrats d'àrees $9\ cm^2$, $16\ cm^2$ i $25\ cm^2$.
Calculeu la proporció entre l'àrea acolorida ni la no acolorida.



Solució:



El costat del quadrat menut és $\overline{AB}=3$ cm.

El costat del quadrat mitjà és $\overline{BC}=4$ cm.

El costat del quadrat gran és $\overline{CD}=\overline{DE}=5$ cm.

$\overline{AD}=12$ cm.

L'àrea acolorida és:

$S_{ADE}=\frac{1}{2}12\cdot 5=30\ cm^2$.

L'àrea no acolorida és igual a la suma de les àrees dels tres triangles menys l'àrea acolorida:

$S_{blanc}=(9+16+25)-30=20\ cm^2$.

La proporció entre la zona acolorida i la blanca és:

$\frac{S_{ADE}}{S_{blanc}}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$.