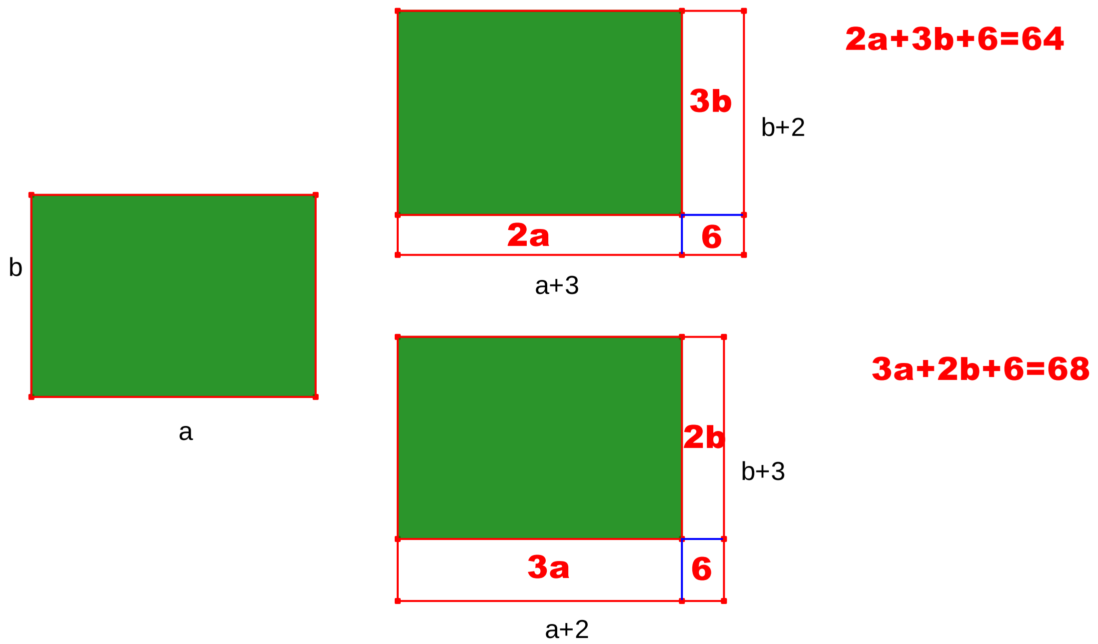
Problemes de Geometria per a l'ESO 208

2071.- Si un jardí rectangular l'eixamplarem 2 m més ample i 3 m més llarg, tindria 64 metres quadrats més gran. Si l'eixamplarem 3 m més amples i 2 m més llargs, tindria 68 metres quadrats més grans. Quines són les dimensions del jardí?

Solució:



Siga el rectangle de a metres de llarg i b metres d'ample.
Si l'eixamplarem 2 m més ample i 3 m més llarg, tindria 64 metres quadrats més gran. Aleshores.

$(a+3)(b+2)-ab=64$.

$2a+3b=58$.

Si l'eixamplarem 3 m més amples i 2 m més llargs, tindria 68 metres quadrats més grans. Aleshores:

$(a+2)(b+3)-ab=68$.

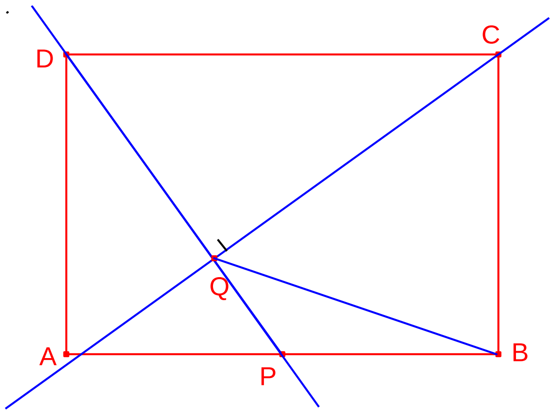
$3a+2b=62$.

Considerem el sistema format per les dues equacions:

$\begin{cases} 2a+3b=58 \\ 3a+2b=62 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} a=14\text{ m} \\ b=10\text{ m} \end{cases}$.

2072.- Siga ABCD un rectangle i P el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció perpendicular de C sobre la recta PD.

Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{BCQ}$ és isòsceles.

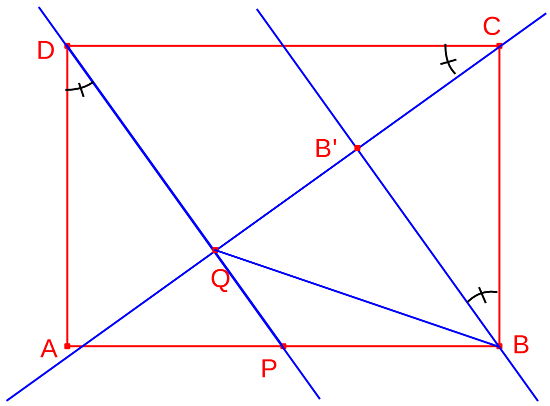


Solució:
Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ costats del rectangle.

$\overline{AP} = \frac{1}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAP}$:

$\overline{DP} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAP}$, $\overset{\Delta}{CQD}$. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CQ}}{b} = \frac{a}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

$$\overline{CQ} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Siga B' la projecció de B sobre la recta CQ.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAP}$, $\overset{\Delta}{BB'C}$. Aplicant el teorema de Tales:

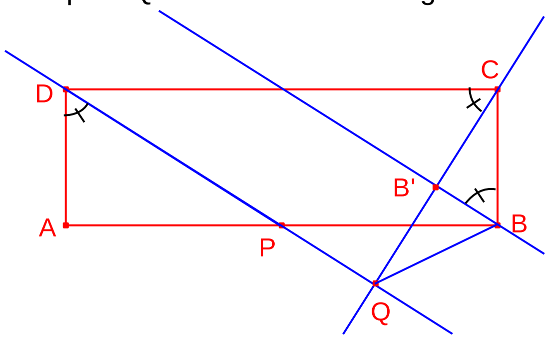
$$\frac{\overline{CB'}}{\frac{1}{2}a} = \frac{b}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Aleshores, $\overline{CB'} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}$.

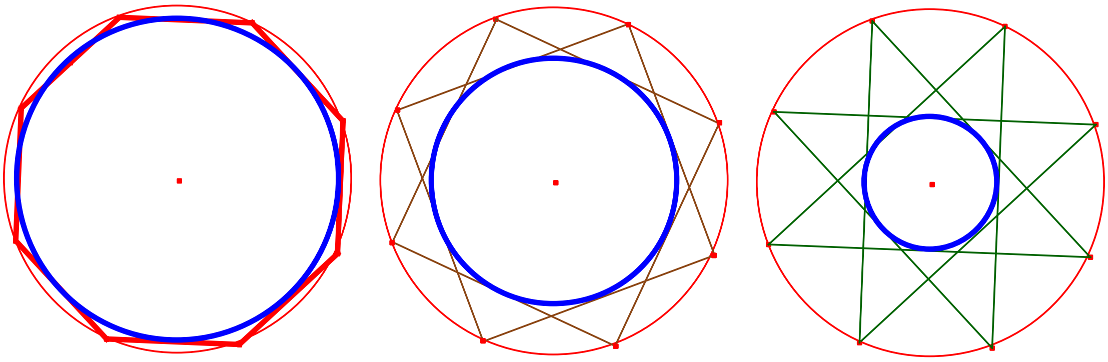
Per tant, $\overline{CB'} = \frac{1}{2}\overline{CQ}$.

Aleshores, B' és el punt mig del costat $\overline{CQ}$ i $\overline{BB'}$ perpendicular a aquest costat.

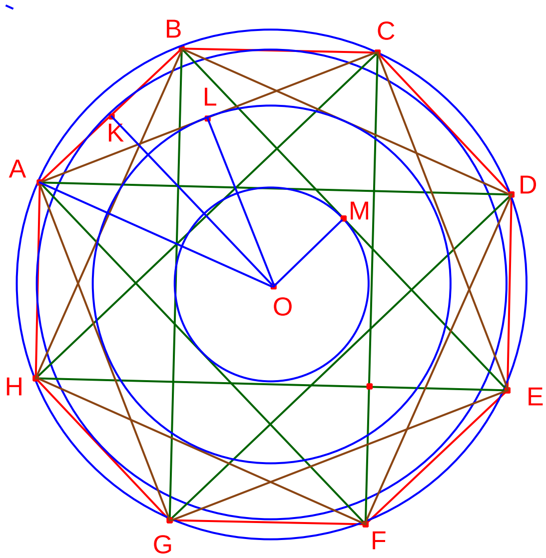
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCQ}$ és isòsceles, $\overline{BQ} = \overline{BC}$.
Si el punt Q és exterior al rectangle la demostració és anàloga.



2073.- Els vèrtexs d'un octógon regular inscrit en una circumferència de radi 2 eatan connectats de tres maneres diferentes, cada vèrtexs amb els vèrtexs adjacentes, formants dos quadrats i el tercer formant un octógon estrellat.
Demostreu que el producte dels radis de les terceres circumferències inscrites és 2.



KöMaL C1481.



Solució:
Siga ABCDEFGH l'octògon regular de centre O i radi $\overline{OA}=2$.

Siga $R_1=\overline{OK}$ radi de la circumferència inscrita a l'octògon regular ABCDEFGH

$\angle AOB=\dfrac{360^o}{8}=45^o$, $\angle AOK=\dfrac{45^o}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKO}$:

$R_1=2\cdot\cos\dfrac{45^o}{2}$.

Siga $R_2=\overline{OL}$ radi de la circumferència inscrita al quadrat ACEG:

$\angle AOC=90^o$, $\angle AOL=45^o$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ALO}$:

$R_2=2\cdot\cos 45^o$.

Siga $R_3=\overline{OM}$ radi de la circumferència inscrita al octògon estrellat:

$\angle BOE=135^o$, $\angle OEM=\dfrac{45^o}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EOM}$:

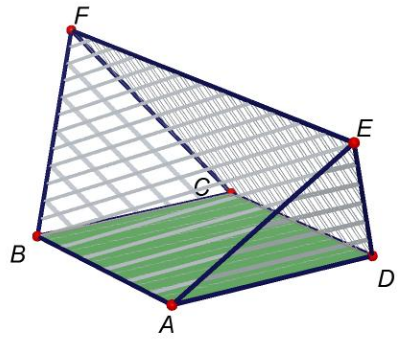
$R_3=2\cdot\sin\dfrac{45^o}{2}$.

$$R_1\cdot R_2\cdot R_3=2\cdot\cos\frac{45^o}{2}\cdot 2\cdot\cos 45^o\cdot 2\cdot\sin\frac{45^o}{2}=4\cdot\sin 45^o\cdot\cos 45^o=2\cdot\sin 90^o=2$$

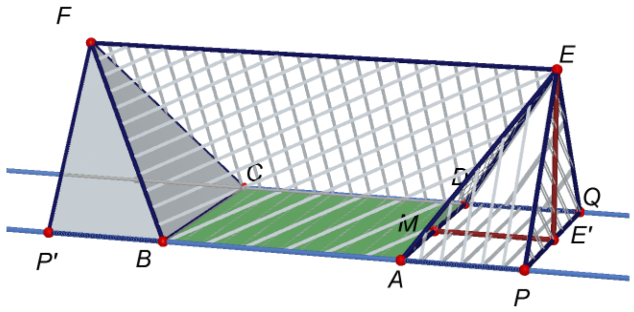
Generalització:
Si el radi de la circumferència circumscrita a l'octògon regular ABCDEFGH és R:

$R_1\cdot R_2\cdot R_3=\dfrac{R^3}{4}$.

2074.- En la figura, ABCD és un quadrat de costat $6\sqrt{2}$.
$\overline{EF}$ és paral·lel al quadrat i té longitud $12\sqrt{2}$.
Les cares BCF i ADE són triangle equilàters.
Calculeu el volum del sòlid ABCDEF.



Solució:



Siguen les rectes AB i CD.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$
Siga E' la projecció de E sobre el plànol ABCD.
El plànol perpendicular a la recta AB que passa per E talla les rectes AB i CD en els punts P i Q, respectivament.
El plànol perpendicular a la recta AB que passa per F talla les rectes AB i CD en els punts P' i Q', respectivament.

$$\overline{PP'} = \overline{EF} = 12\sqrt{2}$$

$$\overline{AP} = \overline{BP'} = \frac{1}{2}\left(\overline{EF} - \overline{AB}\right) = 3\sqrt{2}.$$

El volum del sòlid ABCDEF és igual al volum del prisma PQEP'Q'F menys dues vegades el volum de la piràmide APQDE.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$:

$$\overline{EM} = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{6}.$$

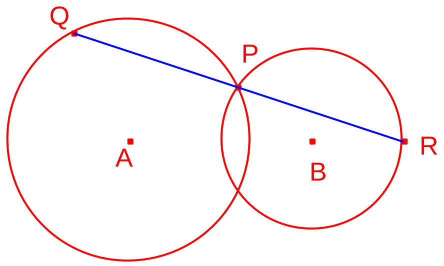
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ME'E}$:

$$\overline{EE'} = \sqrt{\left(3\sqrt{6}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 6.$$

El volum del sòlid ABCDEF és:

$$S_{ABCDEF} = \left(\frac{1}{2}\overline{PQ}\cdot\overline{EE'}\cdot\overline{EF}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\overline{AP}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{EE'}\right).$$

$$S_{ABCDEF} = \left(\frac{1}{2}6\sqrt{2}\cdot 6\cdot 12\sqrt{2}\right) - 2\left(\frac{1}{3}3\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 6\right) = 288.$$



2075.- Siguen dues circumferències de centres A i B i radis 8 i 6, respectivament. La distància entre els centres $\overline{AB}=12$.
Siga P intersecció de les dues circumferències.
Una recta que passa per P talla les circumferències en els punts Q i R tal que $\overline{QP}=\overline{PR}$. Calculeu $\overline{QP}^2$.

Solució 1:

Siga $\overline{QP}=\overline{PR}=x$. Siga $\alpha=\angle QPA=\angle AQP$, $\beta=\angle RPB=\angle PRB$.

Siga $\gamma=\angle APB$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$12^2=8^2+6^2-2\cdot8\cdot6\cdot\cos\gamma$. $\cos\gamma=\frac{-11}{24}$.

$\alpha+\beta+\gamma=180º$. $\alpha+\beta=180º-\gamma$.

$\cos\alpha=\frac{x}{2\cdot8}=\frac{x}{16}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{256-x^2}}{16}$. $\cos\beta=\frac{x}{2\cdot6}=\frac{x}{12}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{144-x^2}}{12}$.

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{24}$.

$\frac{x}{16}\cdot\frac{x}{12}-\frac{\sqrt{256-x^2}}{16}\cdot\frac{\sqrt{144-x^2}}{12}=\frac{11}{24}$. $x^2-\sqrt{256-x^2}\sqrt{144-x^2}=88$.

$x^2-88=\sqrt{256-x^2}\sqrt{144-x^2}$.

Elevant al quadrat i simplificant:

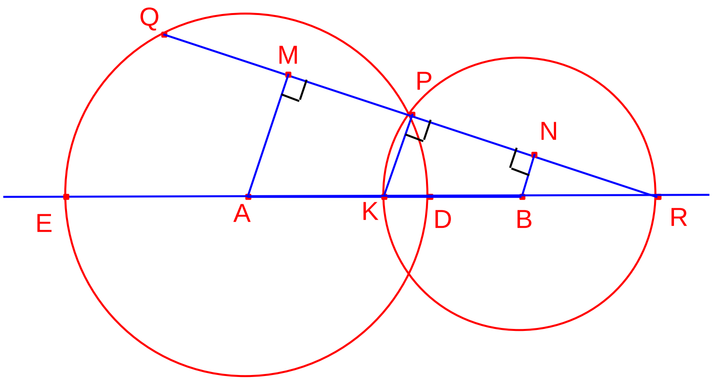
$\overline{QP}^2=x^2=130$.

Solució 2:

Siga $\overline{QP}=\overline{PR}=x$. Siga M el punt mig de $\overline{PQ}$. Siga N el punt mig de $\overline{PR}$.

$\angle AMR=\angle MNR=90º$

$\overline{PM}=\overline{PN}=\frac{1}{2}x$.



La circumferència de centre B talla el segment $\overline{AB}$ en el punt K. $\overline{BK}=\overline{AK}=6$.

Aplicant el teorema invers de Tales:

$\overline{KP}$ és paral·lel a $\overline{AM}$ i $\overline{BN}$.

Aleshores, $\angle KPR=90º$.

Aleshores, R pertany a la recta AB.

Siguen D i E la intersecció de la recta AB i la circumferència de centre A.

$\overline{RD}=10$, $\overline{RE}=26$

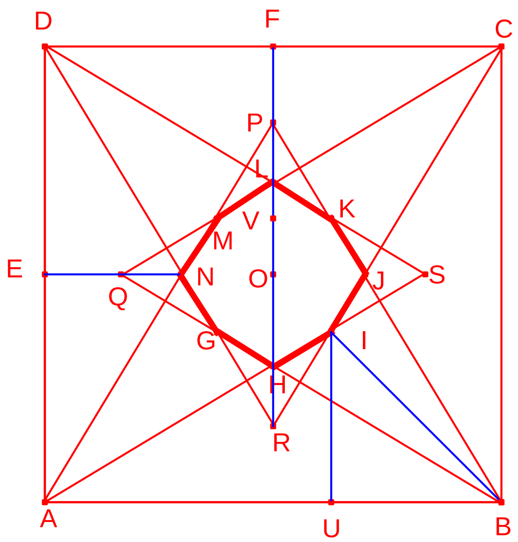
Aplicant la potència de R respecte de la circumferència de centre A:

$\overline{RP}\cdot\overline{RQ}=\overline{RD}\cdot\overline{RE}$.

$x\cdot2x=10\cdot26$. Resolent l'equació:

$x^2=130$.

2076.- A l'interior del quadrat de costat 60, construïm quatre triangles isòsceles igual de base 60 i altura 50, tal que cada base coincideix en un costat del quadrat.
Calculeu l'àrea de l'octògon format per les interseccions dels quatre triangles.
Crux Mathematicorum CC324.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=60$.

Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siga F el punt mig del costat $\overline{CD}$.

Siguen $\overset{\Delta}{ABP}$ $\overset{\Delta}{BCQ}$, $\overset{\Delta}{CDR}$ i $\overset{\Delta}{ADS}$ els triangles isòsceles d'altura 50.

$\overline{PF}=10$.

Siga GHIJKLMN l'octògon format per les interseccions dels quatre triangles.

Siga $\overline{EN}=\overline{FL}=x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{END}$, $\overset{\Delta}{FRD}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{30}{x}=\frac{50}{30}$. Resolent l'equació:

$x=18$.

$\overline{NJ}=\overline{AB}-2x=60-2\cdot 18=24$.

$\overline{PR}=\overline{AB}-2\cdot\overline{PF}=60-2\cdot 10=40$.

Siga U la projecció de I sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga $y=\overline{UB}$. Notem que I pertany a la diagonal $\overline{BD}$.

$\overline{AU}=60-y$, $\overline{IU}=y$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{UIA}$, $\overset{\Delta}{FRD}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{60-y}{y}=\frac{50}{30}$. Resolent l'equació:

$y=\frac{45}{2}$.

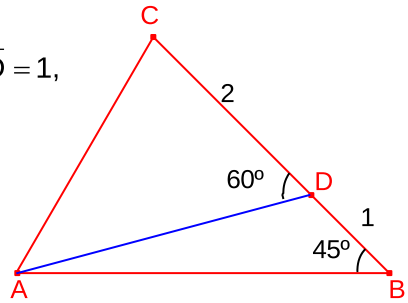
Siga V la projecció de K sobre $\overline{FR}$.

$\overline{VK}=\overline{CF}-y=30-\frac{45}{2}=\frac{15}{2}$.

L'àrea de l'octògon GHIJKLMN és igual a l'àrea del rombe PNRJ menys quatre vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PLK}$:

$$S_{GHIJKLMN}=\frac{1}{2}\overline{NJ}\cdot\overline{PR}-4\cdot\frac{1}{2}\overline{PL}\cdot\overline{VK}=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 40-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{15}{2}=360.$$

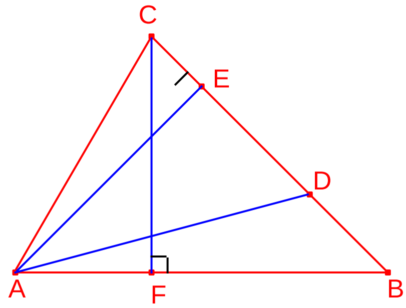
2077.- En el triangle ABC, com mostra la figura,
El punt D divideix el costat $\overline{BC}$ en dues parts de longituds $\overline{BD}=1$, $\overline{DC}=2$, i es coneixen els angles $\angle ABC=45^{o}$, $\angle ADC=60^{o}$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle ACB$.
Ledesma, A. (2005): Áreas de juegos y juegos de áreas. XVII Open Matemático. Deportes y Matemáticas.



Solució:

Siga $\overline{AE}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{CF}$ altura del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Siga $\overline{DE}=x$.

$\overline{BF}=\overline{CF}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

$\overline{AE}=x\sqrt{3}$.

$\overline{AE}=\overline{BE}=(1+x)\sqrt{2}$.

$x\sqrt{3}=(1+x)\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

$$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

$\overline{AB}=\overline{AE}\cdot\sqrt{2}=x\sqrt{6}$.

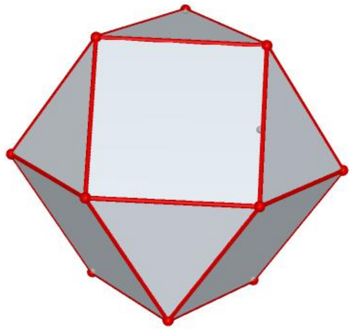
$$\overline{AF}=\overline{AB}-\overline{BF}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aleshores, $\angle ACF=30^{o}$

$\angle ACB=\angle FCB+\angle ACF=45^{o}+30^{o}=75^{o}$

2078.- Un cuboctaedre és un poliedre semiregular format per 12 cares (8 triangles equilàters i 6 quadrats de costats iguals).
Si el cuboctaedre té arestes iguals a 1, calculeu la distància entre dues cares triangulars oposades.



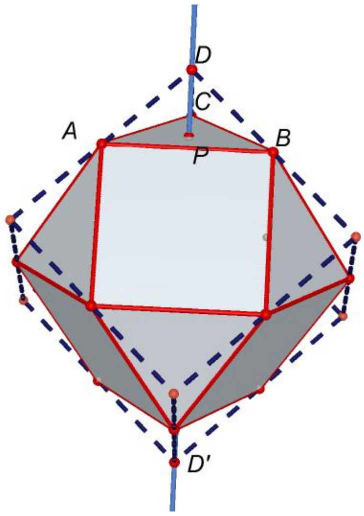
Solució:

Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ una cara triangle equilàter del cuboctaedre.

$\overline{AB} = 1$.

El cuboctaedre està inscrit en un cub, tal que els vèrtexs del cuboctaedre són els punts migs de les arestes del cub.

Siguen D i D' vèrtexs oposats del cub tal que la recta DD' és perpendicular a la cara $\overset{\Delta}{ABC}$ del cuboctaedre.



La recta DD' talla la cara $\overset{\Delta}{ABC}$ en el punt P.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'aresta del cub és:

$$a = 2\cdot\overline{AD} = \sqrt{2}.$$

La diagonal $\overline{DD'}$ del cub mesura:

$$\overline{DD'} = a\sqrt{3} = \sqrt{6}.$$

P és el centre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

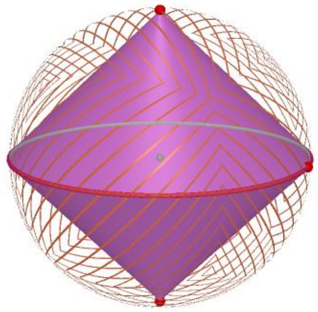
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPD}$:

$$\overline{PD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

La distància entre dues cares triangulars oposades del cuboctaedre és:

$$d = \overline{DD'} - 2\cdot\overline{PD} = \sqrt{6} - 2\cdot\frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

La distància entre dues cares quadrades oposades és igual a l'aresta del cub.



2079.- En una esfera hi ha inscrit un doble con recte. Calculeu la proporció entre L'àrea del doble con i l'àrea de l'esfera.

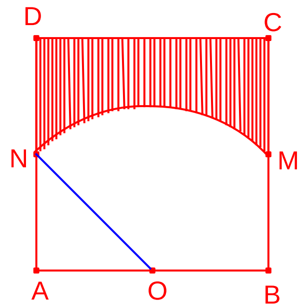
Solució:
La generatriu del con és:
$g = R\sqrt{2}$.
L'àrea del doble con és:
$S_{2c} = 2\pi R \cdot R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \pi R^2$.
L'àrea de l'esfera és:
$S_e = 4\pi R^2$.
La proporció entre els volums és:
$$\frac{S_{2c}}{S_e} = \frac{2\sqrt{2}\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2080.- Siga el quadrat ABCD.

Siguen O, M, N els punts migs dels costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$.

Dibuixem l'arc $\overset{\frown}{MN}$ de centre O.

Calculeu la proporció entre l'àrea ratllada i l'àrea del quadrat ABCD.



Solució:

Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat.

$\angle MON = 90^\circ$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{OBN}$:

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

L'àrea ratllada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys la suma de les àrees d'un quadrant de radi $\overline{OM} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ i l'àrea d'un quadrat de costat $\overline{OA} = \frac{1}{2}c$:

$$S_{ratllada} = c^2 - \left(\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right)^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2\right) = \frac{6-\pi}{8}c^2.$$

La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ratllada}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{6-\pi}{8}c^2}{c^2} = \frac{6-\pi}{8} \approx 0.3573.$$