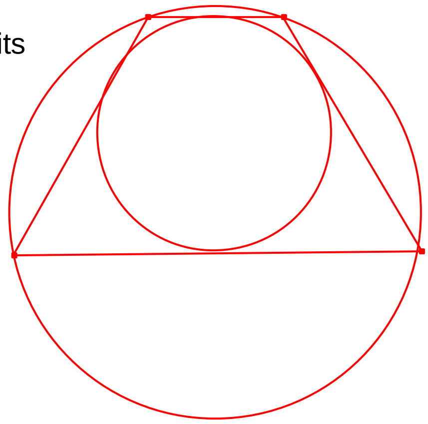
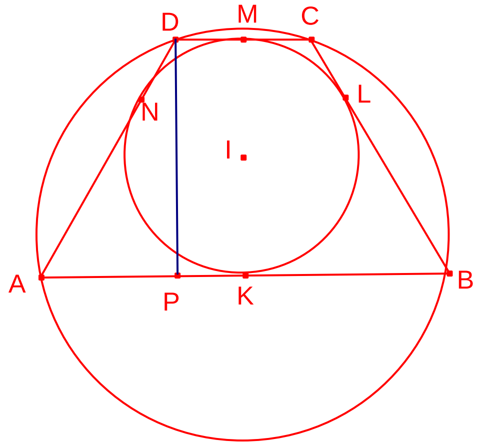
# Problemes de Geometria per a l'ESO 209



2081.- Els trapezis isòsceles tenen la propietat que estan inscrits en una circumferència ja que els angles oposats són suplementaris (teorema de Tolomeu).
En un trapezi isòsceles els angles aguts mesuren 60º i té inscrita una circumferència.
Calculeu la proporció entre els radis de la circumferència inscrita i la circumferència circumscrita al trapezi.

Solució:
Siga el trapezi isòsceles ABCD $A = B = 60^o$.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi.
Siga $\overline{AK} = \overline{BK} = \overline{AN} = \overline{BL} = x$, $\overline{CM} = \overline{DM} = \overline{CL} = \overline{DN} = y$.




Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \dfrac{1}{2}$.
$\overline{AP} = x - y$, $\overline{AD} = x + y$.
$\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1}{2}$.
Simplificant, $x = 3y$.
Siga r el radi de la circumferència inscrita al trapezi.
$\overline{DP} = 2r$.
$2r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}4y$. Simplificant:
$r = y\sqrt{3}$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$. $\overline{AB} = 6y$, $\overline{AD} = 4y$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ : $\overline{BD}^2 = 36y^2 + 16y^2 - 2 \cdot 6y \cdot 4y \cdot \dfrac{1}{2}$.

$\overline{BD} = 2\sqrt{7}\,y$.

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, (circumscrita al trapezi).

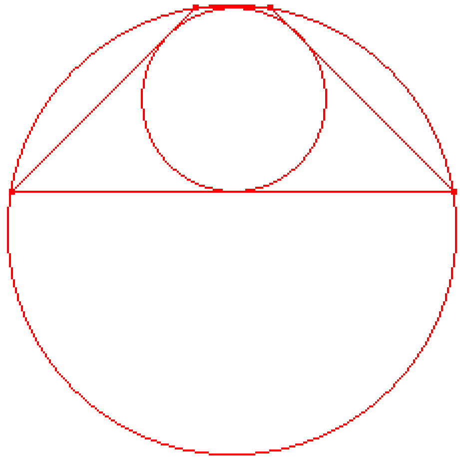
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ : $\dfrac{\overline{BD}}{\sin 60^o} = 2R$.

$2R = \dfrac{2\sqrt{7}\,y}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Simplificant: $R = \dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}y$.

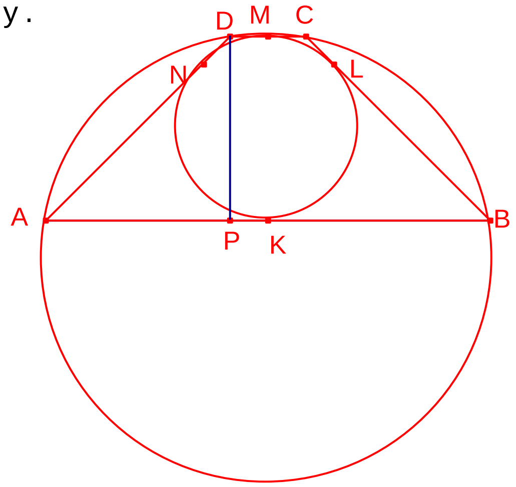
La proporció entre els radis de la circumferència inscrita i la circumferència circumscrita al trapezi.

$$\frac{r}{R} = \frac{y\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}y} = \frac{3\sqrt{7}}{14}.$$

2082.- Els trapezis isòsceles tenen la propietat que estan inscrits en una circumferència ja que els angles oposats són suplementaris (teorema de Tolomeu).
En un trapezi isòsceles els angles aguts mesuren 45º i té inscrita una circumferència.
Calculeu la proporció entre els radis de la circumferència inscrita i la circumferència circumscrita al trapezi.



Solució:
Siga el trapezi isòsceles ABCD $A = B = 45^{\circ}$.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al trapezi.
Siga $\overline{AK} = \overline{BK} = \overline{AN} = \overline{BL} = x$, $\overline{CM} = \overline{DM} = \overline{CL} = \overline{DN} = y$.




Siga P la projecció de D sobre el costat $\overline{AB}$.
$\frac{\overline{AP}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
$\overline{AP} = x - y$, $\overline{AD} = x + y$.
$\frac{x-y}{x+y} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Simplificant, $x = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)y$.
Siga r el radi de la circumferència inscrita al trapezi.
$\overline{DP} = 2r$.
$2r = x - y = \left(2 + 2\sqrt{2}\right)y$. Simplificant:
$r = \left(1 + \sqrt{2}\right)y$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$. $\overline{AB} = \left(6 + 4\sqrt{2}\right)y$, $\overline{AD} = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)y$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$\overline{BD}^2 = \left(6 + 4\sqrt{2}\right)^2 y^2 + \left(4 + 2\sqrt{2}\right)^2 y^2 - 2 \cdot \left(6 + 4\sqrt{2}\right)y \cdot \left(4 + 2\sqrt{2}\right)y \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{BD} = \sqrt{36 + 24\sqrt{2}}\, y.$$

Siga R el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, (circumscrita al trapezi).

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$: $\frac{\overline{BD}}{\sin 45^{\circ}} = 2R$.

$$2R = \frac{\left(\sqrt{36 + 24\sqrt{2}}\right)y}{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$ Simplificant: $R = \sqrt{18 + 12\sqrt{2}}\, y$.

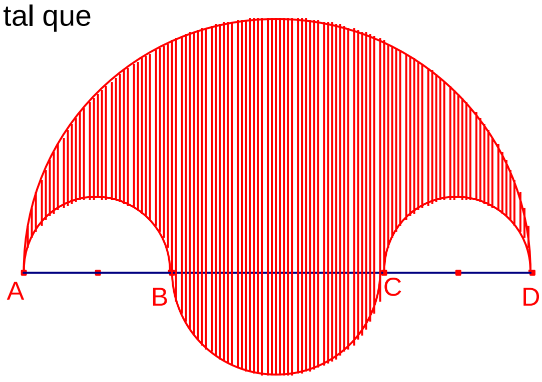
La proporció entre els radis de la circumferència inscrita i la circumferència circumscrita al trapezi.

$$\frac{r}{R} = \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)y}{\sqrt{18 + 2\sqrt{2}}\, y} = \frac{\left(-1 + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{18 + 2\sqrt{2}}\right)}{6} \approx 0.41.$$

2083.- Sobre el segment $\overline{AD}$ determinem els punts B, C tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$.

L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AD}$ és igual a l'àrea ratllada entre les quatre semicircumferències.

Determineu la proporció entre els segments $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.




Solució:

Siguen $\overline{AD} = 2R$, $\overline{AB} = 2r$, $\overline{BC} = 2s$.

$2r + s = R$.

L'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AB}$ és igual a l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{BC}$:

$\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi s^2$. Simplificant:

$s = r\sqrt{2}$.

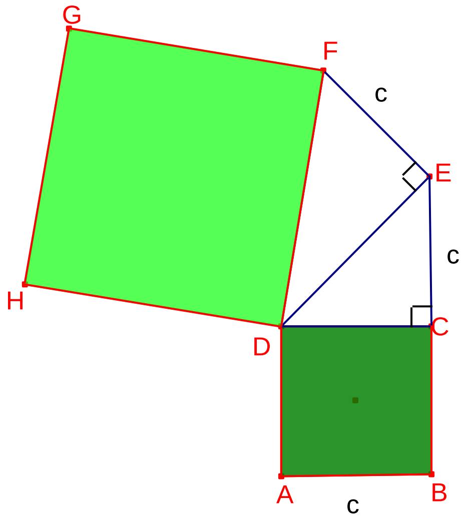
$\left(2+\sqrt{2}\right)r = R$.

$$\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

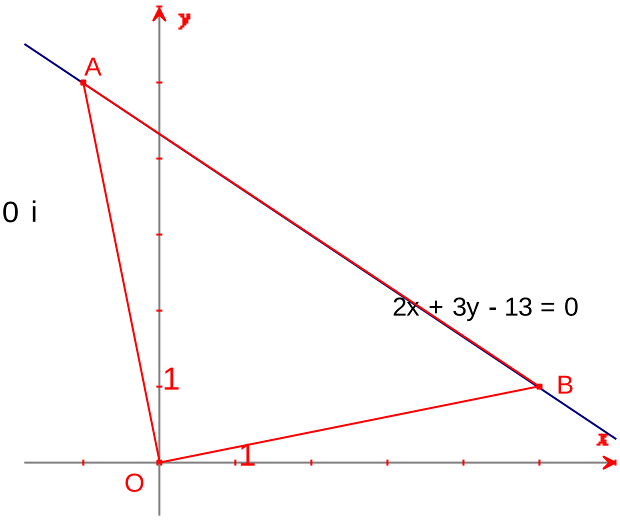
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{2r}{2R} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

2084.- Sobre el segment $\overline{AD}$ determinem els punts B, C tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$.
L'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{AD}$ és igual a l'àrea ratllada entre les quatre semicircumferències.
Determineu la proporció entre els segments $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

Solució:




Siguen $\overline{AD} = 2R$, $\overline{AB} = 2r$, $\overline{BC} = 2s$.
$2r + s = R$.
L'àrea del cercle de diàmetre $\overline{AB}$ és igual a l'àrea del semicercle de diàmetre $\overline{BC}$:
$\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi s^2$. Simplificant:
$s = r\sqrt{2}$.
$\left(2+\sqrt{2}\right)r = R$.
$\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.
$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{2r}{2R} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$.



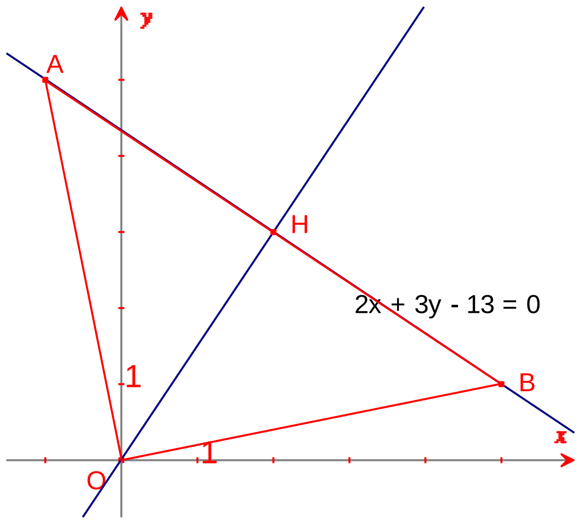

2085.-

El triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ isòsceles i rectangle en el vèrtex $O(0,0)$.

Els vèrtexs A i B pertanyen a la recta $2x+3y-13=0$ i $\angle AOB = 90^o$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$.

Solució 1:




Dibuixem l'altura del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ sobre la hipotenusa $\overline{AB}$.

L'altura talla la hipotenusa en el punt H.

Per ser el triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ isòsceles $\overline{OH}=\overline{AH}=\overline{BH}$.

$\overline{OH}$ és igual a la distància de O a la recta $2x+3y-13=0$.

$$\overline{OH} = \left|\frac{2\cdot 0+3\cdot 0-13}{\sqrt{2^2+3^2}}\right| = \frac{13}{\sqrt{13}}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és igual a 2 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OHB}$:

$$S_{OAB} = 2\left(\frac{\overline{OH}^2}{2}\right) = 13.$$

Solució 2:

L'equació de la recta OH perpendicular a la recta $2x+3y-13=0$ és: $-3x+2y=0$.

El punt H és igual a la intersecció de les dues rectes:

$\begin{cases} 2x+3y-13=0 \\ -3x+2y=0 \end{cases}$. Resolent el sistema, les coordenades de H són $H(2,3)$

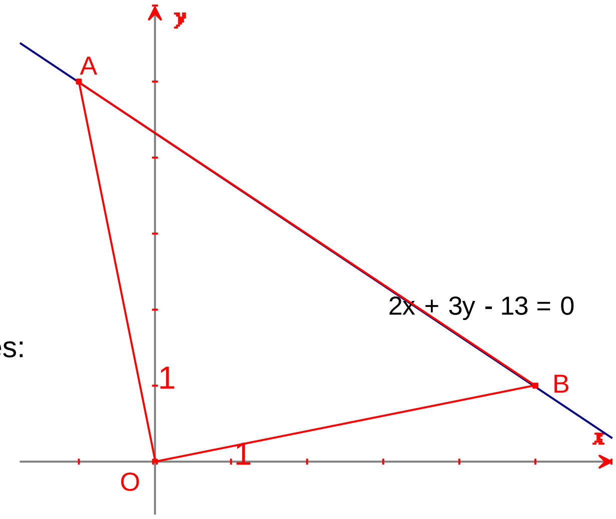
$\overline{OH} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAB}$ és igual a 2 vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OHB}$:

$$S_{OAB} = 2\left(\frac{\overline{OH}^2}{2}\right) = 13.$$

Solució 3:

$2x+3y-13=0$, aleshores, $y=\dfrac{13-2x}{3}$.




Les coordenades dels punts A i B són:

$A\left(a,\dfrac{13-2a}{3}\right)$, $B\left(b,\dfrac{13-2b}{3}\right)$, $a<0$, $b>0$.

El pendent del segment $\overline{OA}$ és $\dfrac{13-2a}{3a}$.

El pendent del segment $\overline{OB}$ és $\dfrac{13-2b}{3b}$.

Els segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ són perpendiculars, aleshores:

$\dfrac{13-2a}{3a}=\dfrac{-1}{\dfrac{13-2b}{3}}$. Simplificant:

$13ab+169-26a-26b=0$.

$ab+13-2a-2b=0$ (1)

Els segments $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ són iguals, aleshores:

$\sqrt{a^2+\dfrac{4a^2-52a+169}{9}}=\sqrt{b^2+\dfrac{4b^2-52b+169}{9}}$. Elevant al quadrat i simplificant:

$13a^2-52a=13b^2-52b$.

$13\left(a^2-b^2-4a+4b\right)=0$.

$13\left((a+b)(a-b)-4(a-b)\right)=0$. Simplificant:

$a+b=4$ (2)

Considerem el sistema format per les expressions (1) i (2):

$\begin{cases} a+b=4 \\ ab+13-2a-2b=0 \end{cases}$, $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=-5 \end{cases}$.

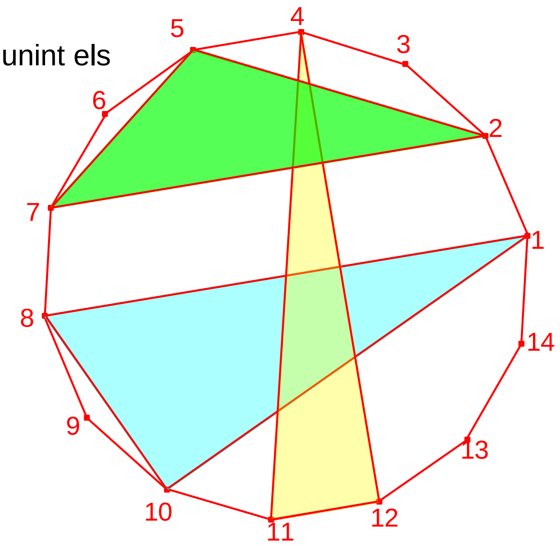
La solució del sistema és $\begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases}$.

$A(-1,5)$, $B(5,1)$.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$.

$S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}^2=13$.

2086.- Quant triangle rectangles es poden formar unint els vèrtexs d'un polígon regular de 14 costats?

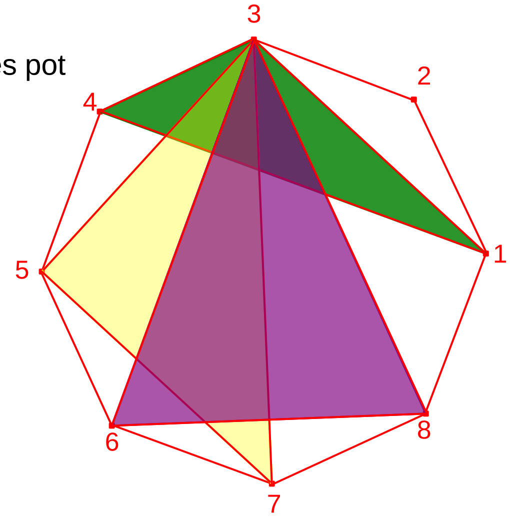



Solució:
Per construir un triangle rectangle la hipotenusa ha de ser un diàmetre de la circumferència circumscrita al polígon regular.
Un polígon regular de 14 costats té 7 diàmetres, unint vèrtexs.
Per format un triangle, caldrà un diàmetre i qualsevol dels 12 vèrtexs que resten.
Aleshores el nombre de triangle rectangles és:
$7 \cdot 12 = 84$ .

Generalització:
Quant triangle rectangles es poden formar unint els vèrtexs d'un polígon regular de 2n costats?

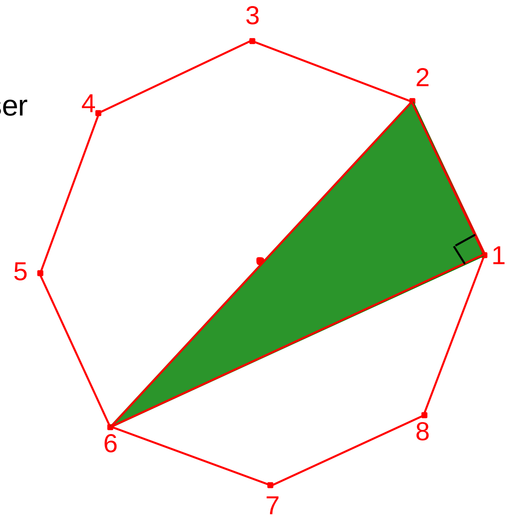
Solució:
$\frac{n}{2}(n-2)$ .

2087.-
Escollint a l'atzar 3 vèrtexs d'un polígon octògon regular es pot construir un triangle.
Escollim un triangle a l'atzar calculeu les probabilitats següents:
a) Que el triangle escollit siga rectangle.
b) Que el triangle escollit siga obtusangle.
c) Que el triangle escollit siga acutangle.




Solució:
Els casos possibles de l'experiment són les combinacions de 8 vèrtexs agafats de 3 en 3:
$C_{8,3}$.

a)
Siga A el succés construir un triangle rectangle.

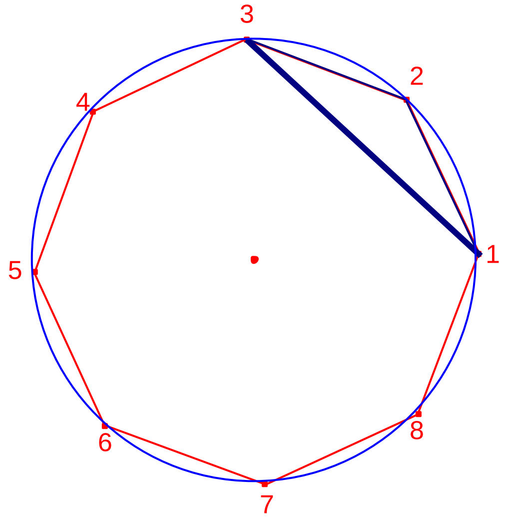


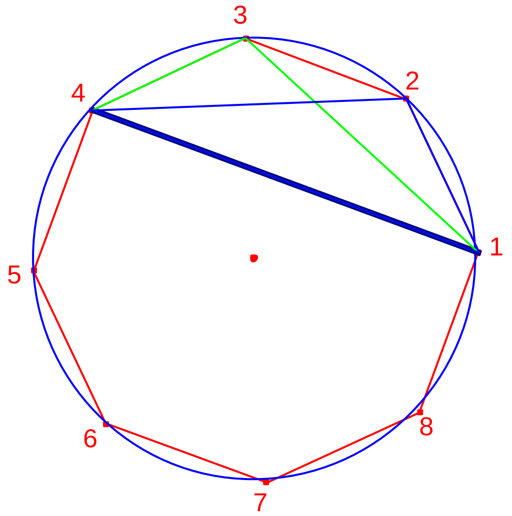

Per construir un triangle rectangle la hipotenusa ha de ser un diàmetre de la circumferència circumscrita al polígon regular.
Un polígon regular de 8 costats té 4 diàmetres, unint vèrtexs.
Per format un triangle, caldrà un diàmetre i qualsevol dels 6 vèrtexs que resten.
Aleshores el nombre de triangles rectangles (casos favorables) és:
$4 \cdot 6 = 24$.

La probabilitat del succés A és: $P(A) = \dfrac{24}{C_{8,3}}$.

$$P(A) = \frac{24}{C_{8,3}} = \frac{3}{7}.$$

b)
Siga B succés construir un triangle obtusangle.
Considerem el costat més gran d'un triangle que no siga una diagonal de l'octàedre.
Per construir un triangle obtusangle el vèrtex que ens falta per construir el triangle ha de pertànyer a la part del l'arc menor de 180º.




Hi ha 8 cordes iguals a la corda $\overline{1,3}$.

Amb la corda $\overline{1,3}$ és forma 1 triangle obtusangle.

Hi ha 8 cordes iguals a la corda $\overline{1,4}$.

Amb la corda $\overline{1,4}$ és formen 2 triangle obtusangles.

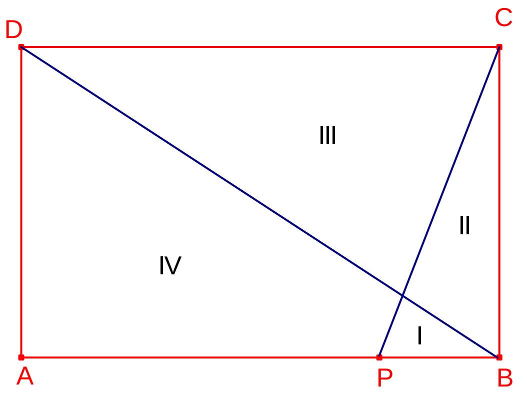
Aleshores el nombre de triangles rectangles (casos favorables) és:
$8+8\cdot 2$

La probabilitat del succés B és: $P(B)=\frac{8+8\cdot 2}{C_{8,3}}$.

$P(B)=\frac{3}{7}$.

c)
Siga C succés construir un triangle obtusangle.
La probabilitat de C és:

$P(C)=1-(P(A)+P(B))=1-\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{7}$.

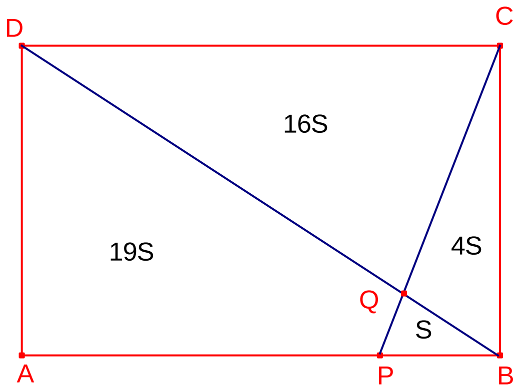



2088.- Siga el rectangle ABCD d'àrea 120.

Siga P el punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AP}=\frac{3}{4}\overline{AB}$.

Els segments $\overline{BD}$, $\overline{CP}$ dividiexen el rectangle ABCD en quatre parts.
Determineu l'àrea de les quatre parts.

Solució:




Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PBQ}$.

$\overline{BP}=\frac{1}{4}\overline{AB}$

Siga Q la intersecció del segments $\overline{BD}$, $\overline{CP}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$ i $\overset{\Delta}{CDQ}$ són semblants i de raó 1:4.
La proporció de les àrees és:

$\frac{S_{PBQ}}{S_{CDQ}}=\left(\frac{1}{4}\right)^2$. Aleshores:

$S_{CDQ}=16\cdot S$.

$PQ=\frac{1}{4}\overline{CQ}$

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$ i $\overset{\Delta}{CQB}$ tenen la mateixa altura, les àrees són proporcionals a les bases:

$\frac{S_{PBQ}}{S_{CQB}}=\frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}}=\frac{1}{4}$. Aleshores:

$S_{CQB}=4\cdot S$.

$S_{BCD}=S_{CDQ}+S_{CQB}=20S=\frac{1}{2}120=60$.

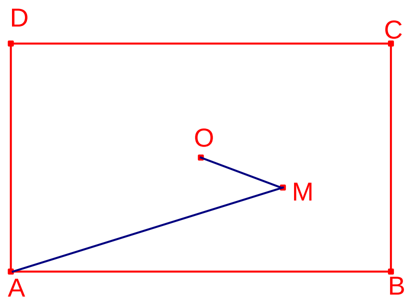
$S=3$.

$S_{CDQ}=16\cdot S=48$.

$S_{CQB}=4\cdot S=12$.

$S_{APQD}=19\cdot S=57$.

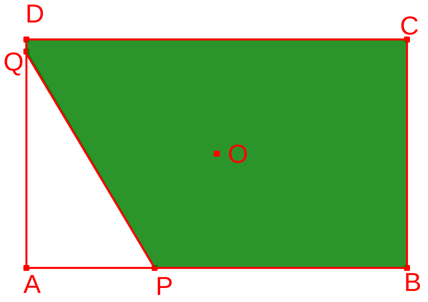
2089.- Siga el rectangle ABCD $\overline{AB}=20$, $\overline{AD}=12$ de centre O.
S’escull un punt M qualsevol en l’interior del rectangle.
Calculeu la probabilitat que la distància del punt M al centre O siga menor que la distància del punt M al vèrtex A.

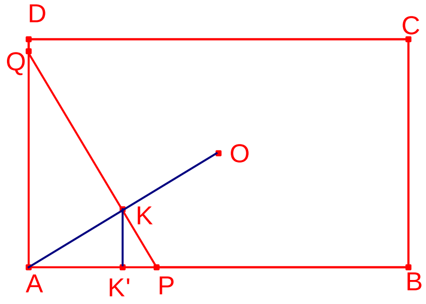



Solució:

La mediatriu del segment $\overline{OA}$ formen els punts que equidisten dels punts A i O.
La mediatriu talla el rectangle ABCD en els punts P, Q.
La mediatriu divideix el rectangle en dues superfícies.
Els punts que pertanyen a l’interior del pentàgon PBCDQ, estan a menor distància de O que de A.

Calculem l’àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:




Siga K el punt mig del segment $\overline{AO}$.
Siga K’ la projecció de K sobre el costat $\overline{AB}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AK'K}$ són semblants i de raó 4:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{KK'}=\frac{1}{4}\overline{BC}=3$, $\overline{AK'}=\frac{1}{4}\overline{AB}=5$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{KK'P}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{K'P}}{12}=\frac{3}{20}$. Aleshores, $\overline{K'P}=\frac{9}{5}$.

$\overline{AP}=\overline{AK'}+\overline{K'P}=\frac{34}{5}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{QAP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AQ}}{20}=\frac{\frac{34}{5}}{12}$. Aleshores, $\overline{AP}=\frac{34}{3}$.

L’àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{QAP}$ és:

$S_{QAP}=\frac{1}{2}\frac{34}{5}\frac{34}{3}=\frac{578}{15}$.

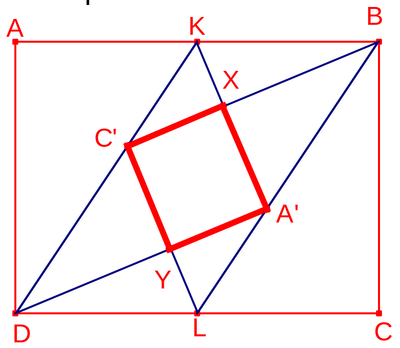
L'àrea del pentàgon PBCDQ és igual a l'àrea del rectangle ABCD menys l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{QAP}$ .

$$S_{PBCDQ} = S_{ABCD} - S_{QAP} = 240 - \frac{578}{15} = \frac{3022}{15}.$$

La probabilitat que cerquem és:

$$P = \frac{S_{PBCDQ}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{3022}{15}}{240} = \frac{1511}{1800}.$$

2090.- Suposem que ABCD representa un full de paper rectangular de 9 per 12.
Els punts K i L són els punts migs dels costats $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$, respectivament.
El costat $\overline{AD}$ es doblega sobre $\overline{DK}$ i el costat $\overline{BC}$ es doblega sobre $\overline{BL}$.
Els costats així doblegats formen la regió poligonal C'XA'Y com mostra la figura.
Determineu l'àrea del polígon C'XA'Y.
*Crux Mathematicorum 4357.*




Solució:
En el quadrilàter C'XA'Y, $A' = C' = 90^o$.
$\overline{BC'}$ i $\overline{DA'}$ són paral·lels, aleshores, $X = Y = 90^o$.
Aleshores, C'XA'Y és un rectangle.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DAK}$:
$\overline{DK} = 3\sqrt{13}$.
Siga $\alpha = \angle ADK$.
$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$.
$\angle YDL = 90^o - 2\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DYL}$:

$$\frac{\overline{LY}}{6} = \cos 2\alpha = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = \frac{5}{13}.$$

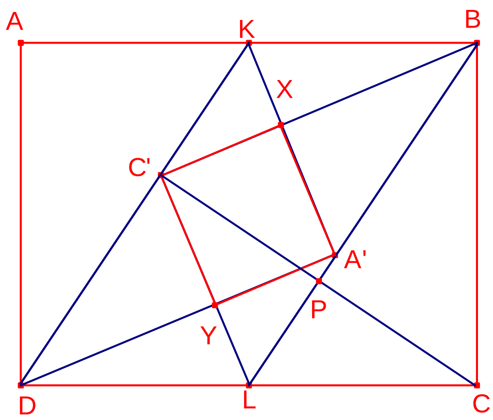
Aleshores, $\overline{LY} = \frac{30}{13}$, $\overline{YC'} = \overline{LC'} - \overline{LY} = \frac{48}{13}$.

$$\frac{\overline{DY}}{6} = \sin 2\alpha = 2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}.$$

Aleshores, $\overline{DY} = \frac{72}{13}$, $\overline{YA'} = \overline{DA'} - \overline{DY} = \frac{45}{13}$.
L'àrea del rectangle C'XA'Y és:

$$S_{C'XA'Y} = \overline{YC'} \cdot \overline{YA'} = \frac{48}{13} \cdot \frac{45}{13} = \frac{2160}{169} \approx 12.78.$$

Solució 2:
Els segments $\overline{BL}$ i $\overline{CC'}$ són perpendiculars i es tallen en el punt mig P del segment $\overline{CC'}$.
En el quadrilàter C'XA'Y, $A' = C' = 90^o$.




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DAK}$:
$\overline{DK} = 3\sqrt{13}$.
$\overline{BC'}$ i $\overline{DA'}$ són paral·lels, aleshores, $X = Y = 90^o$.
Aleshores, C'XA'Y és un rectangle.
Siga $\alpha = \angle ADK$.
Els segments $\overline{DK}$ i $\overline{BL}$ són paral·lels, aleshores C' Pertany al segment $\overline{DK}$.
$\angle CC'D = \angle ADK$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAK}$, $\overset{\Delta}{CC'D}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{DC'}}{12}=\frac{6}{3\sqrt{13}}.\ \overline{DC'}=\frac{72}{3\sqrt{13}}=\frac{24\sqrt{13}}{13}.$$

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAK}$, $\overset{\Delta}{DYC'}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{C'Y}}{\frac{24\sqrt{13}}{13}}=\frac{6}{3\sqrt{13}}.\quad \overline{C'Y}=\frac{24\sqrt{13}}{13}\frac{6}{3\sqrt{13}}=\frac{48}{13}.$$

$$\overline{C'X}=\overline{DK}-\overline{DC'}=3\sqrt{13}-\frac{24\sqrt{13}}{13}=\frac{15\sqrt{13}}{13}$$

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DAK}$, $\overset{\Delta}{C'XK}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{C'X}}{\frac{15\sqrt{13}}{13}}=\frac{9}{3\sqrt{13}}.\quad \overline{C'X}=\frac{15\sqrt{13}}{13}\frac{9}{3\sqrt{13}}=\frac{45}{13}.$$

L'àrea del rectangle C'XA'Y és:

$$S_{C'XA'Y}=\overline{YC'}\cdot\overline{YA'}=\frac{48}{13}\cdot\frac{45}{13}=\frac{2160}{169}\approx 12.78.$$