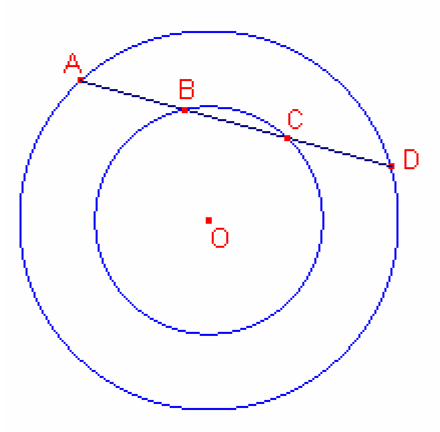
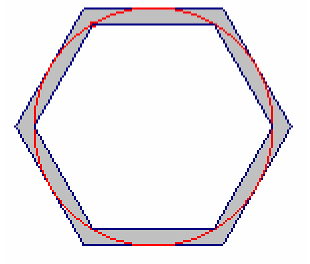
Problemes de Geometria per a l'ESO 21

201.- Siguen dues circumferències concèntriques de radis 3cm i 5cm. Determineu la longitud d'una corda de la circumferència gran que intersecta la circumferència menuda i divideix la corda en 3 parts iguals.
García Ardura, 406.

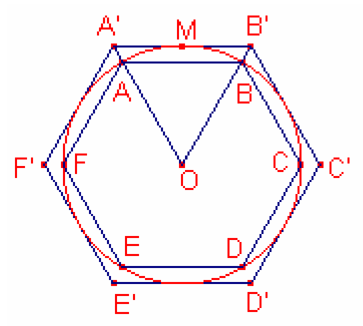


Solució:
Siguen les circumferències concèntriques de centre O, de radis $R=5$, $r=3$.
Siga la corda $\overline{AD}$ de la circumferència gran que talla la circumferència menuda en els punts B, C tal que
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=x$
Aplicant la potència del punt A respecte de la circumferència menor:
$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AO}^2-r^2$.
$2x^2=5^2-3^2$. Resolent l'equació:
$x=2\sqrt{2}$.
$\overline{AD}=3x=6\sqrt{2}\approx 8'485\text{cm}$.



202.- Calculeu l'àrea de la figura limitada per dos hexàgons regulars un inscrit i l'altre circumscrit a una circumferència de radi 10cm.
García Ardura, 759.

Solució:
Siga la circumferència de radi 10.
Siga ABCDEF l'hexàgon regular inscrit en la circumferència.
El costat mesura el mateix que el radi $\overline{AB} = 10$.
Siga A'B'C'D'E'F' l'hexàgon regular circumscrit en la circumferència.
L'apotema mesura el mateix que el radi
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. $\overline{OM} = 10$ és l'apotema de l'hexàgon A'B'C'D'E'F'.



L'àrea de l'hexàgon ABCDEF és:

$$S_{ABCDEF} = \frac{60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 10}{2} = 150\sqrt{3}.$$

Siga $\overline{OA'} = \overline{A'B'} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA'}$:

$x^2 = 10^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{20\sqrt{3}}{3}.$$

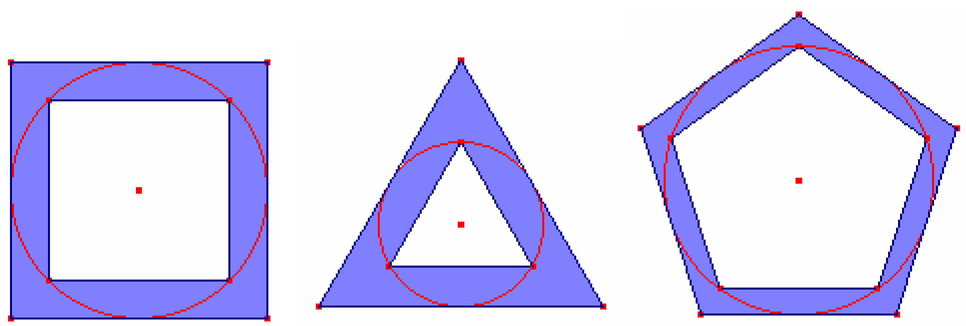
L'àrea de l'hexàgon A'B'C'D'E'F' és:

$$S_{A'B'C'D'E'F'} = \frac{40\sqrt{3} \cdot 10}{2} = 200\sqrt{3}.$$

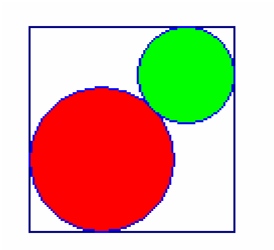
L'àrea cercada és la diferència entre les àrees dels dos hexàgons:

$S = 50\sqrt{3} \approx 86'60\text{cm}^2$.

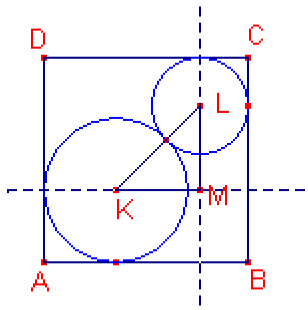
Altres propostes:
Calculeu l'àrea de la figura limitada per dos triangles equilàters (dos quadrats, dos pentàgons regulars) un inscrit i l'altre circumscrit a una circumferència de radi 10cm.



203.- Es construeix un cercle de radi r tangent a dos costats contigus d'un quadrat de costat c.
Construïm un segon cercle tangent a l'anterior i tangent als altres dos costats del quadrat.
Calculeu el radi del segon cercle.
Garcia Ardura, 792.



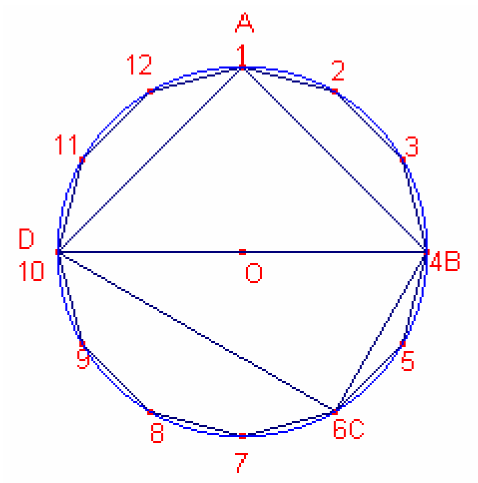
Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
Siga la circumferència tangent als costats $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ de centre K i radi r.



Siga la circumferència de centre L tangent a la circumferència anterior i tangent als costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$.
Siga s el seu radi.
Pel punt K tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$. Pel punt L tracem una paral·lela al costat $\overline{BC}$. Les dues rectes s'intersecten en el punt M.
El triangle $\overset{\Delta}{KML}$ és rectangle i isòsceles:
$\overline{KL} = r + s$, $\overline{LM} = \overline{KM} = c - r - s$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KML}$:
$r + s = (c - r - s)\sqrt{2}$. Resolent l'equació en la incògnita s:

$$s = \frac{c\sqrt{2} - r\sqrt{2} - r}{1 + \sqrt{2}}.$$

204.- Una circumferència de radi 10m es divideix en 12 parts iguals i es numeren correlativament els punts de divisió de l'1 al 12.
Determineu l'àrea del quadrilàter format per la unió dels segments 1 al 4, 4 al 6, 6 al 10 i 10 a l'1.
García Ardura, 708.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi 10.
Siga el quadrilàter ABCD format pels vèrtexs de l'enunciat.

L'arc $\overset{\frown}{AB}$ abraça 90º. L'arc $\overset{\frown}{AD}$ abraça 90º.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és rectangle i isòsceles.
$\overline{BD} = 20$, és un diàmetre ja que $\angle BAD = 90º$
$\overline{OA} = 10$.

$$S_{ABD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{OA}}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100$$

L'arc $\overset{\frown}{BC}$ abraça 60º. L'arc $\overset{\frown}{CD}$ abraça 120º.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és rectangle, $\angle BDC = 30º$.

La superfície del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és la meitat de la superfície d'un triangle equilàter de costat $\overline{BD} = 20$. La seua àrea és:

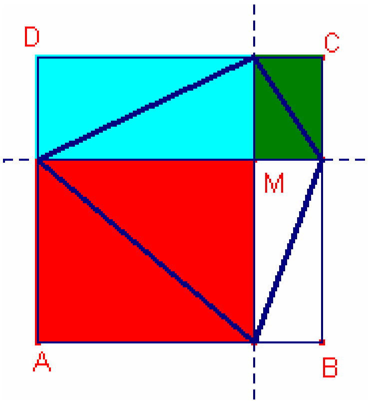
$$S_{BCD} = \frac{1}{2}\left(20^2 \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 50\sqrt{3}.$$

L'àrea del quadrilàter ABCD és la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$S_{ABCD} = 100 + 50\sqrt{3} \approx 186'60 m^2.$$

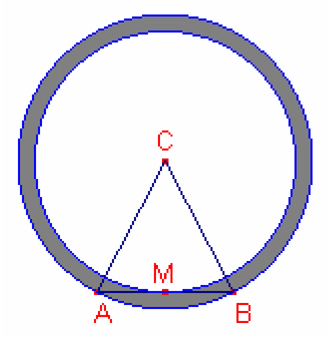
205.- Calculeu l'àrea del quadrilàter que format pels peus de les perpendiculars baixades als costats d'un quadrat de costat 10 des d'un punt interior al quadrat.
García Ardura, 713.

Solució.
El punt M interior al quadrat ABCD, al dibuixar les perpendiculars forma 4 rectangles.
Els costats del quadrilàter són les diagonals dels rectangles.
Aleshores l'àrea del quadrilàter és la meitat de l'àrea del quadrat.



206.- La base d'un triangle isòsceles mesura 36cm. Pel vèrtex oposat a la base com a centre, s'han traçat dues circumferències, una que passa pels extrems de la base i l'altra pel punt mig de la base.
Determineu l'àrea de la corona circular que determinen ambdues circumferències.
García Ardura, 831.

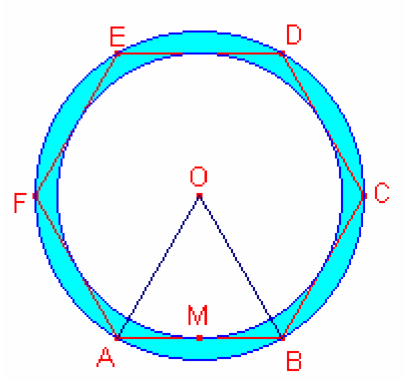
Solució:



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat desigual $\overline{AB}=36$.
Siga R la circumferència de centre C que passa pel punt A.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Siga r la circumferència de centre C que passa pel punt M.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$R^2=r^2+18^2$.
L'àrea de la corona circular de radis R, r és:
$S=\pi\left(R^2-r^2\right)=\pi 18^2=324\pi\approx 1017'88cm^2$.
Notem que la solució del problema no depén de la mesura dels costats laterals del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

207.- En un hexàgon regular de costat 10cm s'han inscrit i circumscrit dues circumferències.
Determineu l'àrea de la corona circular que determinen ambdues circumferències.

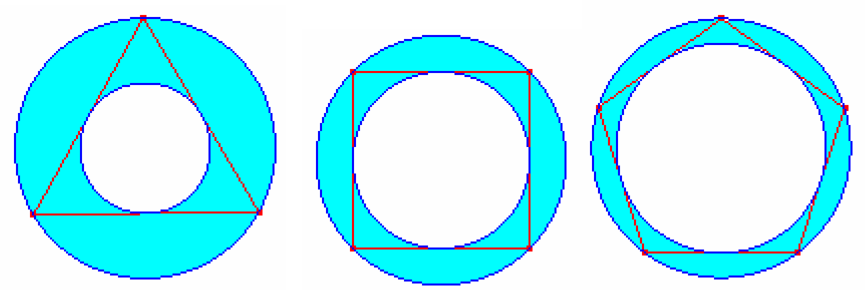


Solució:
Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat 10.
Siga O el centre de l'hexàgon (centre de les dues circumferències inscrita i circumscrita a l'hexàgon).
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

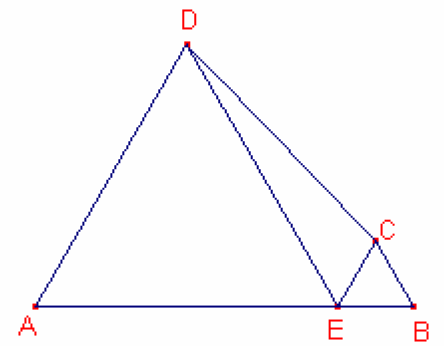
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{OM} = 5\sqrt{3}$.
El radi de la circumferència circumscrita a l'hexàgon és
$R = \overline{OA} = 10$.
El radi de la circumferència inscrita a l'hexàgon és $r = \overline{OM} = 5\sqrt{3}$.
L'àrea de la corona circular és:

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(10^2 - \left(5\sqrt{3}\right)^2\right) = 25\pi \approx 78'54\text{cm}^2.$$

Altres propostes:
En un triangle equilàter (un quadrat, un pentàgon regular) de costat 10cm s'han inscrit i circumscrit dues circumferències.
Determineu l'àrea de la corona circular que determinen

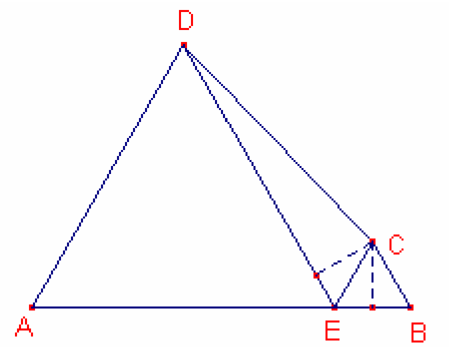


Nota: en el quadrat observem que l'àrea de la corona és igual a l'àrea del cercle inscrit al quadrat.



208.- Calculeu l'àrea del quadrilàter ABCD de la figura si $\overset{\Delta}{AED}$ és un triangle equilàter de costat 4 i $\overset{\Delta}{EBC}$ és un triangle equilàter de costat 1.

Solució:



Els triangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{EBC}$ són semblants i la raó de semblança 4:1.

$\frac{S_{AED}}{S_{EBC}} = 4^2$.

Aleshores, $S_{AED} = 16 \cdot S_{EBC}$

Els triangles $\overset{\Delta}{DEC}$, $\overset{\Delta}{EBC}$ tenen la mateixa altura, aleshores les àrees són proporcionals a les bases:

$\frac{S_{DEC}}{S_{EBC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = 4$.

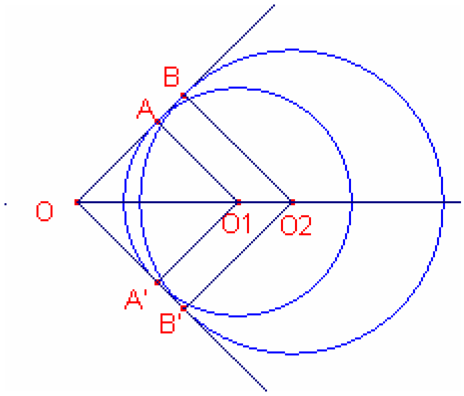
Aleshores, $S_{DEC} = 4 \cdot S_{EBC}$.

$S_{ABCD} = S_{AED} + S_{EBC} + S_{DEC} = 21 \cdot S_{EBC}$

$S_{EBC} = 1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$S_{ABCD} = 21 \cdot S_{EBC} = \frac{21}{4}\sqrt{3}$.

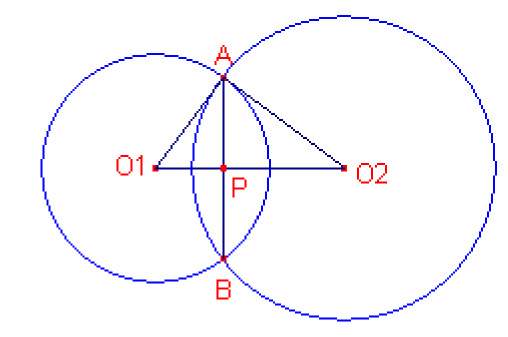
209.- Dues circumferències de radis 3 i 4 són secants i les rectes tangents a ambdues circumferències formen 90º.
Determineu la distància entre els centres



Solució:
Siga O_1 el centre de la circumferència de radi 3.
Siga O_2 el centre de la circumferència de radi 4.
Siguen t_1, t_2 les rectes tangents a les dues circumferències
Siga O la interesecció de les dues circumferències.
Siguen A i B els punts de tangència les dues circumferències amb t_1.
Siguen A' i B' els punts de tangència les dues circumferències amb t_2.

Notem que OAO_1A' i OBO_1B' són quadrats de costat 3, 4, respectivament.
$\overline{OO_1} = 3\sqrt{2}$, $\overline{OO_2} = 4\sqrt{2}$.
$\overline{O_1O_2} = \overline{OO_2} - \overline{OO_1} = \sqrt{2}$.

210.- Dues circumferències de radis 3 i 4 són secants ortogonals (les rectes tangents en els punts on són secants són ortogonals).
Determineu la distància entre els centres i la distància entre els punts secants de les dues circumferències.



Solució:
Siga O_1 el centre de la circumferència de radi 3.
Siga O_2 el centre de la circumferència de radi 4.
Siguen A i B els punts de tall de les dues circumferències.
Siga P el punt intersecció dels segments $\overline{O_1O_2}$, $\overline{AB}$.
Notem que si les circumferències són ortogonals al unir el punt on són secants amb els centre forma un angle de 90º.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $O_1\overset{\Delta}{A}O_2$:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Els triangles rectangles $O_1\overset{\Delta}{A}O_2$, $O_1\overset{\Delta}{P}A$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AO_2}}{\overline{O_1O_2}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AO_1}}.$$

$$\frac{4}{5} = \frac{\overline{AP}}{3}.$$

$$\overline{AP} = \frac{12}{5}.$$

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AP} = \frac{24}{5}.$$